导函数介值定理 (达布定理)

定理 1. 闭区间 $[a,b]$ 上的可导函数一定可以取到介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的值.

证明. 我们证明它的等价形式, 即所谓导函数零点定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 对于介值定理我们只需要考虑函数 $g(x)=f(x)-\mu x$, 其中 μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值.

不妨假定 $f'_+(a)<0<f'_-(b)$, 由导数定义

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限保号性, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 即 $f(x)-f(a)>0$, 这说明 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 同理 $f(b)$ 也不是最大值. 因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 从而由费马定理可知 $f'(\xi)=0$. ☆

这个定理阐述了导函数很重要的性质: 介值性. 对于一般的函数而言, 连续才具有介值性, 而导函数的特殊之处在于它存在就具有介值性, 并不需要导函数连续, 当然, 我们有经典的导函数不连续的例子:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

导函数极限定理

定理 2. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 $x=0$ 的去心邻域内可导, 且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且

$$f'(x_0)=A.$$

证明. 这个定理看起来高大上, 实际上一步定义加洛必达就完了:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$$

☆

这个定理也阐述导函数的一个特性, 对于连续函数而言, 极限存在无法保证函数的连续性, 但是导函数很特殊, 极限存在就意味着连续. 当然, 上述结论对于单侧导数也同样成立.

步入正题, 以上两个定理是考研教材未列举出来, 而实则需要大家掌握其证明和应用的定理. 在此定理的基础上, 我们推出导函数的其他结论.

推论 1. 可导函数的导函数一定没有第一类间断点.

证明. 不管是第一类的可去间断点还是跳跃间断点, 因为导函数的左右极限均存在, 那么这都将与导函数的极限定理矛盾. ☆

注: 导函数可以有间断点, 但是只能是第二类间断点.

由于积分与导数的互逆性, 我们有

推论 2. 含有第一类间断点的函数在包含此间断的区间上不存在原函数.

利用导函数介值定理, 我们可以很容易证明广义的罗尔定理:

广义罗尔定理

定理 3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, 其中 a,b 可以是无穷大, 且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 反证法. 假定不存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 那么根据导函数的介值定理可知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上不变号, 即 $f'(x)$ 恒正或恒负, 因此 $f(x)$ 是严格单调的, 这与 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$ 矛盾, 因此存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. ☆

当然, 广义的罗尔定理以及广义的柯西中值定理都有其特殊的证明方法, 我们假定 $a = -\infty, b = +\infty$, 令

$$F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ A, & t = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

则 $F(t)$ 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上满足普通的罗尔定理条件, 存在 $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $F'(\eta) = f'(\tan\eta)\sec^2\eta = 0$, 取 $\xi = \tan\eta$, 则 $f'(\xi) = 0$.

除此之外, 在这里会涉及到一些让多数同学混淆的符号, 这里留一个例题给大家:

1. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义,

(1) 如果 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在, 问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否连续? 是否可导?

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在且相等, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否可导?

(3) 在 (2) 的基础上假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 结果又如何?

一阶线性微分方程的通解形式

在同济高数教材上给出的方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+C\right) \\ &= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

首先同济教材对此公式的推导采用及其复杂的方法, 齐次此通解的形式是及其不明确的式子, 这里包含了三个不定积分符号, 所以每个不定积分都是都带有常数的, 虽然同济书上指出这里的不定积分理解为某个原函数, 但是这种写法无法让人理解, 那么它正确的写法应该怎么写呢, 我们利用积分因子给出它的推导, 和形式上的明确化:

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s.$$

积分因子法的推导

在同济高数教材上给出的方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+C\right) \\ &= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

注意到 $P(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, 在原方程两边乘以 $\mathrm{e}^{P(x)}$ 得

$$\mathrm{e}^{P(x)}\big(y'+p(x)y\big)=\left(y\mathrm{e}^{P(x)}\right)'=q(x)\mathrm{e}^{P(x)}$$

将上式从 x_0 到 x 再积分一次得

$$y\mathrm{e}^{P(x)}-y_0\mathrm{e}^{P(x_0)}=\int_{x_0}^{x}q(t)\mathrm{e}^{P(t)}\,\mathrm{d}t$$

我们把形式简化一点可以写为

$$y=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

上述解其实是满足 $y(x_0)=y_0$ 的解, 把 y_0 写为 C, 就得到通解形式

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

这就是非常明确的形式解, 不包含任何不定积分符号, 只有一个积分常数, 每个变限积分都是具体的一个函数.

一道级数敛散性判别

最近有读者问了我一道级数问题, 难度还不小, 之前也有读者问过类似的题, 今天一并给出解答.

2. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0(n>1)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n, n\geqslant 2$$

证明:

1. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n, n\geqslant 2;$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 第一问显然, 只需要注意到

$$\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$$

然后两边除以 $\ln n$ 即可. 然后

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}\left(1+\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n\right)=\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}(1+c_n) \qquad (*)$$

注意到

$$c_n=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n\sim b_n$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也是绝对收敛, 则存在常数 $m\in\mathbb{N}$, 当 $k\geqslant m$ 时 $|c_k|<\frac{1}{2}$. 而由 $(*)$ 式可知

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} > \frac{a_n}{\frac{1}{n\ln n}(1+c_n)} > \cdots > \frac{a_m}{\frac{1}{m\ln m}\prod_{k=m}^{n}(1+c_k)}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 则当 $n\to\infty$ 时, $\prod_{k=m}^{n}(1+c_k)$ 收敛到某个正的常数, 也就是当 n 充分大时, $a_n>\dfrac{C}{n\ln n}$, C 为某个正的常数, 这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

同类似的一道题

如果正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O\left(b_n\right),n\to\infty$$

其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 这题是史济怀数学分析课后问题, 有上一题就知道这题该怎么做了, 和上面类似的推导, 记 $c_n=\dfrac{n}{n+1}O\left(b_n\right)$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{1+c_n},$$

于是得到

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{a_m}{\frac{1}{m}\prod_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)}$$

然后 $\prod\limits_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)$ 当 $n\to\infty$ 的极限存在, 说明 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 同阶, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

解答黄之老师两道征解题

向 禹

征解题一解答

1. 设 $f(t)=\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x,t\in\mathbb{R}$. 证明: 当 t 为非负整数时, $f(t)=\dfrac{\pi}{t!}$; 当 t 为负整数时, $f(t)=0$. 并证明:若 n 为正整数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\pi.$$

解 利用留数定理可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}tx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}},z=0\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{t!}, & t\in\mathbb{N}\\ 0, & t\in\mathbb{Z}^-\end{cases}.$$

最后一步留数的计算只需要将 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}$ 展开为 Laurent 级数, 找其负一次幂系数即可.

注意到

$$\begin{aligned}&\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\\ =&\left(\cos(\sin x)\cos\frac{nx}{2}+\sin(\sin x)\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\\ =&\frac{1}{2}\cos(\sin x)\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}\sin(\sin x)\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].\end{aligned}$$

于是原极限可以成四部分, 其中由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$L_4=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$$

而

$$\begin{aligned}L_1&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\mathrm{e}\pi}{2}.\end{aligned}$$

上述积分利用傅里叶级数

$$\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)=\mathrm{Re}\left[\exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\right]=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$$

即可得到.

$$\begin{aligned}L_2&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(0)=\frac{\pi}{2},\\ L_3&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos^2(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\frac{1+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/2}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/(2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\oint_{|z|=1}\mathrm{e}^{z}\frac{z+1}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{e}-1\right)\right]=\frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

注意上述积分中, 极点 $z=1$ 在围道边界上, 由小弧引理, 辐角值取 π 而不是 2π.

因此最后所求极限为

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=L_1+L_2+L_3-L_4=\mathrm{e}\pi.
$$

征解题二解答

2. 当 $t\in\mathbb{R}$ 时, 以下两个极限分别是什么?

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,
$$
$$
\lim_{t\to-\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.
$$

解 注意到在第一题中, 如果 $n\to-\infty$, 则 $L_1=-\frac{\mathrm{e}\pi}{2}, L_2=\frac{\pi}{2}, L_3=\frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}$, 则当 $n\to-\infty$ 时原极限为零, 那么根据归结原理, 这里的两个极限如果存在一定和上述 $n\to+\infty$ 和 $n\to-\infty$ 的极限分别相等. 事实上, 这里的极限利用积化和差公式也可以拆开成四部分. 其中 L_2, L_3 为常数, L_4 由 Riemann-Lebesgue 引理知为 0. 剩下 L_1, 我们只证明

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t,x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(n,x)\,\mathrm{d}x,
$$

其中

$$
g(t,x)=\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.
$$

对任意 $t>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant t<n+1$, 且 $t\to+\infty\Leftrightarrow n\to+\infty$, 则

$$
\begin{aligned}
g(t,x)-g(n,x)&=\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\\
&=\frac{2\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\cos\left(\frac{n+t}{2}+1\right)x.
\end{aligned}
$$

注意到

$$\left|\frac{e^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\right| < \left|\frac{\frac{x}{2}e^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\right|$$

上式右端在 $[0,\pi]$ 绝对可积, 于是用类似 Riemann-Lebesgue 引理的证法可知,

$$\lim_{n\to\infty}[g(t,x)-g(n,x)]=0.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n,x)=e\pi$, 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t,x)=e\pi$. 同理可得 $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t,x)=0$.

几个略有难度的考研极限题

今天讲三个极限题的计算, 其中前两个是非数类难度, 第三个是数学类难度, 那么这里介绍的都是常规的计算技巧, 非常规技巧参见我在 2017 年 9 月份左右发布的 Stolz 定理的函数 Stolz 定理的内容.

经典考题

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt}{n\pi}$$

注意到 $\displaystyle\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt=n\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=2n$, 于是

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

不难得知所求的极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

注: 本题的结论可以有一些推广, 比如上述 $\sin t$ 换为 $\cos t$, 结论照样不变, 利用辅助角公式我们可以进一步得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|a\sin t+b\cos t|\,dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\int_0^x|\sin(t+\varphi)|\,dt}{x}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}$$

事实上, 更一般的结论是

定理 4. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

复习全书上的一道题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)^2\pi^2}\leqslant\frac{\int_0^{x} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{n^2\pi^2}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boxed{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}&=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin(n\pi-t)|\,\mathrm{d}t\\&=\boxed{\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}\\&=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=n^2\pi\end{aligned}$$

于是

$$\frac{n^2\pi}{(n+1)^2\pi^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{(n+1)^2\pi}{n^2\pi^2}$$

不难得知所求的极限为 $\frac{1}{\pi}$.

注: 上述方法虽然对于更高次的极限也可以使用, 但是极限的计算越来越难, 最好是使用函数 Stolz 定理了. 当然了, 利用 $\sin x$ 的傅里叶级数可以得到更一般的结论, 这里就不再介绍.

最后再看一个数学类难度的问题

小有难度的一题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$,

于是

$$\frac{1}{\ln(n+1)\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\ln(n\pi)}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

注意到

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

而上述左右两边的等价无穷大均为 $\frac{2}{\pi}\ln n$, 于是原极限为 $\frac{2}{\pi}$.

注: 作为练习, 读者可以求如下极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

解答一道颇有难度的反常积分证明

难题

今天有同学问了我下面这道题:

4. 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 满足 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$. 求证: 函数

$$g(x)=f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

这道题的话, 三年前我在贴吧就解答过一次, 记得当时很快就解决了. 但是今天这位同学问我的时候才让记起来事实上我当时忽略了一个很重要的问题. 现在贴吧抽风, 帖子都找不到了. 下面来看正确解答:

证明 要证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{+\infty}\left(f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{+\infty}\left(f^2(x)-4\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t+4\mathrm{e}^{-2x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

等价于证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x.$$

这只需要利用分部积分

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

三年前在贴吧的时候我做到这里就结束了, 现在看来其实是不对的. 在最后一步分部积分中, 我们需要证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}}=0\quad\text{或}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=0.$$

之前我忽略了, 而恰巧这是本题最难的地方. 值得一提的是, 以下洛必达法则的做法是错误的:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=0$$

因为仅从题目 $f\in L^2\cap C[0,+\infty)$ 是无法得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 的, 比如我们有经典的反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

收敛, 而其被积函数不趋于 0, 甚至是无界的. 正确做法应该是由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)<\mathrm{e}^x\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

令 $F(x)=\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$, 则由题意知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=A$ 存在,

$$\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}F(t)=\mathrm{e}^x F(x)-\int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x F(x)-\int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=A-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=A-A=0$$

这就意味着极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}}=0$$

证毕.

微分中值定理与考研极限计算

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$.

解 这道题估计绝大多数考研的学生都做过, 很多人基本都是先把 n 换成 $\frac{1}{x}$, 然后洛必达开始操作了. 俗话说, 没有什么极限是洛必达不能解决的, 如果有, 就再洛 (纯属玩笑, 洛必达慎用). 不否认这样可以做出来, 但是对于考研来说, 节约做题时间也是很有必要的, 我们用拉格朗日中值定理三下五除二解决. 为了方便大家看清楚, 我们考虑 $f(x)=\arctan x$, 存在 $\xi\in\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n+1}\right)$, 使得 $f\left(\frac{a}{n}\right)-f\left(\frac{a}{n+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)$, 且当 $n\to\infty$ 时 $\xi\to 0$, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)&=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{a}{n(n+1)}=a.\end{aligned}$$

是不是又快又准! 如果稍微有一点基础, 用反正切恒等式 $\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}, xy>-1$, 然后等价无穷小也能很快解决, 比起洛必达实在是事半功倍. 这是一个比较简单的例子, 再看一例:

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}$.

