2021 考研数学三模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则下列说法中错误的是 (　)

A. 如果函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

B. 如果数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$,则函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

C. 如果数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在

D. 函数 $f(x)$ 的间断点必然是跳跃间断点

答案　C

2. 设 $0<a\leqslant b\leqslant c$,则反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^a+x^b+x^c}$ 收敛的充要条件是 (　)

A. $a<1<c$　　B. $a\leqslant 1\leqslant c$　　C. $a<1<b$　　D. $b<1<c$

答案　A

3. 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$,则函数 $f(x,y)=(|x|+|y|)\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 (　)

A. 可微　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数连续　　D. 偏导数存在但不可微

答案　A

4. 差分方程 $y_{t+1}+2y_t=(t^2+1)\cdot 2^t+(-2)^t$ 的特解形式为 (　)

A. $(at^2+bt+c)\cdot 2^t+d\cdot(-2)^t$　　B. $(at^2+bt+c)\cdot 2^t+dt\cdot(-2)^t$

C. $t(at^2+bt+c)\cdot 2^t+d\cdot(-2)^t$　　D. $t(at^2+bt+c)\cdot 2^t+dt\cdot(-2)^t$

答案　B

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则累次积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 (　)

A. $\displaystyle\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_0^{\frac12-\sqrt{\frac14-y^2}}\mathrm{d}x$

B. $\displaystyle\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_0^{\frac12+\sqrt{\frac14-y^2}}\mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

答案 C

6. 设常数 $a>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2+an}\,\pi\right)$ 的敛散性为 ( )

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 敛散性与 a 的取值有关

答案 D

7. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t; \boldsymbol{\gamma}$,如果

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),\ r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\gamma}),$$

则下列说法中错误的是 ( )

A. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但能被 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$

C. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

D. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

答案 C

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解,则 $m \geqslant n$

B. 如果 $r(A) = m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A}) = n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

答案 A

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从 $t(1)$ 分布,则 ( )

A. $\mathbb{P}(X+Y \geqslant 0) = \dfrac{1}{4}$

B. $\mathbb{P}(X-Y \geqslant 0) = \dfrac{1}{4}$

C. $\mathbb{P}\big(\max\{X,Y\} \geqslant 0\big) = \dfrac{1}{4}$

D. $\mathbb{P}\big(\min\{X,Y\} \geqslant 0\big) = \dfrac{1}{4}$

答案 D

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$($n \geqslant 2$)是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,令 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \beta = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$,则下列说法中错误的是

A. $\dfrac{\alpha^2}{n\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布

B. $\dfrac{\beta}{\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布

C. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 服从 F 分布 D. $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$ 服从 F 分布

答案 C. 注意 C 中分子分母不独立,D 中利用二维正态分布的独立性等价于协方差为零可知 D 的分子分母独立.

二、填空题:11-16 题,每题 5 分,共 30 分。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos 2x}}=$____________.

答案 $\dfrac{1}{2}$.

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$____________.

答案 $\dfrac{\ln 2}{4}$.

13. 设某产品的平均收益为 $\bar{R}(Q)=1+\ln Q$,其中 Q 是销售量,则边际收益为____________.

答案 总收益 $R=Q\bar{R}(Q)=Q(1+\ln Q)$,边际收益 $R'(Q)=2+\ln Q$.

14. 微分方程 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=$____________.

答案 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个线性无关的三维列向量,如果

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(a-2)\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,则 a 的取值范围是____________.

答案

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a-2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a-2\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 可相似对角化,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-a).$$

讨论一下 $a=1$ 和 $a=2$ 的情形即可,$a=2$ 可对角化,$a=1$ 不可对角化,$a\neq 1$ 和 2 时自然可对角化,因此 $a\neq 1$.

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的分布为 $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{4}, \mathbb{P}(Y=2)=\frac{3}{4}$,则 $\mathbb{P}\big(1 \leqslant \min\{X, Y\}<2\big)=$____________.

答案 $\mathbb{P}(Y=1, X \geqslant 1)+\mathbb{P}(Y=2,1<X<2)=\mathrm{e}^{-1}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x, f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$,计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.

解 只需注意到 $x\to0$ 时, $f(x)\sim\frac{1}{2}x^2$. $u(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\sim\frac{1}{2}x$,答案为 $\frac{1}{4}$.

18.(本题满分 10 分)设平面区域 D_1 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=-1, x=a, y=0$ 所围成,平面区域 D_2 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=a, x=1, y=0$ 所围成,其中 $0<a<1$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1, D_2 绕直线 $x=a$ 旋转所得旋转体的体积 V_2.

(2) 求 V_1+V_2 的最小值.

