2021 年考研数学二

一、选择题，1 ~ 10 题，每题 5 分，共 50 分.

1. 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2} (e^{t^3}-1)\,dt$ 是 x^3 的 ( )

A. 低阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 同阶但非等价无穷小

解 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2} (e^{t^3}-1)\,dt \sim \int_0^{x^2} t^3\,dt = \frac{1}{4}x^8$，选 C.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 ( )

A. 连续且取极大值　　B. 连续且取极小值

C. 可导且导数等于零　　D. 可导且导数不为零

解 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}-1}{x} = \frac{1}{2},$$

因此选 D.

3. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s, −3 cm/s，当底面半径为 10 cm，高为 5 cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为 ( )

A. $125\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, 40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$　　B. $125\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, -40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

C. $-100\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, 40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$　　D. $-100\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, -40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

解 由题意知 $\frac{dr}{dt} = 2, \frac{dh}{dt} = -3$，而 $V = \pi r^2 h, S = 2\pi r h + 2\pi r^2$，则

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt},\ \frac{dS}{dt} = 2\pi h\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt} + 4\pi r\frac{dr}{dt}.$$

当 $r = 10, h = 5$ 时，$\frac{dV}{dt} = -100\pi, \frac{dS}{dt} = 40\pi$，选 C.

4. 设函数 $f(x) = ax - b\ln x\ (a > 0)$ 有两个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $(e, +\infty)$　　B. $(0, e)$　　C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

解 令 $ax-b\ln x=0$,解得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln x}{x}$,易得 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,且 $g(0+)=-\infty$, $f(+\infty)=0$, $g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 要想方程有 $g(x)=\dfrac{a}{b}$ 两个根,则 $0<\dfrac{a}{b}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,即 $\dfrac{b}{a}>\mathrm{e}$,选 A.

5. 函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$,则 ( )

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$ B. $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ C. $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$ D. $a=0,b=\dfrac{1}{2}$

解 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$,所以 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$,选 D.

6. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$, $f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $\mathrm{d}f(1,1)=$ ( )

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ C. $\mathrm{d}y$ D. $-\mathrm{d}y$

解 分别在题中两个等式中对 x 求导得

$$\begin{cases} f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+f_2'(x+1,\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x=(x+1)^2+x\cdot 2(x+1) \\ f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x \end{cases}.$$

分别在上述两式中取 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$\begin{cases} f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1 \\ f_2'(1,1)+2f_2'(1,1)=2 \end{cases},$$

解得 $f_1'(1,1)=0$, $f_2'(1,1)=1$,于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}y$,选 C.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ( )

A. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$ B. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$ D. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

解 首先令 $f(x)=1$ 就可以直接判断选项 A,C,D 均不成立,只有 B 满足. 其次,在定积分的定义

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0+}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

中,取 $x_k=\dfrac{k}{n}$,而 $\xi_k=\dfrac{2k-1}{2n}\in\left(\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$,就是选项 B.

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ( )

A. 2, 0 B. 1, 1 C. 2, 1 D. 1, 2

解 首先令 $y_1=x_1+x_2, y_2=x_2+x_3, y_3=x_3$,则

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-(y_1-y_2)^2=2y_1y_2.$$

再令 $y_1=z_1+z_2, y_2=z_1-z_2, y_3=z_3$,则 $2y_1y_2=2(z_1+z_2)(z_1-z_2)=2z_1^2-2z_2^2$,选 B.

9. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,则 ( )

A. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解 B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

C. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解 D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

解 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$,那么当 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{O})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,这说明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,选 D.

10.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$,若存在下三角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 利用初等变换与初等矩阵的关系,可以直接验证

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

选 C.

二、填空题,11 ~ 16 题,每题 5 分,共 30 分.

11.$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\,\mathrm{d}x==2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln 3}.$

12.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1\\y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

解 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(x)}{x'^2(t)}\right|_{t=0}=\dfrac{2}{3}.$

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$________.