解 这题比起上一题稍微隐蔽一点, 当然我知道很多拿着就洛必达, 反正经过一些列复杂的求导通分运算之后确实可以做出来, 但是我们用拉格朗日中值定理, 简直酸爽. 考虑 $f(x)=\ln(1+x)$, 这里是 $f(\tan x)-f(\sin x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\xi}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当然, 对数里面分出一个 1 再等价也一样.

前面这两个题呢, 都比较简单, 而且还有一些其他的替代方法. 下面我们来看一道题, 不用中值定理你都没法做:

7. 设 $f(x)$ 连续可导, 且 $f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^2}$.

解 这里首先洛必达法则不能做, 甚至连泰勒公式都没法做, 因为分母是二次方, 泰勒公式需要将分子展开到二次方, 也就是会出现二阶导数, 然而题目只有一阶导数连续. 然而这题就是中值定理的菜:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)(\mathrm{e}^x-1-x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}f'(\xi)\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当然, 我们认为这题还是比较简单, 还可以再改难一点:

8. $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, $f'(0)=0, f''(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}f'(\xi)\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^3}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{x}\\&=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注意我们使用拉格朗日中值定理的时候, ξ 介于 x 与 e^x-1 之间, 所以 ξ, x, e^x-1 都是等价无穷小.

考研内用中值定理解决的题目难度也就上述题目了, 考研以外的的话, 题目难度就大不相同了. 当然, 今天写这篇文章的目的不是说中值定理是万能的, 每一种方法都存在其局限性. 我们以前介绍了洛必达法则, Stolz 定理, 它们也只是某些场合适用, 而大部分人 (包括某些所谓的老师) 是根本不知道如何使用洛必达法则的, 完全就是瞎用, 错了还不自知. 但这并不是说我们就不能用这些方法了, 很多地方, 洛必达或者中值定理都有很好的应用, 前提是你对方法的掌握程度足够好, 而不是人云亦云.

一道小有难度的导数概念题

上次的题目涉及到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^2}$ 的极限问题, 前提是给定 $f(x)$ 连续可导, 然后 $f'(0)=1$, 当然这题比较简单. 现在反过来考虑, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{e}^x-1)-f(x)}{x^2}=0$, 问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 处可导?

那我们知道如果 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=0$ 的话, $f'(0)$ 是存在的.

中国科学技术大学数学科学学院 2019 夏令营试题——数学分析

1. 请写出一个具体的定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的函数 $f(x,y)$, 使得下式左右两边都有意义, 但是却不相等.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\lim_{x\to 0}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

有没有可能找到一个二元连续函数的 f, 满足如上的要求, 为什么?

2. 设某函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\ (n>1)$ 有一阶连续偏导数, 而且存在 $C>0, \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 满足

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\geqslant C|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

求证: $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, f 在 $\boldsymbol{x}$ 点的Jacobi矩阵 $Df(\boldsymbol{x})$ 可逆.

3. 设有二阶连续可偏导的函数 $f(x,y)$ 满足

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|\leqslant 1,\quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

而且

$$f(1,1)=f(1,-1)=f(-2,0).$$

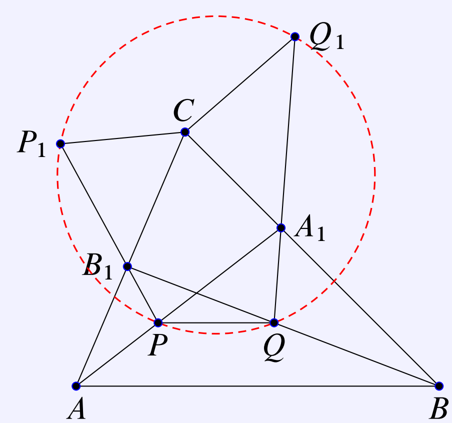
求证:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 2019,\quad \forall\, x^2+y^2\leqslant 1.$$

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的, 且对于任何 $x\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 是收敛的. 问: $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上是不是一致收敛的?请给出理由.

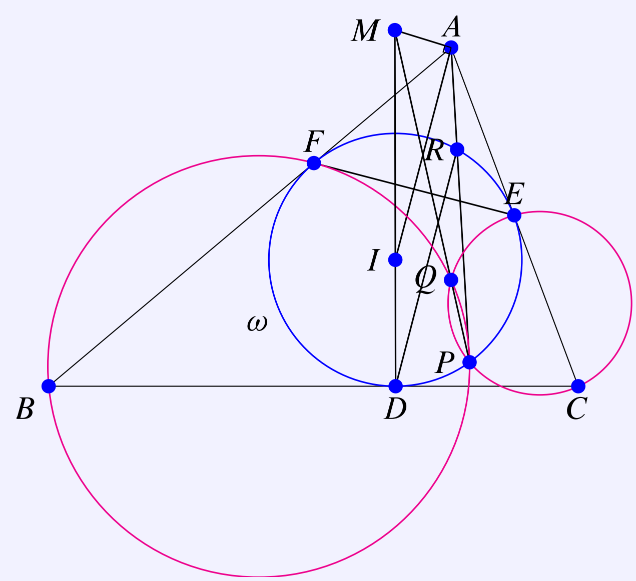
IMO 第一天平面几何题

在三角形 ABC 中, 点 A_1 在边 BC 上, 点 B_1 在边 AC 上. 点 P 和点 Q 分别在线段 AA_1, BB_1 上, 满足 PQ 与 AB 平行. 设 P_1 是直线 PB_1 上一点, 满足 B_1 在线段 PP_1 上（不含端点）且 $\angle PP_1C = \angle BAC$, 类似地在直线 QA_1 上定义点 Q_1, 使得 A_1 在线段 QQ_1 上（不含端点）, 且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. 证明: P, Q, P_1, Q_1 四点共圆.



IMO 第二天平面几何题

在锐角三角形 ABC 中, I 是内心, $AB\neq AC$. 三角形 ABC 的内切圆 ω 与边 BC, CA 和 AB 分别相切于点 D, E 和 F, 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一交点为 R, 直线 AR 与 ω 的令以交点为 P, 三角形 PCE 和三角形 PBF 的外接圆交于另一点 Q. 证明: 直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上.



一道概率论练习题

设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列, $\{\xi_n\}$ 的分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$. 求证: $\{\eta_n\}$ 的分布收敛于 $[-1,1]$ 上的均匀分布.

证明. 首先 ξ_k 的特征函数为

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_k}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = \cos t.$$

因此 $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$ 的特征函数为

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{t}{2^k}.$$

利用熟知的极限公式 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{t}{2^k} = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$, 这刚好就是 $[-1,1]$ 上均匀分布的特征函数, 因此 $\{\eta_n\}$ 的分布收敛于 $[-1,1]$ 上的均匀分布. ☆

一道线代练习题

设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 A 为非零半正定矩阵, B 为正定矩阵, 证明: $|A+B| > |B|$.

证明. 待证式等价于 $|B^{-1}||A+B| = |B^{-1}A + I| > 1$. 设 λ 为 $B^{-1}A$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 x, 则 $B^{-1}Ax = \lambda x$, 即 $Ax = \lambda Bx$, 于是 $x^{\mathrm{T}}Ax = \lambda x^{\mathrm{T}}Bx$, 那么由条件可知 $\lambda = \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}Bx} \geqslant 0$. 且由于 A 为非零矩阵, 那么至少有一个特征值 $\lambda \neq 0$, 于是 $B^{-1}A + I$ 的所有特征值都不小于 1, 且至少有一个特征值严格大于 1, 于是 $|B^{-1}||A+B| = |B^{-1}A + I| > 1$, 得证. ☆

一道小思考题

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f'(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1)$, 问 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是否有界?

纠正一道最近频繁问及的错题

俗话说, 好题不出门, 坑题传千里. 最近, 很多 qq 群都在传一道错误的中值定理证明题如下:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明存在 $\xi\in[a.b]$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi)}{6}(b-a)^3$.

直接取反例 $f(x)=x(1-x),[a,b]=[0,1]$ 可知题目是错的, 正确的题目应当是

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明存在 $\xi\in[a.b]$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$. 进一步, 我们需要说明, 这里的 $-\frac{1}{12}$ 其实就是最佳系数.

证明. 首先注意到由分部积分可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x,$$

然后由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

事实上通过以上过程, 我们证明了

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{12}(b-a)^3,\quad M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,$$

而且取 $f(x)=(x-a)(b-x)$ 可以取等, 所以系数 $-\frac{1}{12}$ 是最佳的. ☆

纵观上述证明, 我们利用到了 $f''(x)$ 的可积性, 也就是题目给定了 $f''(x)$ 的连续性. 但是根据 Darboux 定理可知 $f''(x)$ 的介值性不依赖于它的连续性, 于是, 我们可以将题目中的二阶连续可导改为二阶可导, 结论照样成立, 但证明的难度会变大.

令 $K=-\frac{12}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 用反证法, 假设不存在 ξ 使得 $f''(\xi)=K$ 成立, 根据 Darboux 定理有 $f''(x)>K$ 或者 $f''(x)<K$ 恒成立. 不妨设 $f''(x)>K,x\in[a,b]$. 那么由 Taylor 公式可得

$$0=f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\eta_x)}{2}(a-x)^2,$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+f'(x)(a-x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \frac{f''(\eta_x)}{2}(a-x)^2\,\mathrm{d}x < -\frac{K}{2}\int_a^b (a-x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{K}{6}(b-a)^3 = 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

矛盾, 因此原结论成立.

再谈行列式降阶公式

在两年前的博文中, 其实我们已经很详细探讨过矩阵 AB 与 BA 的关系, 最近在上课的时候又碰到类似的问题, 我们简单介绍一下.

定理 5 (行列式降阶公式)**.** 设 $A_{m\times n}, B_{n\times m}$, 则 $\lambda^n|\lambda E_m \pm AB| = \lambda^n|\lambda E \pm BA|$.

证明. 在等式

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ A & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ O & \lambda E_m \pm AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -A & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n \pm BA & B \\ O & \lambda E_m \end{pmatrix}$$

两边取行列式即可得到. ☆

对于数学系的同学这个公式应用还是非常广的, 比如下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & \lambda + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & \lambda + a_nb_n \end{vmatrix}$$

记 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \beta = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 那么有 $|\lambda E_n + \alpha\beta^{\mathrm{T}}| = |\lambda + \beta\alpha^{\mathrm{T}}| = \lambda + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

对于非数学类的学生而言, 更多的是在 $n = m$ 的条件下应用. 行列式的降阶公式其实等价于 $\lambda^n\varphi_{AB}(\lambda) = \lambda^m\varphi_m(BA)$, 也就是 AB 与 BA 的特征多项式其实就相差一个因子 λ^{n-m}, 这说明 AB 与 BA 的所有非零特征值连同其重数都是相同的. 由迹与特征值的关系可知 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. 事实上, 令 $A_{m\times n} = (a_{ij}), B = (b_{ji})$, 则 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$. 应用这个性质可知 $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^2$, 于是

$A=O \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}A)=0$. 比如我们可以解决一道很简单的征解题: 如果 $A^{\mathrm{T}}A=A^2$, 则 $A=A^{\mathrm{T}}$. 这只需证明 $\operatorname{tr}(A-A^{\mathrm{T}})(A-A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0$ 即可, 显然.

最后我们看一个非数类的一道考题: 设 A,B 都是 n 阶方阵, 已知 $E+AB$ 可逆, 证明 $E+BA$ 可逆.

证明. 这道题利用降阶公式直接秒杀, 而原题则是构造一些列的方程组, 写了一大堆. 不过这里我们用另一种写法, 先证明 AB 与 BA 具有相同的非零特征值: 设 $ABX=\lambda X, \lambda\neq 0, X\neq \mathbf{0}$, 则 $BX\neq\mathbf{0}$, 于是 $(BA)BX=\lambda BX$, 这说明 AB 的非零特征值都是 BA 的非零特征值, 反之也对. 那么 $E+AB$ 可逆说明 AB 没有特征值 -1, 于是 BA 也没有特征值 -1, 即 $E+BA$ 可逆. ☆

四道颇有意思的不定积分

最近在贴吧看到一道不定积分题如下

$$\int \frac{x\sin x}{(x+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

这题原则上讲, 还是小有难度的, 然后我用 MMA 简单算了一下, 确实是有初等原函数的. 像这种构造的函数, 能够有初等原函数确实不容易, 同时我还发现, 下面几个积分都是一样的

$$\int \frac{x\sin x}{(x+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{x\sin x}{(x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{x\cos x}{(x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

这里我们给出最后一个积分的计算, 其他都类似.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\cos x}{(x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x\cos x}{1+\sin x}\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int \frac{x\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-\cos x}\right)\\
&= -\frac{x\cos x}{(1+\sin x)(x-\cos x)}+\int\frac{1}{x-\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)\\
&= -\frac{x\cos x}{(1+\sin x)(x-\cos x)}+\int\frac{1}{x-\cos x}\frac{-x+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{x\cos x}{(1+\sin x)(x-\cos x)}+\frac{\cos x}{1+\sin x}+C\\
&= -\frac{\cos^2 x}{(x-\cos x)(1+\sin x)}+C=\frac{\sin x-1}{x-\cos x}+C.
\end{aligned}$$

2019 年全国高中数学联赛一试 A 卷

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 已知正实数 a 满足 $a^a=(9a)^{8a}$, 则 $\log_a(3a)$ 的值为________.
   答案: $\dfrac{9}{16}$.