解

(1)

$$V_1=\pi\int_{-1}^{a}|x|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}(a^3+1),\ V_2=2\pi\int_a^1|x|(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi-\pi a+\frac{\pi}{3}a^3.$$

(2) $V(a)=V_1+V_2=\frac{2\pi}{3}a^3-\pi a+\pi, V'(a)=2\pi a^2-\pi$, 可知 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取最小值 $\pi-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

19.(本题满分 10 分)设区域平面区域 D 为

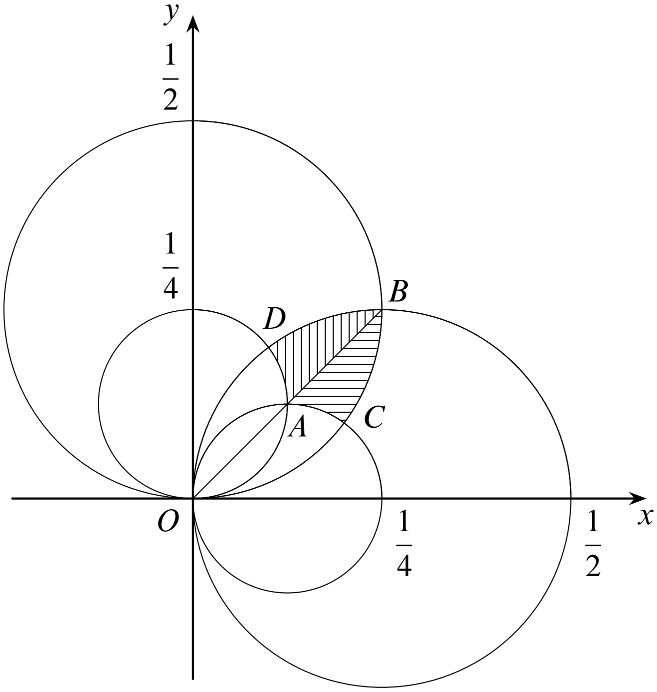
$$\begin{cases}2\leqslant\dfrac{x}{x^2+y^2}\leqslant4\\[2ex]2\leqslant\dfrac{y}{x^2+y^2}\leqslant4\end{cases},$$

计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$.

解 在极坐标系中,积分区域 D 可表示为

$$\frac{\cos\theta}{4}\leqslant r\leqslant\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{4}\leqslant r\leqslant\frac{\sin\theta}{2}.$$

如图所示,四个交点坐标分别为



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \arctan\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \arctan 2\right).$$

利用对称性可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}} \frac{\mathrm{d}r}{r(\sin\theta+\cos\theta)^2} \\ &= 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\ln(2\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

20.(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1, a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n-\dfrac{1}{n+1}a_{n-1}$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

(2) 证明 $(1-x)S'(x)=(2-x)S(x)$,并求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

解

(1) 注意到 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})=\dfrac{1}{(n+1)!}$, 进一步得到 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$. 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,这就说明幂级数的收敛半径为 1.

(2) 由题意有 $(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_n-a_{n-1}$,于是当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$\begin{aligned}
S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\
&=2x+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=2x+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+2)a_n-a_{n-1}\big)x^n\\
&=2x+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n-1}^{\infty}a_{n-1}x^n\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}\\
&=2S(x)+xS'(x)-xS(x),
\end{aligned}$$

由此得到 $(1-x)S'(x)=(2-x)S(x)$, 且 $S(0)=a_0=1$, 解微分方程可得 $S(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$.

其实求和函数还可以交换求和顺序更简单:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x^n}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{x^k}{1-x}=\frac{\mathrm{e}^x}{1-x}.$$

那么再去验证 $(1-x)S'(x)=(2-x)S(x)$ 就轻而易举了. 本题改编自 2017 年数学三的压轴题.

21.(本题满分 15 分)已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&-4\\0&2\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,-5)$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的通解.

解

(1) $\lambda_1 = 0, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 = k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}}, k_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 2, k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_2(2,-2,1)^{\mathrm{T}}, k_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 1, k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = k_3(2,1,-2)^{\mathrm{T}}, k_3 \neq 0$.

(2) 注意到 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$,则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - 2^n\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3)

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = (2x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 = 0$,于是

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = k(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

22.(本题满分 15 分)设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2}|x|\mathrm{e}^{-\lambda|x|}, -\infty < x < +\infty$$

其中未知参数 $\lambda > 0, (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 计算 $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$.

解

(1) 注意到

$$\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2}{2}|x|^3\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{\lambda^2},$$

令 $\mathbb{E}(X^2) = \frac{6}{\lambda^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$,可得矩估计量 $\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{6n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$.

(2) 设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 对应的观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{2}|x_i|\mathrm{e}^{-\lambda|x_i|} = \frac{\lambda^{2n}}{2^n}|x_1 \cdots x_n|\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|},$$

取对数得

$$\ln L(\lambda) = 2n\ln\lambda - n\ln 2 + \ln|x_1x_2\cdots x_n| - \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\big(\ln L(\lambda)\big)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0\Longrightarrow\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}.$$

即最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$.

(3)

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)=\frac{1}{6n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{6}\mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{\lambda^2}.$$