2021 考研数学三模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

B. 如果数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$,则函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

C. 如果数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在

D. 函数 $f(x)$ 的间断点必然是跳跃间断点

2. 设 $0<a\leqslant b\leqslant c$,则反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^a+x^b+x^c}$ 收敛的充要条件是 ( )

A. $a<1<c$　　B. $a\leqslant 1\leqslant c$　　C. $a<1<b$　　D. $b<1<c$

3. 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$,则函数 $f(x,y)=(|x|+|y|)\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 ( )

A. 可微　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数连续　　D. 偏导数存在但不可微

4. 差分方程 $y_{t+1}+2y_t=(t^2+1)\cdot 2^t+(-2)^t$ 的特解形式为 ( )

A. $(at^2+bt+c)\cdot 2^t+d\cdot(-2)^t$　　B. $(at^2+bt+c)\cdot 2^t+dt\cdot(-2)^t$

C. $t(at^2+bt+c)\cdot 2^t+d\cdot(-2)^t$　　D. $t(at^2+bt+c)\cdot 2^t+dt\cdot(-2)^t$

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则累次积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 ( )

A. $\displaystyle\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_0^{\frac12-\sqrt{\frac14-y^2}}\mathrm{d}x$

B. $\displaystyle\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_0^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}\mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

D. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

6. 设常数 $a>0$,则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+an}\pi\right)$ 的敛散性为 ( )

A. 绝对收敛 B. 条件收敛

C. 发散 D. 敛散性与 a 的取值有关

7. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t;\boldsymbol{\gamma}$,如果

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\gamma}),$$

则下列说法中错误的是 ( )

A. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但能被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$

C. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

D. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解,则 $m\geqslant n$

B. 如果 $r(A)=m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从 $t(1)$ 分布,则 ( )

A. $\mathbb{P}(X+Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{4}$ B. $\mathbb{P}(X-Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{4}$

C. $\mathbb{P}\big(\max\{X,Y\}\geqslant 0\big)=\dfrac{1}{4}$ D. $\mathbb{P}\big(\min\{X,Y\}\geqslant 0\big)=\dfrac{1}{4}$

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$($n\geqslant 2$)是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,令 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$,则下列说法中错误的是

A. $\dfrac{\alpha^2}{n\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布 B. $\dfrac{\beta}{\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布

C. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 服从 F 分布 D. $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$ 服从 F 分布

二、填空题:11-16 题,每题 5 分,共 30 分。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos 2x}}=$____________.

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$____________.

13. 设某产品的平均收益为 $\bar{R}(Q)=1+\ln Q$,其中 Q 是销售量,则边际收益为____________.
14. 微分方程 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=$____________.
15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个线性无关的三维列向量,如果

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(a-2)\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,则 a 的取值范围是____________.
16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的分布为 $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{4},\mathbb{P}(Y=2)=\frac{3}{4}$,则 $\mathbb{P}\big(1\leqslant\min\{X,Y\}<2\big)=$____________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x,f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$,计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.

18.(本题满分 10 分)设平面区域 D_1 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=-1,x=a,y=0$ 所围成,平面区域 D_2 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=a,x=1,y=0$ 所围成,其中 $0<a<1$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1, D_2 绕直线 $x=a$ 旋转所得旋转体的体积 V_2.

(2) 求 V_1+V_2 的最小值.

19.(本题满分 10 分)设区域平面区域 D 为

$$\begin{cases}2\leqslant\dfrac{x}{x^2+y^2}\leqslant4\\[2mm] 2\leqslant\dfrac{y}{x^2+y^2}\leqslant4\end{cases},$$

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$.

20.(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1,a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n-\dfrac{1}{n+1}a_{n-1}$, $S(x)$ 为幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

(2) 证明 $(1-x)S'(x)=(2-x)S(x)$,并求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

21.（本题满分 15 分）已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,-5)$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的通解.

22.（本题满分 15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{\lambda^2}{2}|x|\mathrm{e}^{-\lambda|x|},\ -\infty<x<+\infty$$

其中未知参数 $\lambda>0,(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 计算 $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$.