2. 若实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素与最小元素之差等于该集合的所有元素之和, 则 x 的值为________.
   答案: $-\dfrac{3}{2}$.

3. 平面直角坐标系中, $\vec{e}$ 是单位向量, 向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{e}=2$, 且 $|\vec{a}|^2\leqslant 5|\vec{a}+t\vec{e}|$ 对任意实数 t 成立, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是________.
   答案: $\left[\sqrt{5},2\sqrt{5}\right]$.

4. 设 A,B 为椭圆 Γ 的长轴顶点, E,F 为 Γ 的两个交点, $|AB|=4,|AF|=2+\sqrt{3}$, P 为 Γ 上一点, 满足 $|PE|\cdot|PF|=2$, 则 $\triangle PEF$ 的面积为________.
   答案: 1.

5. 在 $1,2,3,\cdots,10$ 中随机选出一个数 a, 在 $-1,-2,\cdots,-10$ 中随机选出一个数 b, 则 a^2+b 被 3 整除的概率为________.
   答案: $\dfrac{37}{100}$.

6. 对任意闭区间 I, 用 M_I 表示函数 $y=\sin x$ 在 I 上的最大值, 若正数 a 满足 $M_{[0,a]}=2M_{[a,2a]}$, 则 a 的值为________.
   答案: $\dfrac{5}{6}\pi$ 或 $\dfrac{13}{12}\pi$.

7. 正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A,C 及棱 EF 上一点 K, 且将正方体分成体积比为 $3:1$ 的两部分, 则 $\dfrac{EK}{KF}$ 的值为________.
   答案: $\sqrt{3}$.

8. 将 6 个数 $2,0,1,9,20,19$ 按任意次序排成一行, 拼成一个 8 位数 (首位不为 0), 则产生的不同的 8 位数的个数为________.
   答案: 498.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分.

9. (本题满分 16 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a,CA=b,AB=c$. 若 b 是 a 与 c 的等比中项, 且 $\sin A$ 是 $\sin(B-A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项, 求 $\cos B$ 的值.
   答案: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 恰有一个公共点, 且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F. 求圆 Ω 的半径.
答案: $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

11. 称一个复数列 $\{z_n\}$ 为 "有趣的", 若 $|z_1|=1$, 且对任意正整数 n, 均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$. 求最大的常数 C, 使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m, 均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|\geqslant C$.
答案: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2019 年全国高中数学联赛二试 A 卷

一、(本题满分 40 分) 如图 1, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 边的中点. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 使得 AP 平分 $\angle BAC$, 直线 MP 与 $\triangle ABP, \triangle ACP$ 的外接圆分别相交于不同于点 P 的两点 D、E. 证明: 若 $DE=MP$, 则 $BC=2BP$.

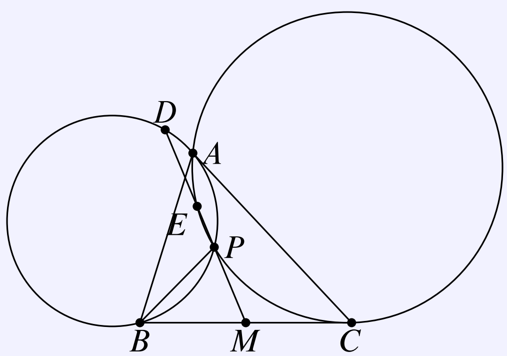


图 1

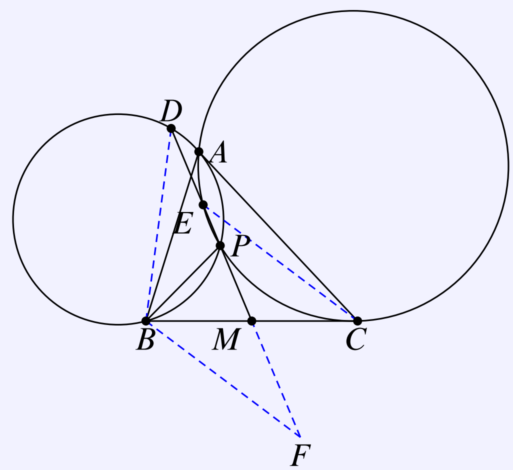


图 2

证明. 如图 2, 延长 PM 到点 F, 使得 $MF=ME$, 连接 BF, BD, CE. 由条件可知

$$\angle BDP=\angle BAP=\angle CAP=\angle CEP=\angle CEM.$$

因为 $BM=CM$ 且 $EM=FM$, 所以 $BF=CE$ 且 $BF/\!/CE$, 于是 $\angle F=\angle CEM=\angle BDP$, 进而 $BD=BF$. 又 $DE=MP$, 故 $DP=EM=FM$. 于是在等腰 $\triangle ABC$ 中, 由对称性得 $BP=BM$, 从而 $BC=2BM=2BP$. ☆

二、(本题满分 40 分) 设整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2019}$ 满足 $1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2019}=$

99. 记

$$f=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2019}^2)-(a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+\cdots+a_{2017}a_{2019}),$$

求 f 的最小值 f_0, 并确定使 $f=f_0$ 成立的数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2019})$ 的个数.
答案: $f_0=7400$, 使 $f=f_0$ 成立的数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2019})$ 的个数为 C_{1968}^{48}.
三、(本题满分 50 分) 设 m 为正整数, $|m|\geqslant 2$. 整数列 $a_1,a_2,\cdots$, 满足: a_1,a_2 不全为零, 且对任意正整数 n, 均有 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$. 证明: 若存在整数 r,s $(r>s\geqslant 2)$ 使得 $a_r=a_s=a_1$, 则 $r-s\geqslant|m|$.
证明: 略.
四、(本题满分 50 分) 设 V 是空间中 2019 个点构成的集合, 其中任意四点不共勉. 某些点之间连有线段, 记 E 为这些线段构成的集合. 试求最小的正整数 n, 满足条件: 若 E 至少有 n 个元素, 则 E 一定含有 908 个二元子集, 其中每个二元子集中的两条线段有公共端点, 且任意两个二元子集的交为空集.
答案: 2795.

几个有趣的结果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\pi,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\pi,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^3=\frac{3\pi}{4},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^4=\frac{2\pi}{3},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^5=\frac{115\pi}{192},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^6\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^6=\frac{11\pi}{20}.$$

数值结果显示, 上述等式从 7 次方开始就不再成立了.

解答一道贴吧级数题

今天逛了一下贴吧, 看到一道级数题如下:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^2\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)+\frac{1}{4}\right].$$

好久没做这种题了, 还有点手生了. 解答此题我们需要利用 ζ 函数的母函数与 $\ln\sin x$ 的傅里叶级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)x^{2n}=\frac{1-\pi x\cot\pi x}{2},\quad \ln\sin x=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}.$$

下面就是计算了.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^2\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)+\frac{1}{4}\right]&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[-k^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^nk^{2n}}+\frac{1}{4}\right]\\
&=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n4^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n-2}}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(2n-2)}{n\cdot 4^n}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{(n+1)\,2^{2n+2}}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n+1}\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)\,x^{2n+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\pi x^2\cot\pi x-x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi x^2\cot\pi x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{8}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cot t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{8}\\
&=\frac{\ln 2}{4}-\frac{7}{8\pi^2}\zeta(3)-\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cot t\,\mathrm{d}t&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\mathrm{d}\left(\ln\sin t\right)=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\ln\sin t\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\ln 2\mathrm{d}t-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2nt\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi^2}{4}\ln 2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{4n^2}=\frac{\pi^2}{4}\ln 2-\frac{7}{8}\zeta(3).
\end{aligned}$$

美国数学月刊征解题 12143

求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}.$$

解 首先 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}$, 对每个固定的 k, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}=\mathrm{e}^{-k}.$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

另一方面, 对每个固定的 m,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{e}^{-k}=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e}-1},$$

令 $m\to\infty$ 可知 $\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\geqslant\lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e}-1}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, 因此所求的极限值就是 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

美国数学月刊征解题 12145

证明:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(t)\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\cos(t)\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t &\xlongequal{t=\sinh x}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\sinh x)\sin(\cosh x)}{\cosh x}\cosh x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\big(\sin(\cosh x+\sinh x)+\sin(\cosh x-\sinh x)\big)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin(\mathrm{e}^{x})+\sin(\mathrm{e}^{-x})\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

2019 年 12 月 8 日美国普特南大学生数学竞赛题

设

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$.

解 首先我们有三角恒等式

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha-\cos^2\beta&=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\\&=\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)-\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)}\right)\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}-1\right)=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}\\&=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin^3\frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{n^3\sin^3\frac{\pi}{2n}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^3=\frac{8}{\pi^3}$$

Ovidiu Furdui 的一道征解题

求出所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得其满足如下函数方程:

$$f(-x)=1+\int_0^x \sin(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

解 由所给的等式可知 $f(x)$ 具有足够可导性, 且 $f(0)=1$. 换元 $x-t=u$ 可得

$$\begin{aligned}
f(-x)&=1+\int_0^x \sin(x-u)\,f(u)\,\mathrm{d}u\\
&=1+\boxed{\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u}.
\end{aligned}$$

等式两边求导得

$$-f'(-x)=\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u,$$

于是 $f'(0)=0$. 再求导得

$$\begin{aligned}
f''(-x)&=\boxed{-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u+\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u}+f(x)\\
&=f(x)-f(-x)+1.
\end{aligned}$$

于是 $f''(0)=f(0)=1$, 且 $f''(x)=f(-x)-f(x)+1=2-f''(-x)$. 等式两边再继续求导得

$$\begin{aligned}
-f'''(-x)&=f'(x)+f'(-x),\\
f^{(4)}(-x)&=f''(x)-f''(-x)=2-2f''(-x),
\end{aligned}$$

即 $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(x)+2f''(x)=1$, 解此四阶常系数线性微分方程可得 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

北京大学 2020 年考研数学分析第三题解答

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 单调增加且 $f(x)\geqslant 0$. 记

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

(1) 证明 $s\geqslant\frac{1}{2}$.

(2) 比较 $\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的大小.（可以用物理或几何直觉）

证明 这题我很早前在贴吧见过解答. 第一问属于比较简单的问题, 第二问则是非常难, 当然, 如果是只要猜答案, 应该时可以用直觉猜出来的, 我们给出严格的证明. 对于这样的积分不等式问题, 函数的连续性条件往往是多余的, 这里直接去掉这个条件进行证明.

(1) 由 Chebyshev 不等式得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 我们先猜一下答案, 考虑一根在区间 $[0,1]$ 上的密度为 $f(x)$ 的棒, s 就是其重心所在的位置, 重心的左右两侧保持杠杆平衡, 也就是满足重力与重力臂的乘积相等, $F_1l_1 = F_2l_2$. s 的左边更长, 其力臂更长, 对应的重力小一些, 也就是质量轻一点, 因此 $\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 下面我们来严格证明:

$$\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由题意知 $F(x)$ 是单调递增的（下）凸函数, 为方便, 我们不妨假定

$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

于是有

$$s = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x,$$

那么原不等式则等价于

$$F(s) \leqslant 1 - F(s).$$

等价于证明 $f(s) \leqslant \frac{1}{2}$. 那么由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}
F(s) &= F\left(1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F\left(\int_0^1 (1 - F(x))\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 F\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \int_x^1 F\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 1\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

College Mathematics Journal 期刊征解题 1167 解答

证明以下等式:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(n+1)}=2,$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(n+1)^2}=4-4\ln 2,$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(n+1)^3}=4\ln^2 2-8\ln 2-\frac{\pi^2}{3}+8.$

证明 首先我们有

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{4^n}=\frac{1}{1-x}.$$

于是两边从 0 到 x 积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}=2-2\sqrt{1-x}.$$

取 $x=1$ 得等式 1. 等式两边除以 x 再从 0 到 x 积分得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)^2}&=\int_0^x\frac{2-2\sqrt{1-t}}{t}\mathrm{d}t\\&=4-4\ln 2+4\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)-4\sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

取 $x=1$ 得等式 2. 两边再除以 x, 再从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(n+1)^3}&=4\int_0^1\frac{1-\ln 2+\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)-\sqrt{1-x}}{x}\mathrm{d}x\\&=4\ln^2 2-8\ln 2-\frac{\pi^2}{3}+8.\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=2-2\ln 2.$$

$$\int_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)-\ln 2}{x}\mathrm{d}x=\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}.$$

其中最后一个积分参见我的积分级数文档 34 题.

解答李雅老师微博一题

证明 $\sin x+\sin\pi x$ 不是周期函数.

证明 要证明这个问题, 我们首先承认一个事实: π 是一个无理数, 当然, π 是无理数这个结论已经远远超出了本题的难度, 我们姑且承认它.

反证法, 假定 $T\neq 0$ 是 $f(x)=\sin x+\sin\pi x$ 的一个周期, 那么 T 也是 $f'(x)=\cos x+\pi\cos\pi x$ 的一个周期, 于是

$$f'(0)=f'(T)\Rightarrow 1+\pi=\cos T+\pi\cos\pi T.$$

因此有 $\cos T=1,\pi\cos\pi T=\pi$, 前者说明 $T=2k_1\pi$, 后者说明 $\pi T=2k_2\pi$, 这里 k_1,k_2 都是整数, 从而 $\pi=\dfrac{k_2}{k_1}$, 这说明 π 是一个有理数, 矛盾, 因此 $f(x)$ 不是周期函数.

