2021 考研数学二模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$,则下列说法中错误的是　(　)

   A. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

   C. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$

   答案　D

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则下列说法中正确的是　(　)

   A. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$

   B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

   C. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在

   D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$

   答案　B

3. 设函数 $f(x) = |x(x-1)(x-4)|$,则下列说法中正确的是　(　)

   A. 函数 $f(x)$ 有 5 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

   B. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

   C. 函数 $f(x)$ 有 5 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 4 个拐点

   D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 4 个拐点

   答案　C,画图即可,绝对值函数就是把函数图像在 x 轴下方的部分翻折到上方,注意翻折点处非拐点的话,翻折之后就变成了拐点,还有一个是原来是三次函数本身的拐点.

4. 设函数 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则下列说法中错误的是　(　)

   A. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$,则积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

   B. 如果积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

   C. 如果 $\displaystyle\int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,则 $F(x)$ 是周期函数

   D. 如果 $F(x)$ 是周期函数,则积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

答案　D

5. 已知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x-\ln(1+x)}{x^a} \mathrm{d}x$ 收敛,则 a 的取值范围是

A. $0 < a < 1$　　B. $1 < a < 2$　　C. $2 < a < 3$　　D. $3 < a < 4$

答案　C

6. 在下列微分方程中,以 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + C_3 x^2\mathrm{e}^x + C_4\mathrm{e}^{-x}$ 为通解的是　(　)

A. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$　　B. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

C. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$　　D. $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$

答案　D

7. 设函数 $f(x, y)$ 连续,则下列是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件的是　(　)

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$　　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 1$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x^2y}{x^2+y^2} = 1$　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$

答案　C

8. 设函数 $f(x, y)$ 连续,则累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 等于　(　)

A. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{y+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{y+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

答案　C

9. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元均为 a,非对角元均为 b. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1,则必有　(　)

A. $a = b$　　B. $a = -b$　　C. $a = (n-1)b$　　D. $a = -(n-1)b$

答案　D

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是　(　)

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解,则 $m \geqslant n$

B. 如果 $r(A) = m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

答案　A

二、填空题:11-16 **题,每题** 5 **分,共** 30 **分。**

11. 曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点的坐标为____________.

答案　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=$____________.

答案

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{4-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{4-t^2}\\&=\frac{1}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

13. 极坐标曲线 $r=1+\cos\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 对应的点处的法线方程为____________.

答案　注意到参数方程为 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta$,对应的切线斜率为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=0$,法线方程为 $x=\dfrac{3}{4}$.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+\mathrm{e}^x f(y)$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立,且 $f'(0)=1$,则 $f(x)=$____________.

答案　$f(0)=0,\ f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x,\ f(x)=x\mathrm{e}^x$.

15. 函数 $f(x,y,z)=xy+yz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=2$ 下的最小值为____________.

答案　$-\sqrt{2}$,拉格朗日乘数法,或者特征值,或者基本不等式.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个线性无关的三维列向量,如果

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(a-2)\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,则 a 的取值范围是____________.

答案

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a-2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a-2\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 可相似对角化,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-a).$$

讨论一下 $a=1$ 和 $a=2$ 的情形即可,$a=2$ 可对角化,$a=1$ 不可对角化,$a\neq1$ 和 2 时自然可对角化,因此 $a\neq1$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x,f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$,计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.

解 只需注意到 $x\to0$ 时,$f(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$. $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\sim\dfrac{1}{2}x$,答案为 $\dfrac{1}{4}$.

18.(本题满分 10 分)设函数 $y=f(x)\ (x\geqslant0)$ 连续可导, 且 $f(0)=1$. 现已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

解 由题意可得方程

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

又 $f(0)=1$, 故所求函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}y=\sqrt{1+y'^2}\\ y\big|_{x=0}=1\end{cases}.$$

由 $y=\sqrt{1+y'^2}$ 得 $y^2=1+y'^2$, 故 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\,\mathrm{d}x.$$

