

## 2021 考研数学一模拟卷

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 准考证号:\_\_\_\_\_

时间:180 分钟 满分:150 分 命题人:向禹

一、选择题:1-10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增,则下列说法中错误的是 ( )
  - A. 如果函数极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$
  - B. 如果数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$ , 则函数极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
  - C. 如果数列  $x_n \rightarrow x_0$  且  $x_n \neq x_0$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  存在
  - D. 函数  $f(x)$  的间断点必然是跳跃间断点
2. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导,则下列说法中正确的是 ( )
  - A. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
  - B. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
  - C. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在
  - D. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
3. 设  $\varphi(x, y)$  在  $(0, 0)$  的邻域内连续且  $\varphi(0, 0) = 0$ , 则函数  $f(x, y) = (|x| + |y|)\varphi(x, y)$  在  $(0, 0)$  处 ( )
  - A. 可微
  - B. 连续但偏导数不存在
  - C. 偏导数连续
  - D. 偏导数存在但不可微
4. 设方程  $\ln x = kx$  只有两个正实根,则  $k$  的取值范围为 ( )
  - A.  $(-\infty, e)$
  - B.  $(0, \frac{1}{e})$
  - C.  $(\frac{1}{e}, +\infty)$
  - D.  $(\frac{1}{e}, 1)$
5. 设函数  $f(x, y)$  连续,则累次积分  $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$  等于 ( )
  - A.  $\int_{-1}^1 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} dx$
  - B.  $\int_{-1}^1 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} dx$
  - C.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_{\cos\theta-\sin\theta}^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$

$$D. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

6. 下列级数中条件收敛的是 ( )

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad B. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$$

$$C. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \quad D. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}$$

7. 设有向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t; \gamma$ , 如果

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t), r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \gamma) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t, \gamma)$$

则下列说法中错误的是 ( )

- A. 向量  $\gamma$  不能被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 但能被  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示
- B.  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \gamma) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$
- C. 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性无关
- D. 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  能被向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示, 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  能被  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \gamma$  线性表示

8. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 则下列说法中错误的是 ( )

- A. 如果对任意  $m$  维列向量  $b$ , 方程组  $Ax = b$  有解, 则  $m \geq n$
- B. 如果  $r(A) = m$ , 则对任意  $m$  维列向量  $b$ , 方程组  $Ax = b$  有解
- C. 对任意  $m$  维列向量  $b$ , 方程组  $A^T Ax = A^T b$  有解
- D. 如果  $r(A) = n$ , 则对任意  $n$  维列向量  $b$ , 方程组  $A^T Ax = b$  有解

9. 设随机变量  $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$ , 如果  $c > 0$  使得  $\mathbb{P}(0 < X < c) = \alpha$ , 则  $\mathbb{P}(Y > c^2) =$  ( )

- A.  $1 - \alpha$                       B.  $\alpha$                               C.  $1 - 2\alpha$                       D.  $2\alpha$

10. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  是来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 令  $\alpha = \sum_{i=1}^n X_i, \beta =$

$\sum_{i=1}^n X_i^2$ , 则下列说法中错误的是

- A.  $\frac{\alpha^2}{n\sigma^2}$  服从  $\chi^2$  分布
- B.  $\frac{\beta}{\sigma^2}$  服从  $\chi^2$  分布
- C.  $\frac{\alpha^2}{\beta}$  服从  $F$  分布
- D.  $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$  服从  $F$  分布

二、填空题: 11-16 题, 每题 5 分, 共 30 分。

11. 设函数  $f(x)$  满足  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{1 - \sqrt{\cos 2x}} =$ \_\_\_\_\_.

12. 极坐标曲线  $r = 1 + \cos \theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{3}$  对应的点处的法线方程为\_\_\_\_\_.

13. 微分方程  $y''' - 3y' + 2y = 0$  的通解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

14. 设函数  $f(x) = x - [x]$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 令

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 则  $S(-5) =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知三元方程  $a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = 1$  对应的空间曲面为双叶双曲面, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立,  $X$  服从参数为 1 的指数分布,  $Y$  的分布为  $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3}{4}$ , 则  $\mathbb{P}(1 \leq \min\{X, Y\} < 2) =$ \_\_\_\_\_.

**三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17. (本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处二阶可导, 且  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$ . 设曲线  $y = f(x)$  在点  $(x, f(x))$  处的切线在  $x$  轴上的截距为  $u(x)$ , 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u(x))}{f(x)}$ .

18. (本题满分 10 分) 设平面区域  $D_1$  由曲线  $y = |x|$ , 直线  $x = -1, x = a, y = 0$  所围成, 平面区域  $D_2$  由曲线  $y = |x|$ , 直线  $x = a, x = 1, y = 0$  所围成, 其中  $0 < a < 1$ .

(1) 求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积  $V_1$ ,  $D_2$  绕直线  $x = a$  旋转所得旋转体的体积  $V_2$ .

(2) 求  $V_1 + V_2$  的最小值.

19. (本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  二阶可导,  $f(0) = 1$ , 且有

$$f'(x) + 3 \int_0^x f'(t) \, dt + 2x \int_0^1 f(xt) \, dt + e^{-x} = 0,$$

求  $f(x)$ .

20. (本题满分 10 分) 设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  介于  $z = 0$  与  $z = 1$  之间部分的下侧,  $f(x)$  为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [-xf(x+y) - 2x] dydz + [-2y - yf(x+y)] dzdx + [-zf(x+y)] dx dy.$$

---

21. (本题满分 15 分) 已知 1 是三阶实对称矩阵  $A$  的一个特征值, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求  $A$  的所有特征值和对应的特征向量.
- (2) 如果  $\beta = (-1, 1, -5)$ , 求  $A^n \beta$ .
- (3) 设向量  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 求方程  $x^T A x = 0$  的通解.

22. (本题满分 15 分) 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2} |x| e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中未知参数  $\lambda > 0$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

- (1) 求参数  $\lambda$  的矩估计量  $\hat{\lambda}_1$ .
- (2) 求参数  $\lambda$  的最大似然估计量  $\hat{\lambda}_2$ .
- (3) 计算  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$ .