关于这题, 南京师范大学宣立新老师早期给过更一般的结论.

一道不等式证明

对实数 $\lambda < \mathrm{e}$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} < \pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}}.$$

证明 最近出现在贴吧的这个不等式相当火, 当然难度相当的大. 这题的不等式是非常 sharp 的, 当 $\lambda \to \mathrm{e}^-$ 时, 可以用数值检验, 两边几乎相等, 所以并不能随意放缩. 这道题我也是做错了好久, 在一些网友的帮助下做出来的.

首先, 我们将两边均展开为级数的形式:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-\lambda z\mathrm{e}^{-z}}\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}} &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\left(1-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n \\ &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n.\end{aligned}$$

注意, 上述结果只对 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 成立. 当 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 时, 要证明原不等式, 只需要证明

$$\frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. 令

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{\mathrm{e}^{n+1}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

利用 Stirling 公式和 Wallis 公式很容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 我们要证明 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, 只需要证明 a_n 单调递减即可. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(n+2)^{n+2}}{\mathrm{e}(n+1)^{n+2}}$$

要证 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 取对数, 则等价于证明

$$\ln(2n+1) - \ln(2n+2) + (n+2)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+1) < 1.$$

也就是

$$\ln(1+2n) - n\ln(1+n) - 3\ln(1+n) + (n+2)\ln\left(1+\frac{n}{2}\right) + n\ln 2 - \ln 2 < 1.$$

令 $f(x)=\ln(1+2x)-x\ln(1+x)-3\ln(1+x)+(x+2)\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+x\ln 2-\ln 2,\ x>0$, 那么

$$f'(x)=\frac{2}{1+2x}-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}-\frac{3}{1+x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+1+\ln 2,$$
$$f''(x)=-\frac{4}{(1+2x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{1}{2+x}=\frac{-7x-5}{(2+x)(1+3x+2x^2)^2}<0.$$

因此 $f'(x)$ 单调递减, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 这说明 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 单调递增. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 所以 $f(x)<1$, 那么到这里就完成了 $|\lambda|<\mathrm{e}$ 部分的证明[a]. 当 $\lambda\leqslant-\mathrm{e}$ 时, 令 $-\lambda=k\mathrm{e}$, 则 $k\geqslant 1$, 原不等式等价于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+k}}{\mathrm{e}^{z-1}+kz}\mathrm{d}z<\sqrt{2\pi}$$

再令 $t=\sqrt{1+k}\geqslant\sqrt{2}$, 则 $k=t^2-1$, 令

$$g(t)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z}\mathrm{d}z,$$

则

$$g'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{(1-t)\mathrm{e}^{z-1}-(t^2+1)z}{[\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z]^2}\mathrm{d}z<0,$$

于是 $g(t)$ 单调递减,

$$g(t)\leqslant g(\sqrt{2})=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}+z}<\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}}=\sqrt{2}\mathrm{e}<\sqrt{2\pi},$$

证毕.

---

[a] 特别鸣谢积分群 QQ 小冰同学!

谈一谈矩阵 AB 与 BA(考研)

写在前面: 众所周知, 如果 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 这两个矩阵是可以互乘的, 但是一般结果是不可交换的, 也就是 $AB=BA$ 一般都不成立, 甚至这两个矩阵的阶数都不同. 然而即便如此, 这两个矩阵也有很多值得我们挖掘的性质, 尤其在考研中, 有不少年份都考到了这个问题, 因此我们简单地介绍一下这两个矩阵的关系.

命题 0.1

如果 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则 $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$.

这条性质比较简单, 只要把 A, B 设出来, 然后求出 AB 和 BA 的迹比较即可, 在大题中一般可以作为基本性质使用, 因此这里不给赘述.

命题 0.2

如果 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则 AB 与 BA 的所有非零特征值都相同.

这条性质比较重要, 虽然一般不可以直接使用, 但是证明还是比较简单的, 我们在这里给先给一个比较简单的证明, 下一个命题中我们还会再次证明这个命题.

证明: 设 λ 是 AB 的任一非零特征值,X 是属于 λ 的一个特征向量, 则

$$(AB)X=\lambda X \Rightarrow B(AB)X=B(\lambda X),\text{即}\ (BA)(BX)=\lambda(BX).$$

又

$$A(BX)=(AB)X=\lambda X\neq \mathbf{0}\Rightarrow BX\neq \mathbf{0}$$

因此, 这就说明 λ 也是 BA 的特征值, 同理可知 BA 的非零特征值也是 AB 的特征值, 命题得证. 大家可以注意这里强调特征值非零, 从证明中可知如果是零特征值就不对了. □

命题 0.3

如果 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则对任意实数 λ 有

$$\lambda^n|\lambda E-AB|=\lambda^m|\lambda E-BA|.$$

证明: 利用矩阵的乘法不难得到

$$\begin{pmatrix}E_n & O\\ A & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda E_n & B\\ O & \lambda E_m-AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & O\\ -A & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_n-BA & B\\ O & \lambda E_m\end{pmatrix}$$

再利用行列式的乘法, 在上式两边取行列试得

$$\lambda^n|\lambda E-AB|=\lambda^m|\lambda E-BA|.$$

这就证明了命题. 进一步可知 $\lambda^n\varphi_{AB}(\lambda)=\lambda^m\varphi_{BA}(\lambda)$, 这里 $\varphi_{AB}(\lambda)$ 和 $\varphi_{BA}(\lambda)$ 分别是 AB 和 BA 的特征多项式. 这两个特征多项式相差因子 $\lambda^{|m-n|}$, 这就说明了 AB 与 BA 的所有非零特征值连同重数都一样, 而零特征值个数的差刚好就是矩阵 AB 与 BA 的阶数之差. □

这个命题对数学系学生而言应该比较常见, 而对于考研的学生而言, 应用更多的应该是下面这个简单一点的命题:

命题 0.4

如果 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则

$$|E\pm AB|=|E\pm BA|.$$

下面我们来看一个上述性质的简单应用.

例 0.1: 计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & 1+a_nb_n\end{vmatrix}.$$

解: 这个题目在考研题里面作为行列式而言是个有一定难度的题, 原题大概用的是行列式加边的方法做的, 相当复杂, 但是我们如果灵活运用上述性质的话几乎没有任何计算难度.

$$\Delta=\left|E+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\right|=\left|1+\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\right|=1+a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

同时留一个稍微难一点的类似的例题给大家作为练习

练习 0.1: 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a_1^2 & 1+a_1a_2 & \cdots & 1+a_1a_n\\ 1+a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & 1+a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1+a_na_1 & 1+a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{vmatrix}$$

作为上述性质的特例, 考研中常考一类秩 1 矩阵的性质, 下面我们简单介绍一下这类矩阵.

命题 0.5

一个矩阵秩为 1 的充要条件是它可以写成一个非零列向量与一个非零行向量的乘积.

证明: 充分性显然, 下面我们看看必要性的证明. 由于 $\mathrm{R}(A)=1$, 因此 A 的任意两行都线性相关, 任一非零行 α^{T} 都是 A 的行向量组的极大无关组, 因此每一行都是 α^{T} 的倍向量, 不妨把各行记为 $\lambda_1\alpha,\lambda_2\alpha,\cdots,\lambda\alpha_m$, 再令 $\beta=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$, 则 $A=\beta\alpha^{\mathrm{T}}$, 证毕. □

这个是秩 1 矩阵最基本的性质, 而考研中经常出现的题目往往都是考查秩 1 的方阵的特征值有关的性质, 无外乎就是下面的结论:

命题 0.6

如果 $A=\beta\alpha^{\mathrm{T}}$ 是一个秩 1 的方阵 (意味着两个向量的维数相同), 则 A 有 $n-1$ 个零特征值, 第 n 个特征值是 $\lambda=\mathrm{Tr}(A)=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$. 并且矩阵 A 可对角化的充要条件就是 $\lambda\neq 0$.

☞ **证明:** 由于 $\mathrm{R}(A)=1$, 则方程 $AX=\mathbf{0}$ 有 $n-1$ 个线性无关的解, 这就是意味着 A 的属于特征值 0 的线性无关特征向量有且只有 $n-1$ 个, 如果最后一个特征值 $\lambda=0$, 则 0 是 n 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 如果 $\lambda\neq 0$, 我们再加上一个 λ 对应的特征向量就有 n 个线性无关特征向量了, 此时 A 就可以对角化, 这完成了后半部分证明. 进一步, 我们根据矩阵迹的性质, 迹等于所有特征值的和, 自然意味着

$$\lambda=\mathrm{Tr}\,(A)=\mathrm{Tr}\left(\beta\alpha^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{Tr}\left(\alpha^{\mathrm{T}}\beta\right)=\alpha^{\mathrm{T}}\beta.$$

□

这里呢, 我也不举类似的例子了, 我想只要大家能理解这些内容, 相信对大家解决线性代数问题也会有很大帮助!

从 Sherman-Morrison 公式说起 (矩阵论)

今天来讲一点和矩阵论有关的内容, 自然与考研无关了, 可能在竞赛有所涉及. 说到 Sherman-Morrison 公式, 其实是一个与某种特殊形式矩阵的逆有关的一个定理, 之前其实我并不知道它叫这个名字, 后来在贴吧某吧友艾特我, 让我帮他证明这个公式, 我一看有名字的定理, 自然就维基百科了, 于是得到了下面一个定理:

定理 0.1 Sherman-Morrison Formula

如果 $A \in F^{n\times n}$ 是 n 阶可逆矩阵,$u, v \in F^{n\times 1}$, 如果 $1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u \neq 0$, 则

$$\left(A + uv^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u}$$

关于这个公式, 我先把维基百科上的方法搬过来, 验证法. 即要证明 X 的逆矩阵是 Y, 只需要证明 $XY = YX = I$ 即可.

$$\begin{aligned}
\left(A + uv^{\mathrm{T}}\right)\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u}\right) &= AA^{-1} + uv^{\mathrm{T}}A^{-1} - \frac{AA^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1} + uv^{\mathrm{T}}A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u} \\
&= I + uv^{\mathrm{T}}A^{-1} - \frac{uv^{\mathrm{T}}A^{-1} + uv^{\mathrm{T}}A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u} \\
&= I + uv^{\mathrm{T}}A^{-1} - \frac{u\left(1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u\right)A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u} \\
&= I + uv^{\mathrm{T}}A^{-1} - uv^{\mathrm{T}}A^{-1} = I
\end{aligned}$$

同理还有另一半的等式, 因此这就验证了 S-M 公式. 这种方法未免过于投机取巧了, 下面我们要通过矩阵运算求出这个逆矩阵来, 这要从一个分块矩阵的逆矩阵公式说起.

命题 0.7

设 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆, 如果 $|A| \neq 0$, 则

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

如果 $|D| \neq 0$, 则

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

☞ **证明:** 若 $|A| \neq 0$, 则有

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边再取逆得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -AB \\ O & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

这就证明了第一个式子, 另外一个式子证明方法完全一样. 而根据这两个逆矩阵的形式, 比较矩阵的第一个元素我们可以得知

$$\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1} = A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}.$$

因此在这个等式中我们只需要令 $B=-u, D=1, C=v^{\mathrm{T}}$, 即得到 S-M 公式

$$\left(A+uv^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+v^{\mathrm{T}}A^{-1}u}.$$

特别得, 如果 $A=I$, 我们得到 $\left(I+uv^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = I-\dfrac{uv^{\mathrm{T}}}{1+v^{\mathrm{T}}u}$. 到这里我们已经给出了 S-M 公式的一个非常完整且严密的证明, 但是上面的结论太过复杂一般人估计都难以想到, 当然我也不记得这么长的式子. 因此我们还介绍一种便于记忆的利用矩阵分析的方法来求出这个逆矩阵. 从幂级数 $(1+x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ 出发, 我们可得

$$\begin{aligned}\left(A+uv^{\mathrm{T}}\right)^{-1} &= \left(\left(I+uv^{\mathrm{T}}A^{-1}\right)A\right)^{-1} = A^{-1}\left(I+uv^{\mathrm{T}}A^{-1}\right)^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-uv^{\mathrm{T}}A^{-1}\right)^n \\ &= A^{-1}\left(I-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(uv^{\mathrm{T}}A^{-1}\right)^n\right) = A^{-1}-A^{-1}u\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(v^{\mathrm{T}}A^{-1}u\right)^{n-1}v^{\mathrm{T}}A^{-1} \\ &= A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+v^{\mathrm{T}}A^{-1}u}\end{aligned}$$

这种方法是不是比上面的方法都要好呢？前提是得对矩阵分析有一定的把握. 好吧, 纯粹介绍一个矩阵公式, 不知道数学竞赛会不会考这种玩意呢. □

一道美国数学月刊征解题的解答

The American Mathematical Monthly publishes articles, notes, and other features about mathematics and the profession. Its readers span a broad spectrum of mathematical interests and abilities. 每个月的话美国数学月刊 (AMM) 都会推送一些征解题请各位数学爱好者来解答, 当然其实由不少题目都是由出处的, 但是 AMM 推送的题目都是经典中的经典, 都是非常难且非常好的题目. 今天向老师偶然看到了一个证明题, 这里我先放原图好了

Problem 12004 - 08 - M. Omarjee (France).

Let $\{a_n\}_{n\geq 1}$ be a strictly increasing sequence of real numbers such that $a_n \leq n^2\ln(n)$ for all $n \geq 1$. Prove that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}$$

diverges.