于是方程的通解为

$$\ln C\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)=x.$$

将 $y\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=1$,故所求的解为

$$y \pm \sqrt{y^2-1} = \mathrm{e}^x.$$

解得 $f(x)=y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

19.(本题满分 10 分)设区域平面区域 D 为

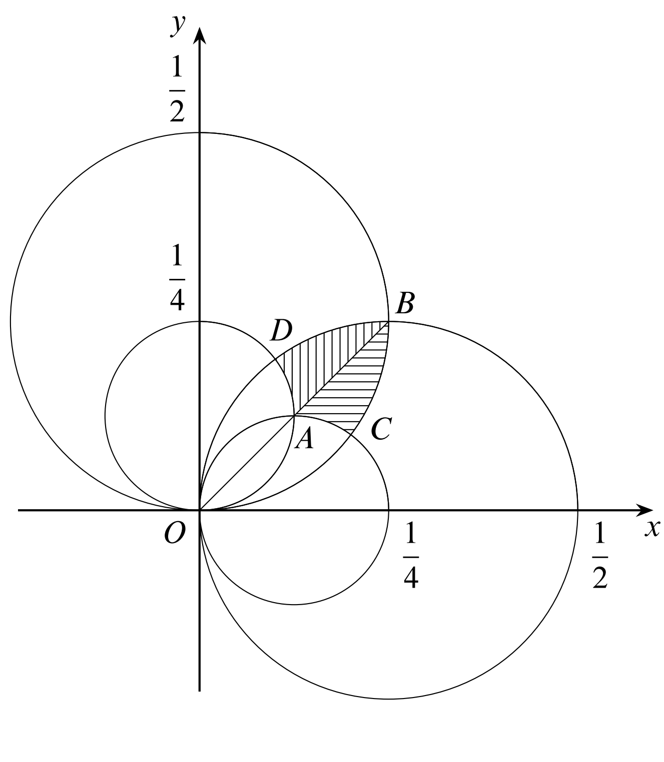
$$\begin{cases} 2 \leqslant \dfrac{x}{x^2+y^2} \leqslant 4 \\ 2 \leqslant \dfrac{y}{x^2+y^2} \leqslant 4 \end{cases},$$

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$.

解 在极坐标系中,积分区域 D 可表示为

$$\frac{\cos\theta}{4} \leqslant r \leqslant \frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{4} \leqslant r \leqslant \frac{\sin\theta}{2}.$$

如图所示,四个交点坐标分别为



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \arctan\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \arctan 2\right).$$

利用对称性可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{r(\sin\theta+\cos\theta)^2}\\ &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\ln(2\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \ln 3-\frac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

20.(本题满分 10 分)

(1) 证明不等式 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ 对任意正整数 n 都成立.

(2) 求最大的实数 α,使得 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 对任意正整数 n 都成立.

解

(1) 取对数以后令 $\frac{1}{n}=x>0$,求导证明单调性即可.

(2) 取对数 $\alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$,令 $\frac{1}{n}=x\in(0,1]$,证明 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$ 单调递减,然后 $\alpha\geqslant f(0^+)=\frac{1}{2}$.

21.(本题满分 15 分)设函数 $f_0(x)=\ln x$. 对 $n\geqslant 0$ 和 $x>0$,令 $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) 令 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,证明 $f_n(x)=\frac{(\ln x-a_n)x^n}{n!}$.

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!f_n(1)}{\ln n}$.

解

(1) 数学归纳法证明即可.

(2) 即求极限 $-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}$. 先证明不等式

$$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k},$$

将上式对 k 从 1 到 $n-1$ 叠加得到

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

两边除以 a_n,夹逼准则即可,答案最后等于 -1.

22.(本题满分 15 分)已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,-5)$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的通解.

解

(1) $\lambda_1=0, k_1\boldsymbol{\alpha}_1=k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}}, k_1\neq 0$; $\lambda_2=2, k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_2(2,-2,1)^{\mathrm{T}}, k_2\neq 0$; $\lambda_3=1, k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_3(2,1,-2)^{\mathrm{T}}, k_3\neq 0$.

(2) 注意到 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$,则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-2^n\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3)

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=4x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3=(2x_1-x_2)^2+2(x_2-x_3)^2=0$,于是

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}.$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=k(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.