2021 年考研数学三

一、选择题，1 ~ 10 题，每题 5 分，共 50 分.

1. 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)\,dt$ 是 x^3 的 ( )

A. 低阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 同阶但非等价无穷小

解 当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)\,dt \sim \int_0^{x^2} t^3\,dt = \frac{1}{4}x^8$，选 C.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 ( )

A. 连续且取极大值　　B. 连续且取极小值

C. 可导且导数等于零　　D. 可导且导数不为零

解 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的，且

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x} - 1}{x} = \frac{1}{2},$$

因此选 D.

3. 设函数 $f(x) = ax - b\ln x\ (a > 0)$ 有两个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $(e, +\infty)$　　B. $(0, e)$　　C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

解 令 $ax - b\ln x = 0$，解得 $\frac{a}{b} = \frac{\ln x}{x}$，易得 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，且 $g(0+) = -\infty$，$g(+\infty) = 0$，$g(e) = \frac{1}{e}$. 要想方程 $g(x) = \frac{a}{b}$ 有两个根，则 $0 < \frac{a}{b} < \frac{1}{e}$，即 $\frac{b}{a} > e$，选 A.

4. 设函数 $f(x, y)$ 可微，且 $f(x + 1, e^x) = x(x + 1)^2$，$f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$，则 $df(1, 1) =$ ( )

A. $dx + dy$　　B. $dx - dy$　　C. dy　　D. $-dy$

解 分别在题中两个等式中对 x 求导得

$$\begin{cases} f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+f_2'(x+1,\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x=(x+1)^2+x\cdot 2(x+1) \\ f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x \end{cases}.$$

分别在上述两式中取 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$\begin{cases} f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1 \\ f_2'(1,1)+2f_2'(1,1)=2 \end{cases},$$

解得 $f_1'(1,1)=0,\ f_2'(1,1)=1$,于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}y$,选 C.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ( )

A. 2, 0　　B. 1, 1　　C. 2, 1　　D. 1, 2

解 首先令 $y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_2+x_3,\ y_3=x_3$,则

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-(y_1-y_2)^2=2y_1y_2.$$

再令 $y_1=z_1+z_2,\ y_2=z_1-z_2,\ y_3=z_3$,则 $2y_1y_2=2(z_1+z_2)(z_1-z_2)=2z_1^2-2z_2^2$,选 B.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵,若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$ ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,那么 $\boldsymbol{A}$ 的任意两列相互正交,每一列都是单位向量,于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

于是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,正确答案选 D.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$,若存在下三角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 利用初等变换与初等矩阵的关系,可以直接验证

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

选 C.

8. 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是 ( )

A. 若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\bar{B})=P(A)$

B. 若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$

C. 若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

D. 若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

解 首先取 $A=B$ 可以直接得出 D 为假命题. 对选项 A, $P(A|B)=P(A)$ 说明 A,B 独立,自然有 $A,\bar{B}$ 也独立,于是 $P(A|\bar{B})=P(A)$. 对选项 B 有

$$\begin{aligned}P(A|B)>P(A)&\Leftrightarrow P(AB)>P(A)P(B)\\&\Leftrightarrow P(A)-P(AB)<P(A)-P(A)P(B)\\&\Leftrightarrow P(A\bar{B})<P(A)P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{B})-P(A\bar{B})>P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{A}\bar{B})>P(\bar{A})P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A}).\end{aligned}$$

对选项 C[①]有

$$\begin{aligned}P(A|B)>P(A|\bar{B})&\Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}\\&\Leftrightarrow P(AB)P(\bar{B})>P(B)P(A\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(AB)\big(1-P(B)\big)>P(B)\big(P(A)-P(AB)\big)\\&\Leftrightarrow P(AB)>P(A)\Leftrightarrow P(A|B)>P(A).\end{aligned}$$

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本,令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$,则 ( )

A. $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ B. $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

C. $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ D. $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

解 直接计算得 $E(\hat{\theta})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2$,且

$$D(\hat{\theta})=D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})-2\operatorname{Cov}(\bar{X},\bar{Y})$$

①这个选项其实就是 2017 年数学一的第 7 题.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - 2\,\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - \frac{2}{n^2}\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - \frac{2}{n^2}\cdot n\,\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - \frac{2}{n}\rho\sigma_1\sigma_2,
\end{aligned}
$$

选 B.

10.设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{1-\theta}{2}$, $P(X=2)=P(X=3)=\dfrac{1+\theta}{2}$,利用来自总体 X 的样本观察值 $1,3,2,2,1,3,1,2$ 可得 θ 的最大似然估计值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{8}$

解 由样本值可似然函数为

$$
L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5,\ \ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)-3\ln 2+5\ln(1+\theta)-5\ln 4,
$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{3}{1-\theta}+\dfrac{5}{1+\theta}=0$ 得 $\theta=\dfrac{1}{4}$,这就是最大似然估计值,选 A.

二、填空题,11 ~ 16 题,每题 5 分,共 30 分.

11.若 $y=\cos\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$________.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$,当 $x=1$ 时,$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\dfrac{\sin\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{e}}$.