解 首先令 $x=0,y=2$,可得 $z=1$. 然后方程组两边对 x 求导得

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2y}{1+4x^2y^2}=0,$$

代入 $x=0,y=2,z=1$ 可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=1$.

14.已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y$,则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$________.

解 首先交换积分次序得 $f(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x$,于是

$$f'(t)=\int_1^{t^2}\sin\frac{x}{t}\,\mathrm{d}x=-t\cos\frac{x}{t}\bigg|_1^{t^2}=t\cos\frac{1}{t}-t\cos t,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}.$$

15.微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为________.

解 此方程的特征方程为 $\lambda^3-1=0$,特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,那么方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

16.多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为________.

解 $f(x)$ 中的 x^3 项为 $(-1)^{\tau(2134)}x^3+(-1)^{\tau(4231)2\cdot x\cdot x\cdot 2x}=-5x^3$,因此系数为 -5.

三、解答题,17 ~ 22 题,共 70 分.

17.(**本题满分 10 分**)

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解 注意到当 $x\to0$ 时,

$$\sin x=x+o(x^2),\quad \int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=x+o(x),\quad \mathrm{e}^x-1=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-(\mathrm{e}^x-1)}{\sin x(\mathrm{e}^x-1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+o(x^2)\right)\left(1+x+o(x)\right)-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

18.(**本题满分** 12 **分**)

设函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$,求函数 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

解 求导可得

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases},\ f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}.$$

那么函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$,凸区间为 $(-1,0)$.

又 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$,因此有垂直渐近线 $x=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1,\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{1+x}=-1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x(1+x)}=-1,\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+x^2}{1+x}=1,$$

因此有两条斜渐近线 $y=x-1$ 和 $y=-x+1$.

19.(**本题满分** 12 **分**)

设函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^2-x+C$,$L$ 为曲线 $y=f(x)\,(4\leqslant x\leqslant 9)$,记 L 的长度为 s,L 绕 x 轴旋转的旋转曲面的面积为 A,求 s 和 A.

解 等式两边对 x 求导得 $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1,\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$,于是弧长

$$\begin{aligned}s&=\int_4^9\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_4^9\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_4^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9=\frac{22}{3}.\end{aligned}$$

旋转曲面的面积

$$\begin{aligned}A&=\int_4^9 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_4^9 2\pi\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{425}{9}\pi.\end{aligned}$$

20.(**本题满分** 12 **分**)

设函数 $y=y(x)\,(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$ 的解.

(1)求 $y(x)$;

(2)设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点,记 P 处法线在 y 轴上的截距为 I_P,当 I_P 最小时,求 P 的坐标.

解 (1) $y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}$,两边乘以 $\frac{1}{x^6}$ 得

$$\frac{1}{x^6}\left(y'-\frac{6}{x}y\right)=\left(\frac{y}{x^6}\right)'=-\frac{6}{x^7},$$

于是 $\frac{y}{x^6}=\frac{1}{x^6}+C$, $y=Cx^6+1$,结合 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$ 可知 $C=\frac{1}{3}$,因此 $y=\frac{x^6}{3}+1$.

(2) 设 $P(x,y)$, 则过点 P 的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x)$. 令 $X=0$ 得 $I_P=Y=\frac{1}{2x^4}+y=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}x^6+1$. 令 $I_P'=-\frac{2}{x^5}+2x^5=0$,得 $x=1$,不难得知这就是最小值点,于是 I_P 最小时,P 的坐标为 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

21.(**本题满分** 12 **分**)

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成区域 D,求 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 双纽线方程为 $r^2=\cos 2\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{48}\cos^2 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

22.(**本题满分** 12 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值,若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,求 a,b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 首先有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{pmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

如果 $b=1$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 要相似于对角阵, 则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 解得 $a=1$. 此时解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 解方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

如果 $b=3$,由于 $\boldsymbol{A}$ 要相似于对角阵,则 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,解得 $a=-1$. 此时解方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得一个特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.