这个题目一看我感觉非常眼熟, 因为我曾经解决过它的类似问题.

例 0.2: 设 $f(x):(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 且是连续可导的函数, 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,\quad f'(x)>0, x\in(1,+\infty).$$

证明：积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

证明: 如果 $f'(x)$ 有界, 结论显然成立, 不妨设 $f'(x)$ 无界, 这时 $f(x)$ 单调趋于 $+\infty$. 对 $\forall A>0$, 由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\right)\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2$$

由 $f(x)\leqslant x^2\ln x$ 得 $f(\mathrm{e}^x)\leqslant x\mathrm{e}^{2x}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{\mathrm{d}\left[f(\mathrm{e}^t)\right]}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\\&=\left.\frac{f(\mathrm{e}^t)}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\right|_{\frac{A}{2}}^{A}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}f(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{f(\mathrm{e}^A)}{A^2\mathrm{e}^{2A}}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{A}+2\left(\ln 2+\frac{1}{A}\right)=2\ln 2+\frac{3}{A}.\end{aligned}$$

取 A 充分大, 则 $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\leqslant 2$, 因此

$$\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\geqslant\frac{\ln^2 2}{2}$$

对任意充分大的 A 都成立, 于是积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散. □

大家会发现这两个题目其实非常相像, 积分和级数只不过是连续和离散的不同表现形式, 因此本质上而言这两个题目是一样的, 不过级数的在处理上要稍微麻烦一点.

例 0.3: 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个严格单增实数列满足 $a_n \leqslant n^2 \ln n$ 对所有 $n \geqslant 1$ 都成立, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

证明: 首先如果 $\{a_n\}$ 有界的话结论就显然了, 因此假设 $\{a_n\}$ 无界, 意味着 $\{a_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $A>0$, 由 Cauchy 不等式 (这个不等式的证明以及积分, 代数, 期望形式我们在前期的公众号内容中都介绍过了) 得

$$\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil} \frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}\right) \geqslant \left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil} \frac{1}{n\ln n}\right)^2 \sim \left(\int_{e^{A/2}}^{e^A} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2 = \ln^2 2.$$

这里的求和式子中的上限和下限中的符号分别表示向上取整和向下取整. 另一反面, 利用 Abel 分部求和公式 (相当于就是分部积分公式的离散形式)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} \frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n} &= \frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N} + \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1}-a_M)\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n} - \frac{1}{(n+1)^2\ln^2(n+1)}\right) \\
&= \frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N} + \sum_{n=M}^{N-1} \frac{(a_{n+1}-a_M)[(n+1)^2\ln^2(n+1) - n^2\ln^2 n]}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)} \\
&\leqslant \frac{a_{N+1}}{N^2\ln^2 N} + C\sum_{n=M}^{N-1} \frac{n\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)} a_{n+1} \\
&\leqslant \frac{(N+1)^2\ln(N+1)}{N^2\ln^2 N} + C\sum_{n=M}^{N-1} \frac{1}{n\ln(n+1)} \\
&= \frac{2}{\ln N} + C\int_M^N \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \frac{2}{\ln\lceil e^A\rceil} + C\ln\frac{\lceil e^A\rceil}{\lfloor e^{A/2}\rfloor} < C\ln 2 + 1.
\end{aligned}$$

这里 $M=\lfloor e^{A/2}\rfloor, N=\lceil e^A\rceil, C$ 是某个无关的正常数, 因此我们有

$$\sum_{\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^{A}\rceil} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} \geq \frac{\ln^2 2}{C\ln 2+1}$$

对任意充分大的 A 都成立, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散, 证毕. □

一个漂亮的积分公式

定理 0.2 Glasser's Master Thorem

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 以及 α 都是实数,$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是正实数, 则函数

$$\varphi(x) = x - \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x - a_k}$$

保持 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度. 特别的, 对任意 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格可积函数 f 有

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明:** 令 $I_k = (a_k, a_{k=1}), k = 0, 1, \cdots, n$, 其中 $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$, 则简单的计算可得在 $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ 内都有 $\varphi'(x) > 0$, 进一步有

$$\varphi(x) \to +\infty,\ \ x \to a_k^-,\ \ k = 1, \cdots, n+1$$

以及

$$\varphi(x) \to -\infty,\ \ x \to a_k^+,\ \ k = 0, \cdots, n$$

因此这意味着对每个 $k = 0, \cdots, n$,φ 是从 I_k 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 设 $\psi_k : I_k \to \mathbb{R}$ 是 φ 限制在 I_k 上的反函数, 即 $\varphi \circ \psi_k = \mathrm{id}$. 则对每个 $y \in \mathbb{R}$, 方程 $\varphi(x) = y$ 刚好有 $n+1$ 个零点 $\psi_0(y), \cdots, \psi_n(y)$. 在方程 $\varphi(x) = y$ 两边同时乘以 $(x - a_1)\cdots(x - a_n)$ 得

$$(x - \alpha - y)(x - a_1)\cdots(x - a_n) + g(x) = 0.$$

其中 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 因此整个式子左边是一个 $n+1$ 次多项式, 而且它刚好等于 $(x - \psi_0(y))\cdots(x - \psi_n(y))$, 于是比较 x 的 n 次方的系数得

$$y + \alpha + a_1 + \cdots + a_n = \psi_0(y) + \cdots + \psi_n(y).$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{I_k} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\psi_k'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

线性代数里面的摄动法

所谓摄动法, 也叫做微扰法. 我们在线性代数里面有关于乘积的伴随矩阵公式 $(AB)^* = B^*A^*$, 也就是所谓的穿脱原理. 但一般书上给的证明就是假定 A, B 可逆, 于是

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |AB|B^{-1}A^{-1} = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*.$$

但实际上更常见的情形是 A, B 可能不可逆的时候, 这种情况下, 就需要用到这里的摄动法. 令

$$A_\lambda = A + \lambda E, \quad B_\lambda = B + \lambda E,$$

如果 A, B 都是 n 阶矩阵, 那么满足 $|A_\lambda| = 0$ 或者 $|B_\lambda| = 0$ 的 λ 的值最多只有 $2n$ 个, 那么除此之外的所有 λ, 均有 $|A_\lambda| \neq 0, |B_\lambda| \neq 0$, 也就是此时的 A_λ, B_λ 是可逆的, 因此有

$$(A_\lambda B_\lambda)^* = B_\lambda^* A_\lambda^*.$$

如果我们令

$$(A_\lambda B_\lambda)^* = \big(c_{ij}(\lambda)\big), \quad B_\lambda^* A_\lambda^* = \big(d_{ij}\big),$$

那么只要 A_λ, B_λ 可逆, 就有 $c_{ij}(\lambda) = d_{ij}(\lambda)$. 注意到 $c_{ij}(\lambda)$ 和 $d_{ij}(\lambda)$ 都是 λ 的多项式, 但是 $c_{ij}(\lambda) = d_{ij}(\lambda)$ 对无穷个 λ 都成立, 因此这两个多项式是恒等的, 那么对 $\lambda = 0$ 当然也相等, 也就是 $(AB)^* = B^*A^*$ 得证.

看一道很常见的例题: 对任意 n 阶矩阵 A, 证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证明. 首先假定 A 可逆, $|A| \neq 0$, 注意到 $AA^* = |A|E$, 且 $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$, 那么比对两个式子可知 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

那么当 A 不可逆时, 考虑 $A_\lambda = A + \lambda E$, 则对无穷多个 λ 都有 $(A_\lambda^*)^* = |A_\lambda|^{n-1}A$. 同样地, 我们记

$$(A_\lambda^*)^* = \big(a_{ij}(\lambda)\big), \quad |A_\lambda|^{n-1}A = \big(b_{ij}(\lambda)\big),$$

那么 $a_{ij}(\lambda), b_{ij}(\lambda)$ 都是 λ 的多项式, 但是它们对无穷多个 λ 都相等, 说明 $a_{ij}(\lambda) \equiv b_{ij}(\lambda)$, 因此特别地, $\lambda = 0$ 也相等, 这就证明了结论. ☆

作为一个有难度的思考题, 请读者自行证明结论: 如果 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 且 $AC = CA$, 那么

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

两道所谓的“考研题”

不得不说, 市面上一些考研的老师喜欢去抄一些数学竞赛的题, 甚至是数学分析的题, 放在考研题里. 然而往往弄巧成拙, 自己都没有搞清楚数学分析的原理, 却拿来坑害考研的学生. 下面的两道题是出现在某些考研书籍上的题, 然而其解答却是胡乱误导学生.

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 求 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

先写一下那些考研书上的解答: 积分的收敛性我们不浪费时间, 直接贴出他们的计算

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\quad(t=1-x)\\&=\boxed{-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t}=\boxed{-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

这个解答看似完美, 一气呵成, 实则是坑爹至极. 这里画框的两个式子是没有理由直接说明它们相等的, 这里交换了级数和积分的次序, 它是需要前提的, 数学分析里面是需要满足级数的一致收敛性的. 然而幂级数只是在收敛域上内闭一致收敛, 这里的幂级数显然在 $(0,1)$ 内不是一致收敛的, 因为端点 1 处直接发散, 所以这里就是大坑. 直接这么含糊其辞地蒙过去, 是不是太扯了, 虽然可以借助单调收敛定理, 虽然也可以 $\mathrm{Li}_2(1)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 但是这不是该出现在考研里面的东西.

我们举个例子来说明这种随意交换积分和级数次序的问题:

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n(n+1)x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\text{ 发散.}$$

本来先求和再积分是正常的结果, 但是先积分再求和就发散了, 因为不满足可交换的条件. 再看一个一些考研书上的另一个题

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(\mathrm{e}^{\pi/x}-1)}&=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{\pi t}-1}\mathrm{d}t\quad(t=1/x)\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi t}\frac{t}{1-\mathrm{e}^{-\pi t}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boxed{\int_0^{+\infty} t \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi t}\,\mathrm{d}t} \\
&= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-n\pi t}\,\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Ok, 一样的问题, 画框框的两个式子是没有理由直接相等的. 我们只说明一下那个级数不是一致收敛的, 用一下 Cauchy 收敛准则, 对固定的 n, 取 $t = 1/n$, 那么

$$
\sum_{k=n}^{2n} t\mathrm{e}^{-kt} > \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}.
$$

那么实际上这样的题目放在考研里面应该如何做呢, 我们仅以第一题为例: 注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1^-} -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1^-} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

最后一步极限与求和的交换则可以根据 Abel 第二定理, 或者 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上的一致收敛性.

解决 qq 群一道级数题

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{\frac{2}{3}}}$ 的敛散性.

这道题说是某个考研题, 大概是手残抄错了, 分母本来应该是 $n^{\frac{3}{2}}$, 结果变成了 $n^{\frac{2}{3}}$, 但是难度就完全不同了. 我不解决的话, 怕这题又要成各个 qq 群的日经题了.

首先这题不满足任意判别法, 包括 A-D 判别法也不满足, 我们只能纯定义出发, 考虑级数的部分和.

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\sin\sqrt{k}}{k^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\sqrt{2k}}{(2k)^{\frac{2}{3}}} - \frac{\sin\sqrt{2k-1}}{(2k-1)^{\frac{2}{3}}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k}-(2k)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k-1}}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\left(\sin\sqrt{2k}-\sin\sqrt{2k-1}\right)-\sin\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&\triangleq \sum_{k=1}^{n}a_k.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\left|\sin\sqrt{2k}-\sin\sqrt{2k-1}\right| &< \left|\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{2k-1}}. \\
\left|\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right| &< (2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}} < 1
\end{aligned}$$

于是

$$|a_k| < \frac{1}{2\sqrt{2k}\,(2k-1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}}$$

这说明 S_{2n} 收敛于 S. 而 $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\sin\sqrt{2n+1}}{(2n+1)^{\frac{2}{3}}} \to S + 0 = S$, 因此 S_n 收敛于 S, 原级数收敛.

美国数学月刊征解题 12194 解答

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n-\ln(n)-\gamma-\frac{1}{2n}\right)$$

其中 $H_n=\sum_{k=1}^{n}1/k$, 而 γ 是 Euler 常数.

这道题是最新一期美国数学月刊征解题, 至于解答的话, 我已经提交了官网. 我们来计算这个级数的部分和

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(H_n-\ln(n)-\gamma-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{n=1}^{N}\ln(n)-N\gamma-\frac{1}{2}H_N\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{k}-\ln(N!)-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{N-k+1}{k}-\ln(N!)-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
&= (N+1)H_N-N-\ln(N!)-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
&= (N+1)\big(\ln(N)+\gamma+1/(2N)+O(1/N^2)\big)-N\\
&\quad -\left(\frac{1}{2}\ln(2\pi)+(N+1/2)\ln(N)-N+O(1/N)\right)\\
&\quad -N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
&= (N+1)\ln(N)+(N+1)\gamma+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}+O(1/N)-N\\
&\quad -\frac{1}{2}\ln(2\pi)-(N+1/2)\ln(N)+N-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
&= \frac{1+\gamma-\ln(2\pi)}{2}+O(1/N)
\end{aligned}$$

其中我们已经利用了调和级数的部分和渐近展开与 Stirling 公式: 当 $N\to\infty$,

$$H_N=\ln(N)+\gamma+\frac{1}{2N}+O(1/N^2),$$

$$\ln(N!)=\frac{1}{2}\ln(2\pi)+(N+1/2)\ln(N)-N+O(1/N).$$

那么令 $N \to \infty$, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1+\gamma-\ln(2\pi)}{2}.$$

从一个矩阵求逆问题说起

最近暑期上课期间碰到一道题如下: 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $E - BA$ 可逆, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 证明: 矩阵 $E - AB$ 可逆, 并求其逆矩阵.