12.$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\,\mathrm{d}x=$________.

解

$$
\begin{aligned}
\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\sqrt{9-x^2}\Big|_{\sqrt{5}}^{3}+\sqrt{x^2-9}\Big|_{3}^{5}=6.
\end{aligned}
$$

13.设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成,则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为________.

解 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

14.差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为________.

解 齐次方程 $\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=0$ 的特征根为 $\lambda=1$,通解为 $y_t=C$. 对非齐次项 $f(t)=t$,其特解形式为 $y_t^*=t(At+B)$,代入 $\Delta y_t=t$ 可得 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$,于是原方程的通解为 $y_t=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$.

15.多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为________.

解 $f(x)$ 中的 x^3 项为 $(-1)^{\tau(2134)}x^3+(-1)^{\tau(4231)2\cdot x\cdot x\cdot 2x}=-5x^3$,因此系数为 -5.

16.甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球,从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒,再从乙盒中任取一球,令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数,则 X 与 Y 的相关系数为________.

解 由题意可得 X,Y 的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

于是 $E(X)=E(Y)=\frac{1}{2},E(XY)=\frac{3}{10},D(X)=D(Y)=\frac{1}{4}$,因此

$$\rho_{X,Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题,17 ~ 22 题,共 70 分.

17.(**本题满分 10 分**)

已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在,求 a 的值.

解 注意到

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e},$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}.$$

极限存在就意味着左右极限相等,于是 $\dfrac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\dfrac{\pi}{a}+\mathrm{e}^{-1}$,解得 $a=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{\pi}$.

18.(**本题满分** 12 **分**)

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{x^2}$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=\dfrac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0 \\ f_y'(x,y)=\dfrac{y}{x^2}=0 \end{cases}$,得驻点 $(x,y)=(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. 进一步有

$$\begin{cases} f_{xx}''(x,y)=\dfrac{-2x^4-2x+3+3y^2}{x^4} \\ f_{xy}''(x,y)=-\dfrac{2y}{x^3} \\ f_{yy}''(x,y)=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}.$$

在 $(-1,0)$ 处,$A=3>0,B=0,C=1,AC-B^2>0$,所以有极小值 $f(-1,0)=2$.

在 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 处,$A=24>0,B=0,C=4,AC-B^2>0$,所以有极小值 $f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{2}-2\ln 2$.

19.(**本题满分** 12 **分**)

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分,计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 化为极坐标计算得

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{e}^{r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta}(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)r\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}\,r^3\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \frac{r}{2}\mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 r(\mathrm{e}^{2r^2}-\mathrm{e}^{r^2})\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{8}.\end{aligned}$$

20.(**本题满分** 12 **分**)

设 n 为正整数,$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1)求 $y_n(x)$;

(2)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解 (1) 将方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 变量分离解得通解为 $y = Cx^{n+1}$，结合条件 $y_n(1) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ 得 $C = \dfrac{1}{n(n+1)}$,于是 $y_n(x) = \dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

(2) 对于级数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,易知其收敛半径为 1,且 $x = \pm 1$ 时级数也是收敛的. 当 $x \in [0,1)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -x\ln(1-x) - \big(-\ln(1-x) - x\big) = x + (1-x)\ln(1-x). \end{aligned}$$

而 $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x), & -1 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

21.(**本题满分 12 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值,若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,求 a,b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 首先有

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda-b \end{pmatrix} = (\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

如果 $b = 1$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 要相似于对角阵, 则 $r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 1$, 解得 $a = 1$. 此时解方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得两个线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 解方程组 $(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

如果 $b = 3$,由于 $\boldsymbol{A}$ 要相似于对角阵,则 $r(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 1$,解得 $a = -1$. 此时解方程组 $(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得两个线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 解方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得一个特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.(**本题满分** 12 **分**)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短的一段长度记为 X,较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度;

(3)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

解 (1) 设分成的两段区间长度分别为 X_1, X_2,则

$$X_1+X_2=2,\ X=\min\{X_1,X_2\}=\min\{X_1,2-X_1\},\ Y=2-X,$$

且 $X_1\sim U(0,2)$. 那么 X 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P(X\leqslant x)=P\big(\min\{X_1,2-X_1\}\leqslant x\big)\\&=1-P\big(\min\{X_1,2-X_1\}>x\big)\\&=1-P(X_1>x,2-X_1>x)\\&=1-P(x<X_1<2-x)\\&=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1-\displaystyle\int_x^{2-x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=x, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}.\end{aligned}$$

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(2) $Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}$,注意到 $z=\dfrac{2-x}{x}=\dfrac{2}{x}-1$ 在 $(0,1)$ 上单调可导,那么利用公式法可得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X\left(\dfrac{2}{z+1}\right)\cdot\dfrac{2}{(z+1)^2}=\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1\\ 0, & z\leqslant 1\end{cases}.$$

(3)

$$\begin{aligned}E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{1}{Z}\right)&=\int_1^{+\infty}\frac{2}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z\\&=2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z=2\ln 2-1.\end{aligned}$$