2021 考研数学一模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则下列说法中错误的是 (　)

A. 如果函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

B. 如果数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$,则函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

C. 如果数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在

D. 函数 $f(x)$ 的间断点必然是跳跃间断点

答案　C

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则下列说法中正确的是 (　)

A. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

C. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在

D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

答案　B

3. 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$,则函数 $f(x,y)=(|x|+|y|)\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 (　)

A. 可微　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数连续　　D. 偏导数存在但不可微

答案　A

4. 设方程 $\ln x=kx$ 只有两个正实根,则 k 的取值范围为 (　)

A. $(-\infty,\mathrm{e})$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$

答案　B.

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则累次积分 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 (　)

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_0^{\frac12-\sqrt{\frac14-y^2}}\mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

答案 C

6. 下列级数中条件收敛的是 ( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$　　B. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$

答案 D.

7. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t;\boldsymbol{\gamma}$,如果

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\gamma})$$

则下列说法中错误的是 ( )

A. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但能被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$

C. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

D. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

答案 C

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解,则 $m\geqslant n$

B. 如果 $r(A)=m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解

答案 A

9. 设随机变量 $X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$,如果 $c>0$ 使得 $\mathbb{P}(0<X<c)=\alpha$,则 $\mathbb{P}(Y>c^2)=$ ( )

A. $1-\alpha$　　B. α　　C. $1-2\alpha$　　D. 2α

答案 C

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n\geqslant 2$）是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}X_i,\beta=$

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$,则下列说法中错误的是

A. $\dfrac{\alpha^2}{n\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布　　B. $\dfrac{\beta}{\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布

C. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 服从 F 分布　　D. $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$ 服从 F 分布

答案　C. 注意 C 中分子分母不独立,D 中利用二维正态分布的独立性等价于协方差为零可知 D 的分子分母独立.

二、填空题:11-16 题,每题 5 分,共 30 分。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos 2x}}=$____________.

    答案　$\dfrac{1}{2}$.

12. 极坐标曲线 $r=1+\cos\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 对应的点处的法线方程为____________.

    答案　注意到参数方程为 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta, y=(1+\cos\theta)\sin\theta$,对应的切线斜率为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=0$,法线方程为 $x=\dfrac{3}{4}$.

13. 微分方程 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=$____________.

    答案　$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}$.

14. 设函数 $f(x)=x-[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,令

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,\ b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

    令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x), -\infty<x<+\infty$,则 $S(-5)=$____________.

    答案　$S(-5)=S(1)=\dfrac{f(1^+)+f(1^-)}{2}-\dfrac{a_0}{2}=0$.

15. 已知三元方程 $a(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)=1$ 对应的空间曲面为双叶双曲面,则 a 的取值范围是____________.

    答案　特征值两负一正,a 的范围是 $(-2,1)$.

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的分布为 $\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{1}{4}, \mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{3}{4}$,则 $\mathbb{P}\big(1\leqslant\min\{X,Y\}<2\big)=$____________.

    答案　$\mathbb{P}(Y=1,X\geqslant 1)+\mathbb{P}(Y=2,1<X<2)=\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x,f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.

解 只需注意到 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$. $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\sim\dfrac{1}{2}x$，答案为 $\dfrac{1}{4}$.

18.（本题满分 10 分）设平面区域 D_1 由曲线 $y=|x|$，直线 $x=-1, x=a, y=0$ 所围成，平面区域 D_2 由曲线 $y=|x|$，直线 $x=a, x=1, y=0$ 所围成，其中 $0<a<1$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1, D_2 绕直线 $x=a$ 旋转所得旋转体的体积 V_2.

(2) 求 V_1+V_2 的最小值.

解

(1)

$$V_1=\pi\int_{-1}^{a}|x|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}(a^3+1),\ V_2=2\pi\int_a^1|x|(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi-\pi a+\frac{\pi}{3}a^3.$$

(2) $V(a)=V_1+V_2=\dfrac{2\pi}{3}a^3-\pi a+\pi, V'(a)=2\pi a^2-\pi$，可知 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取最小值 $\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

19.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=1$，且有

$$f'(x)+3\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+2x\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0,$$

求 $f(x)$.

答案 求导构造得到微分方程 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，结合初值条件解得 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}$.

20.（本题满分 10 分）设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[-xf(x+y)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[-2y-yf(x+y)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[-zf(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 注意到对曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{z}$,于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left\{-\frac{\partial z}{\partial x}[-xf(x+y)-2x]-\frac{\partial z}{\partial y}[-2y-yf(x+y)]-zf(x+y)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{4\pi}{3}.$$

21.（本题满分 15 分）已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&-4\\0&2\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,-5)$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的通解.

解

(1) $\lambda_1=0,k_1\boldsymbol{\alpha}_1=k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}},k_1\neq 0$; $\lambda_2=2,k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_2(2,-2,1)^{\mathrm{T}},k_2\neq 0$; $\lambda_3=1,k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_3(2,1,-2)^{\mathrm{T}},k_3\neq 0$.

(2) 注意到 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$,则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-2^n\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3)

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$$

$3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=4x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3=(2x_1-x_2)^2+2(x_2-x_3)^2=0$,于是

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0\\x_2-x_3=0\end{cases}.$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=k(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

22.（本题满分 15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{\lambda^2}{2}|x|\mathrm{e}^{-\lambda|x|},-\infty<x<+\infty$$

其中未知参数 $\lambda>0$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 计算 $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$.

解

(1) 注意到

$$\mathbb{E}(X)=0, \mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2}{2}|x|^3\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{\lambda^2},$$

令 $\mathbb{E}(X^2)=\dfrac{6}{\lambda^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2$,可得矩估计量 $\hat{\lambda}_1=\sqrt{\dfrac{6n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$.

(2) 设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 对应的观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^2}{2}|x_i|\mathrm{e}^{-\lambda|x_i|}=\frac{\lambda^{2n}}{2^n}|x_1\cdots x_n|\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|},$$

取对数得

$$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda-n\ln 2+\ln|x_1x_2\cdots x_n|-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\big(\ln L(\lambda)\big)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0\Longrightarrow\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}.$$

即最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$.

(3)

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)=\frac{1}{6n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{6}\mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{\lambda^2}.$$