老实说的话, 这道题这么出, 对于考研的同学来说太难了. 在一般的考研书籍中的话会假定 $E - BA$ 可逆, 然后证明 $E - AB$ 的逆等于 $E + A(E - BA)^{-1}B$.

这道题的难度可就比上面的简单的多了, 我们只需验证两个矩阵的乘积等于单位矩阵即可.

$$\begin{aligned}
&(E-AB)[E + A(E-BA)^{-1}B]\\
={}& E - AB + A(E-BA)^{-1}B - ABA(E-BA)^{-1}B\\
={}& E - AB + A(E-BA)(E-BA)^{-1}B\\
={}& E - AB + AB = E.
\end{aligned}$$

那么让大家硬求这个矩阵的逆可就难了, 比较常规的方法就是利用分块矩阵的初等变换. 不过这也是一个非常麻烦的方法, 详细解答可以参见李尚志线性代数一书 227 页的例 3, 这里不作介绍. 有一点是, 如果我们知道这个矩阵的逆, 那么就可以刻意地去构造出它的逆来.

$$(E-BA)B = B - BAB = B(E-AB) \Rightarrow B = (E-BA)^{-1}B(E-AB)$$

$$\begin{aligned}
E &= E - AB + AB = E - AB + A(E-BA)^{-1}B(E-AB)\\
&= [E + A(E-BA)^{-1}B](E-AB)
\end{aligned},$$

因此 $E - AB$ 可逆, 且 $E + A(E-BA)^{-1}B$ 就是它的逆.

但是要猜出这个矩阵的逆, 应该不是件容易的事, 这里我们要讲的方法则是矩阵级数法. 利用泰勒公式

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

将 1 换为 E, 将 x 换成 AB, 就能得到

$$(E-AB)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(AB)^n = E + \sum_{n=1}^{\infty}(AB)^n$$

$$= E + \sum_{n=1}^{\infty} A(BA)^{n-1}B = E + A\sum_{n=1}^{\infty}(BA)^{n-1}B$$
$$= E + A(E - BA)^{-1}B.$$

当然, 矩阵级数其实也涉及到收敛半径的问题, 需要用一点摄动法或许更严格. 但是这个方法可以很快求出矩阵的逆, 然后再去验证就可以了. 而且事实上上述等式对任意 $A_{m\times n}$ 和 $B_{n\times m}$ 都是成立的, 不需要方阵.

在 2019 年 8 月 23 日的推文中我们也讲过矩阵 AB 与 BA 的基本关系, 它们具有完全相同的非零特征值及其重数, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, 对任意实数 λ, 有行列式的降阶公式:

$$\lambda^n|\lambda E_m - A_{m\times n}B_{n\times m}| = \lambda^m|\lambda E_n - B_{n\times m}A_{m\times n}|$$

上述公式称为行列式的降阶公式.

最后, 原来的求逆公式的一个基本应用就是可以推出 Sherman-Morrison 公式: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, $u, v \in \mathbb{R}^n$ 为列向量, 则 $A + uv^{\mathrm{T}}$ 当且仅当 $1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u \neq 0$ 时, 且此时有

$$(A + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}A^{-1}u}.$$

证明就留给读者自己完成了.

从一道题谈切比雪夫多项式

昨天在某数学考研群有一位同学问了如下一道问题：在区间 $[1,3]$ 上用直线 $ax+b$ 来拟合 x^2,使得偏差 $\max\limits_{x\in[1,3]}|x^2-(ax+b)|$ 最小.

由于答案上给了非常复杂的拉格朗日乘数法，这位同学想寻求简单做法. 其实如果高中学过数学竞赛的话，应该可以知道这题就是切比雪夫多项式的问题. 我们先来解答这题：

解 令 $f(x) = x^2 - (ax+b), M = \max|f(x)|$,那么

$$M \geqslant |f(1)|, |f(2)|, |f(3)|.$$

于是

$$4M \geqslant |f(1)| + 2|f(2)| + |f(3)| \geqslant |f(1) - 2f(2) + f(3)|$$
$$= |1 - (a+b) - 2[4 - (2a+b)] + 9 - (3a+b)| = 2,$$

即 $M \geqslant \dfrac{1}{2}$, 且等号在 $f(1) = f(3) = -f(2) = \dfrac{1}{2}$ 时取得,此时 $a = 4, b = -\dfrac{7}{2}$.

这个做法似乎有点巧合? 自然不是,这是切比雪夫多项式的必然结果:

定理 6. 对 $n \geqslant 1$, 在所有次数为 n 的首一多项式中, $f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 是使得 $|f(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值取最小的多项式, 并且此时 $|f(x)|$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, 且在 $n+1$ 个值 $x = \cos\dfrac{k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n$ 处取到这个值. 其中 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 为第一类切比雪夫多项式, 满足 $T_n(\cos x) = \cos(nx)$, 是 $\cos x$ 的一个 n 次多项式, 且首项系数为 2^{n-1}.

证明. 假定 $w_n(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的一个首一的 n 次多项式, 且 $|w_n(x)|$ 的最大值小于 $1/2^{n-1}$, 令

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - w_n(x).$$

由于在 $T_n(x)$ 的极值点处, 我们均有

$$|w_n(x)| < \left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right|$$

$$\begin{cases} f_n(x) > 0, & x = \cos\dfrac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant 2k \leqslant n \\ f_n(x) < 0, & x = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n}, 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n. \end{cases}$$

那么由零点定理可知 $f_n(x)$ 至少有 n 个根, 但是 $f_n(x)$ 的次数不超过 $n-1$, 那么由代数学基本定理, $f_n(x)$ 必然恒为 0, 矛盾. 这就证明了切比雪夫多项式的极小性, 那么回到原题的话, 不过是 $n = 2$ 的情形下, 将区间作了一个平移, $x = 1,2,3$ 是三个最值点, 然后解法就自然而然了. ☆

两道微分中值定理的证明

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 且

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明: 存在两个不同的 $\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

证明. 令

$$F(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\ t \in [0,\pi],$$

那么由条件有 $F(0)=F(\pi)=0$. 进一步利用分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}[F(x)]\\ &= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= F(\xi)\sin\xi = 0,\end{aligned}$$

倒数第二步我们用到了积分中值定理, 其中 $\xi\in(0,\pi)$, 于是 $\sin\xi\neq 0, F(\xi)=0$. 那么由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$,使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$ ☆

这道题的话是一道比较老的考研题了, 还有一道与它很类似的题, 但是证明方法没有这么直接:

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,在 $(0,\pi)$ 内可导,且

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明:存在两个不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$,使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证明. 首先由 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0$, 利用积分中值定理, 存在 $x_0\in(0,\pi)$ 使得 $f(x_0)=0$. 接下来我们用反证法,假定 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有一个零点 x_0,则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 (x_0,π) 内都是不变号的,且这两部分是异号的. 那么 $f(x)\sin(x-x_0)$ 就在 $(0,\pi)$ 内不变号, 于是

$$\begin{aligned}0 &\neq \int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi}[f(x)\sin x\cos x_0 - f(x)\cos x\sin x_0]\,\mathrm{d}x\\ &= \cos x_0\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x - \sin x_0\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= 0,\end{aligned}$$

矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上必定还有零点. 即至少存在两个不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. ☆

组合积分法一题

最近一到积分题问的挺多:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

解 利用积分公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$,我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}(\sin x-\cos x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+\frac{1}{2}(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \quad (t=\sin x-\cos x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+\frac{1}{2}(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{1+\frac{1}{2}\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

当然, 我们的目的不只是这个定积分了, 这题源于组合积分, 就是 $\sin x+\cos x, \sin x-\cos x$ 与 $\sin x\cos x$ 的三角关系, 因此这题是可以求出其不定积分的.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-\cos x)\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\sin x \cos x}}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}(\sin x+\cos x)
\end{aligned}$$

接下来大家就应该知道怎么做了,不过由于答案比较惊骇,我就不写下去了.

美国数学月刊征解题 12206 解答

这道题是美国数学月刊 10 月份的征解题,解答已经提交了官网.

3. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{2n}}{n^2} = \frac{3}{4}\zeta(3)$$

证明 首先我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+k-1}}{k}\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k)} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right) = \frac{H_n}{n}.\end{aligned}$$

且注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}-H_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}.$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \ln(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 x^m \ln^2 x\mathrm{d}x = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^3} \\ &= 2\zeta(3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{n^2} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{2n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x \\ &= -2\int_0^1 \ln(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1-x^2)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)+\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= 4\zeta(3) + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

要求出最后的积分,我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x &= \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^m x^m \ln^2 x\mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+1)^3} = 2\cdot\frac{3}{4}\zeta(3) = \frac{3}{2}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

令

$$
A = \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x,
$$

则

$$
\begin{aligned}
A + 2\zeta(3) + 2B &= \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x^2)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x \quad (x^2 \mapsto x) \\
&= \zeta(3). \\
A + 2\zeta(3) - 2B &= \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2\frac{1-x}{1+x}}{x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x \quad (x \mapsto \frac{1-x}{1+x}) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

由以上两个等式我们得到

$$
A = \frac{1}{4}\zeta(3), \quad B = -\frac{5}{8}\zeta(3).
$$

最后将所有结果相加得到原题的答案

$$
4\zeta(3) - 2\cdot\frac{5}{8}\zeta(3) - 2\zeta(3) = \frac{3}{4}\zeta(3).
$$

美国数学月刊征解题 12207 解答

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x.$$

解 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[0,1]$$

则 $F(0)=0, F(1)=1$, 且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 首先我们有

$$\begin{aligned}
&n\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 x\ln(1-x)d\left[F(x^n)-1\right]\\
=&\,x\ln(1-x)[F(x^n)-1]\Big|_0^1-\int_0^1[F(x^n)-1]\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left(\int_{x^n}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\left(\ln(1-x)+1-\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中我们已经使用了洛必达法则:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-}x\ln(1-x)[F(x^n)-1]&=\lim_{x\to1^-}\ln(1-x)\int_1^{x^n}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{x\to1^-}\frac{\int_1^{x^n}f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{\ln(1-x)}}\\
&=\lim_{x\to1^-}\frac{nx^{n-1}f(x^n)}{\frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}}\\
&=\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln^2(1-x)\cdot nf(x^n)=0
\end{aligned}$$

最后一步利用了 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$.

因此原极限可约化为

$$\begin{aligned}
I&\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\left(\ln(1-x)+1-\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

由于 $|f(t)| \leqslant M$ 是有界的,且

$$\left|\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}[\ln(1-x)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^1\int_0^1[|\ln(1-x)|+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

而我们知道上式最后的积分是收敛的,所以

$$\begin{aligned}
I &= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\ln(1-t^{1/n})\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_0^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t-\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

对第一个积分,令 $t^a=u$. 则

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{a}\int_0^{a^a} f(u^{1/a})u^{1/a}\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|\\
&\leqslant M\frac{1}{a}\left|\int_0^{a^a}(a^a)^{1/a}\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|\\
&\leqslant M\left|\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|
\end{aligned}$$

最后的积分也是收敛的,于是

$$\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)=0.$$

对 $t\in[a,1]$, 我们有 $a^a\leqslant t^a\leqslant 1$. 且 $\lim\limits_{a\to 0+}a^a=1$, 这意味着 $\lim\limits_{a\to 0+}t^a=1,\forall t\in[a,1]$. 因此,

$$\begin{aligned}
I &= -\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-e^{a\ln t})\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln[-(1+o(1))a\ln t]\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0+}\int_a^1 f(t)\frac{\ln a+\ln(1+o(1))+\ln(-\ln t)}{\ln a}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t.$$

对于上式最后的积分,令 $u = -\ln t$,

$$\left|\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M\left|\int_0^1 \ln(-\ln t)\mathrm{d}t\right| = M\int_0^{\infty} e^{-u}\ln u\mathrm{d}u < \infty.$$

最后我们得到

$$\begin{aligned} I &= -\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -1. \end{aligned}$$

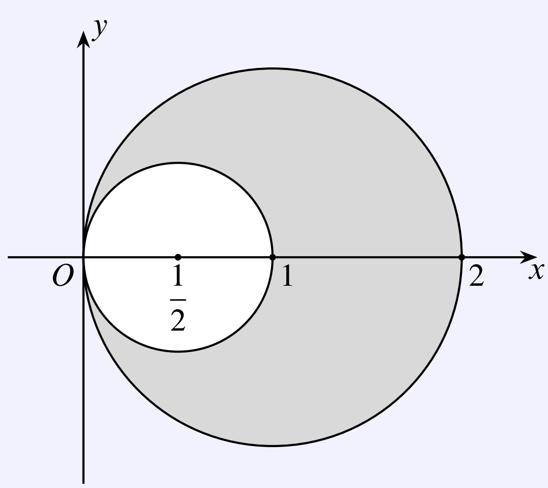
一道小有难度的二重积分

这道积分题是某考研模拟卷上的一道题,感觉题目出的还不错,也小有难度.

1. 设函数 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + y^2}{2x - x^2 - y^2}}$.

