

2021 考研数学二模拟卷

学校:_____ 姓名:_____ 准考证号:_____

时间:180 分钟 满分:150 分 命题人:向禹

一、选择题:1-10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, 则下列说法中错误的是 ()
 - A. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$
 - B. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
 - C. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty$
 - D. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$
2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 则下列说法中正确的是 ()
 - A. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
 - B. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
 - C. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在
 - D. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
3. 设函数 $f(x) = |x(x-1)(x-4)|$, 则下列说法中正确的是 ()
 - A. 函数 $f(x)$ 有 5 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
 - B. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
 - C. 函数 $f(x)$ 有 5 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 4 个拐点
 - D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 4 个拐点
4. 设函数 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则下列说法中错误的是 ()
 - A. 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 则积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
 - B. 如果积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$
 - C. 如果 $\int_0^T f(x) dx = 0$, 则 $F(x)$ 是周期函数
 - D. 如果 $F(x)$ 是周期函数, 则积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
5. 已知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^a} dx$ 收敛, 则 a 的取值范围是
 - A. $0 < a < 1$
 - B. $1 < a < 2$
 - C. $2 < a < 3$
 - D. $3 < a < 4$
6. 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-x}$ 为通解的是 ()

A. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

B. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

C. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

D. $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$

7. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则下列是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件的是 ()

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = 1$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x^2y}{x^2 + y^2} = 1$

D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$

8. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则累次积分 $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$ 等于 ()

A. $\int_{-1}^1 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} dx$

B. $\int_{-1}^1 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}} dx$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

9. 设 n 阶方阵 A 的主对角元均为 a , 非对角元均为 b . 如果 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 则必有 ()

A. $a = b$

B. $a = -b$

C. $a = (n - 1)b$

D. $a = -(n - 1)b$

10. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则下列说法中错误的是 ()

A. 如果对任意 m 维列向量 \mathbf{b} , 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则 $m \geq n$

B. 如果 $r(A) = m$, 则对任意 m 维列向量 \mathbf{b} , 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 \mathbf{b} , 方程组 $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ 有解

D. 如果 $r(A) = n$, 则对任意 n 维列向量 \mathbf{b} , 方程组 $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解

二、填空题:11-16 题, 每题 5 分, 共 30 分.

11. 曲线 $y = \ln x$ 上曲率最大的点的坐标为_____.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin 2x} dx =$ _____.

13. 极坐标曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 对应的点处的法线方程为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x + y) = e^y f(x) + e^x f(y)$ 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立, 且 $f'(0) = 1$, 则

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 函数 $f(x, y, z) = xy + yz$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 下的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个线性无关的三维列向量, 如果

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + a\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_1 + (a-2)\alpha_2 + 2\alpha_3,$$

且 A 可相似对角化, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$. 设

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u(x))}{f(x)}$.

18. (本题满分 10 分) 设函数 $y = f(x) (x \geq 0)$ 连续可导, 且 $f(0) = 1$. 现已知曲线 $y = f(x)$ 、 x 轴、 y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

19. (本题满分 10 分) 设区域平面区域 D 为

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 4 \\ 2 \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4 \end{cases},$$

计算二重积分 $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$.

20. (本题满分 10 分)

(1) 证明不等式 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ 对任意正整数 n 都成立.

(2) 求最大的实数 α , 使得 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 对任意正整数 n 都成立.

21. (本题满分 15 分) 设函数 $f_0(x) = \ln x$. 对 $n \geq 0$ 和 $x > 0$, 令 $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(x) dx$.

(1) 令 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, 证明 $f_n(x) = \frac{(\ln x - a_n)x^n}{n!}$.

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! f_n(1)}{\ln n}$.

22. (本题满分 15 分) 已知 1 是三阶实对称矩阵 A 的一个特征值, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的所有特征值和对应的特征向量.
- (2) 如果 $\beta = (-1, 1, -5)$, 求 $A^n \beta$.
- (3) 设向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 求方程 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$ 的通解.