1. 求 $f(x,y)$ 得定义域 D;
2. 计算 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

解 显然定义域是 $x^2-x+y^2 \geqslant 0, 2x-x^2-y^2 > 0$ 或 $x^2-x+y^2 \leqslant 0, 2x-x^2-y^2 < 0$. 这是这几个不等式分别是两个圆的内外部分,分析可知定义域如下图:



两个圆的极坐标方程分别为 $r=\cos\theta$ 和 $r=2\cos\theta$. 于是在极坐标系下,二重积分化为

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\sqrt{\frac{r^2-r\cos\theta}{2r\cos\theta-r^2}}r\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\sqrt{\frac{r-\cos\theta}{2\cos\theta-r}}r\mathrm{d}r$$

令 $a=\cos\theta, b=2\cos\theta$, 注意到 $r-a+b-r=b-a=a$, 于是可令 $r-a=a\sin^2 t, b-r=a\cos^2 t$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b r\sqrt{\frac{r-a}{b-r}}\mathrm{d}r&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+a\sin^2 t)\frac{\sin t}{\cos t}\cdot 2a\sin t\cos t\mathrm{d}t\\&=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+\sin^4 t)\mathrm{d}t\\&=\frac{7\pi}{8}a^2=\frac{7\pi}{8}\cos^2\theta.\end{aligned}$$

于是

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7\pi}{8}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{7}{16}\pi^2.$$

美国数学月刊征解题 12215 解答

2. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+4)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right).$$

解 首先我们有

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+4)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{2(2n-1)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}-\frac{1}{2(2n)}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}\right).\end{aligned}$$

令

$$a_n=1, b_n=\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}.$$

利用 Abel 分部求和公式,其部分和为

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}\right)\\
&= Nb_N+\sum_{n=1}^{N-1}n(b_n-b_{n+1})\\
&= N\left(\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2N-1)}-\frac{1}{2(2N)}\right)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{N-1}n\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}-\frac{1}{4n^2-1}-\frac{1}{4n(n+1)}\right)\\
&= N\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{N}{2(2N-1)}-\frac{1}{4}\\
&\quad+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{2n}{(2n-1)^2(2n+1)}+\frac{1}{4n(n+1)}\right)\\
&= N\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{N}{2(2N-1)}-\frac{1}{4}\\
&\quad+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$,我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left(N\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{N}{2(2N-1)}\right) &= \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{N}}-\frac{1}{4}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{(2N-1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^2}}{\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}}-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

其中我们已经用了 Stolz 定理.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{8}.$$

将以上所有结果结合起来,得到最后的答案为

$$S=\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}.$$

解答一道颇有难度的极限题

知乎上有人私信了我一道极限题,相当的有难度,我思考了一段时间才做出来. 题目如下:

$$\lim_{x\to1^-}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}$$

首先温馨提示一下,这不是考研题,请不要乱传.

解 首先注意到

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}&=\left(\frac{1+x}{1+x^0}\right)^{x^0}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{x^1}\left(\frac{1+x^3}{1+x^2}\right)^{x^2}\cdots\\&=\frac{1}{2}(1+x)^{1-x}\left(1+x^2\right)^{x-x^2}\left(1+x^3\right)^{x^2-x^3}\cdots\\&=\frac{1}{2}(1+x)^{1-x}\left(1+x^2\right)^{x-x^2}\left(1+x^3\right)^{x^2-x^3}\cdots\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln(1+x^n)}.\end{aligned}$$

接下来就只需计算极限

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln\left(1+x^n\right).$$

利用带拉格朗日余项的泰勒公式,当 $0<x<1$ 时,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}},0<\xi<x.$$

由此可知,当 $0<x<1$ 时,对任意正整数 m,有

$$\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k<\ln(1+x)<\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln\left(1+x^n\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{kn}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{(1+k)n-1} - x^{(1+k)n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^{(1+k)n-1} - x^{(1+k)n}}{1 - x^{1+k}}
\end{aligned}
$$

注意到由洛必达法则有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{(1+k)n-1} - x^{(1+k)n}}{1 - x^{1+k}} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{[(1+k)n-1]x^{(1+k)n-2} - (1+k)nx^{(1+k)n-1}}{-(1+k)x^k} \\
&= \frac{1}{1+k}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\varliminf_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln(1+x^n) \geqslant \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)}
$$

对任意正整数 m 都成立. 进一步,令 $m \to \infty$ 可得

$$
\varliminf_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln(1+x^n) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)} = 2\ln 2 - 1.
$$

同理有

$$
\varlimsup_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln(1+x^n) \leqslant \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)}.
$$

再令 $m \to \infty$ 得到

$$
\varlimsup_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln(1+x^n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)} = 2\ln 2 - 1.
$$

所以有

$$
\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln(1+x^n) = 2\ln 2 - 1.
$$

那么原题的答案就是 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}$.

数一数二第二题

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则下列说法中正确的是 ( )

A. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

C. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在

D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

解 这题 B 和 D 其实就是洛必达法则的逻辑顺序问题，B 选项可以直接利用 $\dfrac{?}{\infty}$ 型洛必达法则得到结果. 如果不知道这种形式的洛必达法则，由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$，那么对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，$|f'(x)|<\varepsilon$，利用柯西中值定理

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \frac{|f(x)-f(X)+f(X)|}{|x|}\\ &\leqslant \frac{|f(x)-f(X)|}{|x|}+\frac{|f(X)|}{|x|}=\frac{|f'(\xi)|}{|x|}+\frac{|f(X)|}{|x|}\end{aligned}$$

其中不等式右边的两项都是趋于 0 的. A 可以举反例 $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$，C 显然错误，取 $f(x)=\ln x$ 即可. D 可取 $f(x)=\sin x$.

数一数二数三线代选择题

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则 $m\geqslant n$

B. 如果 $r(A)=m$，则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$，则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

解 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，这个结论我在之前的公众号已经讲过了，因此 $r(\boldsymbol{A})=m\leqslant n$. A 选项错误，B 选项正确. D 选项利用克拉默法则即可，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=n$，方程组有唯一解. C 选项只需证明系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩即可，注意到下面的不等式链：

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{b})=r\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\big)\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}),$$

于是上述所有不等号都成为等号.

数一第六题

设非零的数列 a_n, b_n 满足 $\mathrm{e}^{a_n} - a_n = \mathrm{e}^{b_n}$,则下列说法中正确的是 ( )

A. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 发散

B. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 绝对收敛

C. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

D. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

解 先说正确答案选 B. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,那么 $a_n \to 0$,进一步有 $b_n \to 0$. 于是当 $n \to \infty$ 时

$$b_n \sim \mathrm{e}^{b_n} - 1 = \mathrm{e}^{a_n} - a_n - 1 \sim \frac{1}{2} a_n^2,$$

即 $|b_n/a_n| \sim |a_n/2|$,利用正项级数比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 绝对收敛. 而 A, C, D 选项,注意 a_n 不一定为正,所以比较判别法不成立.

数三第六题

设常数 $a > 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2 + an}\,\pi\right)$ 的敛散性为 ( )

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 敛散性与 a 的取值有关

解 这题答案是 D,敛散性与 a 有关. 注意到

$$\begin{aligned}
\sin\left(\sqrt{n^2 + an}\,\pi\right) &= \sin\left(\sqrt{n^2 + an}\,\pi - n\pi + n\pi\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(\sqrt{n^2 + an}\,\pi - n\pi\right) \\
&= (-1)^n \sin \frac{an\pi}{\sqrt{n^2 + an} + n}.
\end{aligned}$$

有同学认为这题的通项不趋于 0,所以发散,但是在某些情形下它是可能趋于 0,比如 a 恰好是一个偶数,这样的话级数就变成了一个交错级数,且满足莱布尼茨判别法,因而(条件)收敛. 而当 a 不是偶数时,确实发散,因此选 D.

最近天天有人问的一道题

设 $y=3\mathrm{e}^{-x}+(x-2)\mathrm{e}^{x}$ 为二阶常系数非齐次线性微分方程的特解,则该微分方程为________.

解 我不知道这道题是哪来的,大概是某个模拟卷上的. 一开始有人问我的时候,说这题是不是两个答案,我一看,他写的两个答案确实都对. 后来发现了,这题其实有无穷个答案. 原题所给的解答是通过这一个特解来判定特征根,判定齐次特解与非齐次特解分别是什么,但是问题就出在非齐次特解其实是判定不出来的,齐次方程的特征根也可能是 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 或者 $\lambda_{1,2}=1$,方程中的自由项没有给定,所以答案肯定是不唯一的. 我们用最原始的方法来求这个方程. 假定方程为 $y''+py'+qy=f(x)$,由于 $y^*=3\mathrm{e}^{-x}+(x-2)\mathrm{e}^{x}$,那么

$$y^{*\prime}=-3\mathrm{e}^{-x}+(x-1)\mathrm{e}^{x},\ y^{*\prime\prime}=3\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}.$$

于是只要取 $f(x)=y^{*\prime\prime}+py^{*\prime}+qy^*$,那么对任意 p,q,方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 都是满足题意的. 其实这题本质问题就是没有给定 $f(x)$.

一道大学数学杂志 11 月份的级数征解题

3. 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}+H_n-1}{(n+1)(n+2)},$$

其中 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 表示第 n 个调和数.

解 这道题属于级数里面比较简单的类型,这里相当于计算三个级数,其中

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)(n+2)},$$

考虑其部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{H_k}{k+1}-\frac{H_k}{k+2}\right)\\&=\left(\frac{H_1}{2}-\frac{H_1}{2}\right)+\left(\frac{H_2}{3}-\frac{H_2}{4}\right)+\left(\frac{H_3}{4}-\frac{H_3}{5}\right)+\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{H_{n-1}}{n}-\frac{H_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{H_n}{n+1}-\frac{H_n}{n+2}\right)\\
&=\frac{H_1}{2}+\frac{H_2-H_1}{3}+\frac{H_3-H_2}{4}+\frac{H_4-H_3}{5}+\cdot+\frac{H_n-H_{n-1}}{n+1}-\frac{H_n}{n+2}\\
&=\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3}+\frac{1}{5\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}-\frac{H_n}{n+2}\\
&=1-\frac{1}{n+1}-\frac{H_n}{n+2}.
\end{aligned}
$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$, 即 $S_2=1$.（这个级数的求法来自陈兆斗的大学生数学竞赛精讲,不过更简单的做法是 Abel 求和公式,读者可以自行完成.）

$$
\begin{aligned}
S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{(n+1)(n+2)}&=S_2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+n)^2}-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}\right)\\
&=1+\zeta(2)-1-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

因此最后的和为 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

同期的征解题中有一道题我尝试了很久没有做出来,题目如下:设 $\alpha>1$ 是一个固定的实数,令 $M(x)=\max\{m\in\mathbb{N}:m!\leqslant\alpha^x\}$,证明

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{M(1)M(2)\cdots M(n)}}{M(n)}=\mathrm{e}^{-1}.
$$

希望有读者可以提供一个解答.

从一道线代考研题谈起

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,对任意向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+x_n^2$,则

A. $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{B}|$ B. $|\boldsymbol{A}|<|\boldsymbol{B}|$ C. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ D. 无法确定

解 这题还是有点小意思的. 注意到题目中的等式等价于

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,1\})\boldsymbol{x},
$$

于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,1\}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,那么 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+1 \end{pmatrix}.$$

按照最后一行将行列式拆开成两部分,可知

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+A_{nn}>|\boldsymbol{A}|,$$

其中 A_{nn} 是 a_{nn} 对应的代数余子式,也就是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 阶顺序主子式.
当然我们要处理不只这一个问题,我们要证明一个更一般的问题.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 正定,$\boldsymbol{B}$ 是非零的半正定矩阵,那么 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{A}|$.

证明 我们先给出一个结论:如果设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 正定,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以同时合同对角化.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,它合同于 $\boldsymbol{E}_n$,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_n$,此时 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 仍然为对称矩阵,于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}_1$ 为对角阵. 且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_n$. 取 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$ 都是对角阵. ☆

根据上面的结论,在 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{A}|$ 的两边左乘 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{R}$,等价于

$$|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\Lambda}_1|>|\boldsymbol{E}_n|,$$

由于 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 半正定,这是显然成立的.

除了这个证法,$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{A}|$ 还可以等价于 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|>1$. 我们考虑矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的任意特征值 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$,那么 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,于是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,由于 $\boldsymbol{A}$ 正定而 $\boldsymbol{B}$ 半正定,则 $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}\geqslant 0$,且至少有一个特征值为正,因此 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|>1$.

在这个证明过程中,我们还得到了一个基本结论,如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定的对称矩阵,那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的特征值均为正数,进一步,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定等价于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

2021 考研数学一第 18 题解答

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$,求曲线 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

解 点 (x,y,z) 到 xOy 坐标面的距离就是 $|z|$,所以只需求 z 的取值范围即可,由题中的形式很容易想到用柯西不等式. 根据条件可得

$$\begin{cases}x^2+2y^2=6+z\\4x+2y=30-z\end{cases},$$

那么由 $(16+2)(x^2+2y^2)\geqslant(4x+2y)^2$ 可得

$$18(6+z)\geqslant(30-z)^2,$$

解得 $12\leqslant z\leqslant 66$,且取等条件为 $\dfrac{x^2}{16}=\dfrac{2y^2}{2}$,当 $x=-8,y=-2$ 时,$z=66$,因此所求的最大距离 $(-8,-2,66)$ 到 xOy 面的距离,最大值为 66.

一道硬核的 Watson 积分

最近在八一分公众号发了这样一道积分征解题

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x-y)}{3-\cos(x)-\cos(y)-\cos(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)\pi}{3}.$$

非常硬核的一道 Watson 型积分, 我算了好久, 几次都算不下去了, 计算量实在太大,不过总算给算出来了.

解 首先作换元 $\dfrac{x+y}{2}=u,\dfrac{x-y}{2}=v$,即 $x=u+v,y=u-v$,那么 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=2$,积分区域变成正方形 $-\pi\leqslant u\pm v\leqslant\pi$,于是

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x-y)}{3-2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-\cos(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_{-\pi\leqslant u\pm v\leqslant\pi}\frac{1-\cos(2v)}{3-\cos 2u-2\cos(u)\cos(v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=8\iint_{-\leqslant u+v\leqslant\pi}\frac{1-\cos(2v)}{3-\cos 2u-2\cos(u)\cos(v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=8\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-u}\frac{1-\cos(2v)}{3-\cos 2u-2\cos(u)\cos(v)}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

我们先来计算内层的积分，为方便，令 $b=3-\cos(2u)=4-2\cos^2 u, a=2\cos u$，作万能代换 $t=\tan\frac{v}{2}$，那么

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi-u}\frac{1-\cos(2v)}{3-\cos 2u-2\cos(u)\cos(v)}\mathrm{d}v\\
&= \int_0^{\tan\frac{\pi-u}{2}}\frac{2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{b-a\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&= 16\int_0^{\cot\frac{u}{2}}\frac{t^2}{\big((b+a)+(b-a)t^2\big)(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\
&= 16\int_0^{\cot\frac{u}{2}}\left(-\frac{1}{2a}\frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{b+a}{4a^2(1+x^2)}-\frac{b^2-a^2}{4a^2\big((b+a)+(b-a)t^2\big)}\right)\mathrm{d}t\\
&= 16\left(-\frac{t}{4a(1+t^2)}+\frac{b}{4a^2}\arctan t-\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{4a^2}\arctan\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}t\right)\Bigg|_0^{\cot\frac{u}{2}}\\
&= -\frac{2}{\cos u}\frac{\cot\frac{u}{2}}{\csc^2\frac{u}{2}}+\frac{4-2\cos^2 u}{\cos^2 u}\arctan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}\right)\\
&\quad -\frac{\sqrt{(4-2\cos^2 u)^2-4\cos^2 u}}{\cos^2 u}\arctan\left(\sqrt{\frac{4-2\cos^2 u+2\cos u}{4-2\cos^2 u-2\cos u}}\cot\frac{u}{2}\right)\\
&= -\tan u+\frac{2-\cos^2 u}{\cos^2 u}(\pi-u)-\frac{2\sin u\sqrt{4-\cos^2 u}}{\cos^2 u}\arctan\sqrt{\frac{2+\cos u}{2-\cos u}}.
\end{aligned}
$$

最后再来算外层积分，

$$
\begin{aligned}
I &= 8\int_0^{\pi}\left(-\tan u+\frac{2-\cos^2 u}{\cos^2 u}(\pi-u)-\frac{2\sin u\sqrt{4-\cos^2 u}}{\cos^2 u}\arctan\sqrt{\frac{2+\cos u}{2-\cos u}}\right)\mathrm{d}u\\
&= 8\Bigg(-\ln(\cos u)-\pi u+\frac{u^2}{2}+2\pi\tan u-2u\tan u+\frac{\pi}{2}\arccos\frac{\cos u}{2}\\
&\quad +\frac{1}{2}\arccos^2\frac{\cos u}{2}-\ln\frac{\cos u}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{4-\cos^2 u}{\cos u}-\frac{\pi\sqrt{4-\cos^2 u}}{2\cos u}\arccos\frac{\cos u}{2}\Bigg)\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

其中内层积分的前两部分原函数是很容易求出的，第三部分只需要作两次换元，先令 $y=\sin u$，再令 $y=2\cos z$ 即可.

美国数学月刊征解题 12241

最新一期的美国数学月刊征解题又来了,12241 这道题是一道级数的计算题,不算难,解答的话我就不提交了.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{4n}-\ln 2+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)=\frac{\ln 2-1}{8}.$$

解 首先注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{4n}-\ln 2+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{4n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{4n}-\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4k(k+1)}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^n}{2k(2k+1)(2k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1+2(-1)^k k}{8k(2k+1)(2k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{8k(2k+1)(2k+2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4(2k+1)(2k+2)}\\&=\frac{\ln 2-1}{8}.\end{aligned}$$

其中最后的两个级数是基本问题了,直接裂项即可.

解答一道知乎上的复杂二重积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{(1-x\sin^2 y)^{1/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8(\ln 2-1).$$

解 首先作换元 $x=\sin^2\varphi, y=\theta$,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\ln(1-\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-(\sin\varphi\sin\theta)^2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\ln(\cos\varphi)}{\sqrt{1-(\sin\varphi\sin\theta)^2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=4\iint_\Sigma\frac{z\ln z}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的部分. 我们利用投影法来计算这个曲面积分, 设这个曲面在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}I&=4\iint_D\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}\ln\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_D\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\ln(1-y^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\frac{\sqrt{1-y^2}\ln(1-y^2)+2(\ln 2-1)\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\ln(1-y^2)\mathrm{d}y+4(\ln 2-1)\\&=8(\ln 2-1).\end{aligned}$$

用同样的方法,我们还可以求出

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x\sin^2 y)^{1/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint_\Sigma \frac{z\ln(1-z^2)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}S\\ &= 2\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^1 \frac{2y\arccos y-2\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\ &= 2\pi-8.\end{aligned}$$

解答一道数列渐近分析问题

2. 已知数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $a_1 \geqslant 0, a_{n+1} = a_n + \ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right)$,求证:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$;
2. 如果 $a_n \neq 0$,则 $a_n \sim \frac{2n}{\ln n} (n \to \infty)$.

解 我们直接假定 $a_1 > 0$ 即可,则显然 a_n 是严格单调递增的. 注意到

$$a_{n+1} = a_n + \ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right) < a_n + \frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{n}a_n,$$

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$,这说明数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是单调递减且有下界 0 的,于是它是收敛的,设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a$. 那么由 Stolz 定理得

$$a = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right) = \ln(1+a),$$

由此可得 $a = 0$.
令 $b_n = \frac{a_n}{n} \to 0$,显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$. 原递推式变为

$$(n+1)b_{n+1} - nb_n = \ln(1+b_n),$$

由此得到

$$(n+1)(b_n - b_{n+1}) = b_n - \ln(1+b_n) \sim \frac{1}{2}b_n^2,$$

再由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n \ln n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b_nb_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_n^2}{n\frac{1}{2}b_n^2} = 2,\end{aligned}$$

即 $a_n \sim \frac{2n}{\ln n}$.

从一道复杂的求导问题说起

在李永乐老师的 660 题中有一道导数计算题如下:

3. $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

首先的话,需要澄清一下,这道题放在考研数学里面就是有点为难人了,它来自于陈兆斗所编著的大学生数学竞赛习题精讲(例题和课后习题都有). 难度的话,确实是不适合考研学生的,不过自从某人把陈的书抄完了以后,这道题自然也是不能幸免地变成了“考研题”.

首先,我们来说说陈兆斗书上的原题,是将 $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 展开为麦克劳林级数. 当然,其实跟这里的求导是一回事了.

解 注意到

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}f(x).$$

于是得到微分方程 $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$,方程两边求 n 阶导数可得

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-2nxf^{(n)}(x)-n(n-1)f^{(n-1)}(x)-\left(xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)\right)=0.$$

令 $x=0$,得到 $f^{(n+1)}(0)=n^2f^{(n-1)}(0)$. 其偶数阶导数均为 0,奇数阶导数为

$$f^{(2n+1)}(0)=(2n)^2f^{(2n-1)}(0)=\cdots=[(2n)!!]^2f'(0)=4^n(n!)^2.$$

由此可得 $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的麦克劳林级数为

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

对上式逐项积分以后还能得到 $\arcsin^2 x$ 的麦克劳林级数

$$\arcsin^2 x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

当然,我们要解决的问题不只是如此,现在考虑一个反过来的问题,求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

的和函数.

解 首先,和函数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\
&= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7 + \cdots,
\end{aligned}
$$

显然其收敛半径为 1,在收敛区间 $(-1,1)$ 内,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + x\left(2x + \frac{2}{3}\cdot 4x^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6x^5 + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^6 + \cdots\right) \\
&= 1 + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(xf(x)\big) = 1 + xf(x) + x^2 f'(x).
\end{aligned}
$$

得到微分方程的初值问题

$$
f'(x) - \frac{x}{1-x^2} f(x) = \frac{1}{1-x^2},\ f(0) = 0,
$$

这是一个一阶线性微分方程,解得 $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$. 由 $f(0) = 0$ 可得 $C = 0$,于是 $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

以上做法是选自陈兆斗的书. 当然,这题其实跟 2020 年考研数学一的级数题很接近,所以,还可以直接这么做

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \sin^{2n+1} t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin t}{1 - x^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1.
\end{aligned}
$$

一道伪装在线性代数下的高数题

4. 设 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 是一个 $n\times n$ 方阵,其中每个元素都是变量 t 在 $(-1,1)$ 内的可微函数,且 $A(0)=I_n$ 为 n 阶单位阵. 若 $A(t)$ 的行列式 $\det(A(t))$ 恒为常数,证明:由每个元素对 t 求导得到的矩阵 $A'(t)=(a'_{ij}(t))$ 在 $t=0$ 处满足:$A'(0)$ 的迹为 0.

证明. 设 $A(t)$ 的特征值为 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$,那么根据条件可知

$$\det(A(t))=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\cdots\lambda_n(t)=\det(A(0))=\det I_n=1.$$

取对数可得 $\ln\lambda_1(t)+\ln\lambda_2(t)+\cdots+\ln\lambda_n(t)=0$,求导可得

$$\frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)}+\frac{\lambda_2'(t)}{\lambda_2(t)}+\cdots+\frac{\lambda_n'(t)}{\lambda_n(t)}=0.$$

注意到 $t=0$ 时, $A(0)=I_n$, 所以 $\lambda_1(0)=\lambda_2(0)=\cdots=\lambda_n(0)=1$, 所以得到 $\lambda_1'(0)+\lambda_2'(0)+\cdots+\lambda_n'(0)=0$. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A'(0))&=\operatorname{tr}\left(\lim_{t\to0}\frac{A(t)-A(0)}{t}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\operatorname{tr}(A(t))-\operatorname{tr}(A(0))}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\cdots+\lambda_n(t)-n}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\lambda_1(t)-1}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\lambda_2(t)-1}{t}+\cdots+\lim_{t\to0}\frac{\lambda_n(t)-1}{t}\\&=\lambda_1'(0)+\lambda_2'(0)+\cdots+\lambda_n'(0)=0.\end{aligned}$$

☆

三道非常难的数列极限题

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\arctan\frac{n(x-k)}{kx+n^2}\mathrm{d}x\right).$$

解 利用反正切恒等式

$$\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan x-\arctan y, xy>-1,$$

我们有

$$\arctan\frac{n(x-k)}{kx+n^2}=\arctan\frac{\frac{x}{n}-\frac{k}{n}}{1+\frac{x}{n}\frac{k}{n}}=\arctan\frac{x}{n}-\arctan\frac{k}{n}.$$

于是利用拉格朗日中值定理可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\arctan\frac{n(x-k)}{kx+n^2}\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(\arctan\frac{x}{n}-\arctan\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{1+\xi_k^2}\frac{x-k}{n}\mathrm{d}x\\ &\sim \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2}\int_{k-1}^{k}\frac{x-k}{n}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2}\\ &\to -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in [k-1,k]$,我们已经省略了夹逼准则的过程.

设数列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 满足

$$a_1=a>0, a_{n+1}=n\cdot\sqrt{a_n}+1.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\ln n}\int_0^a\frac{\ln(x+n)}{x^2+na_n}\mathrm{d}x.$$

解 和第二题一样,极限可约化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 a}{a_n}$. 下面我们来证明 $a_n\sim n^2$,从而所求的极限为 a. 首先有 $a_{n+1}>n\sqrt{a_n}$,于是

$$\ln a_{n+1}>\frac{1}{2}\ln a_n+\ln n \Rightarrow 2^{n+1}\ln a_{n+1}>2^n\ln a_n+2^{n+1}\ln n.$$

于是叠加可得

$$2^{n+1}\ln a_{n+1}>\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\ln k.$$

利用 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\ln k}{2^{n+1}\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\ln n}{2^{n+1}\ln n-2^n\ln(n-1)}=2.$$

因此,

$$b_n\triangleq\frac{\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\ln k}{2^{n+1}}\sim 2\ln n.$$

再次利用 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2\ln n}{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}\ln k-2^{n+2}\ln n}{\frac{2^{n+1}}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}2^{k+1}\ln k-2^{n+2}\ln n\right)-\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}2^{k+1}\ln k-2^{n+1}\ln(n-1)\right)}{\frac{2^{n+1}}{n}-\frac{2^n}{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}[\ln(n-1)-\ln n]}{\frac{2^n}{n}-\frac{2^n}{(n-1)n}}=-2.\end{aligned}$$

于是 $b_n\sim 2\ln n-\dfrac{2}{n}\Rightarrow a_n,a_{n+1}>\mathrm{e}^{b_n}\sim n^2$. 那么 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}\geqslant 1$.

同理, 利用 $a_{n+1}<(n+1)\sqrt{a_n}$ 可得 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}\leqslant 1$, 因此 $a_n\sim n^2$.