2020 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ ( )

A. $b\sin a$ B. $b\cos x$ C. $b\sin f(a)$ D. $b\cos f(a)$

✎ **解:** 利用拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\xi\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\cos a.$$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

✎ **解:** 显然, 所有的间断点为 $x=-1,0,1,2$, 其中 $x=-1,1,2$ 都是无穷间断点, 而 $x=0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 则 ( )

A. $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数 B. $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数

C. $\displaystyle\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数 D. $\displaystyle\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数

✎ **解:** 易知 $\cos f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是偶函数, 所以 $\cos f(x)+f'(x)$ 是偶函数, 那么 $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数, 选 A.

4. 已知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 ( )

A. $(-2,6)$ B. $(-3,1)$ C. $(-5,3)$ D. $(-17,15)$

✎ **解:** 由题意知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 4, 那么它逐项积分以后的幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径仍为 4. 那么幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间满足 $(x+1)^2<4\Rightarrow -3<x<1$, 选 B.

5. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 因为 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 且 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 而 $A_{12}\neq 0$ 说明 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$. 且 $\boldsymbol{A}$ 中对应的三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$ B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

✎ **解:** 同一个特征值对应的特征向量的线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

✎ **解:** 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC)=\frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(B\cup C)-[1-P(A\cup B\cup C)]=P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\\&=\frac{7}{12}-P(B)-P(C)+P(BC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}B\bar{C})&=\frac{7}{12}-P(A)-P(C)+P(AC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}\bar{B}C)&=\frac{7}{12}-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{12},\end{aligned}$$

因此 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$, 选 D.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$, 则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

✎ **解:** 首先有 (X,Y) 服从二维正态部分, $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,4)$. 而

$$(X,X+Y)=(X,Y)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $(X,X+Y)$ 也服从二维正态分布. 且 $E(X+Y)=0, D(X+Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3$, 所以 $X+Y\sim N(0,3)$, 于是 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$. 又

$$\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=DX+\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=0,$$

因此 X 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 独立, 选 C. 而 $\mathrm{Cov}(X,X-Y)\neq 0$, 所以 $X, X-Y$ 不独立.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

✎ **解:** 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},$$

于是 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=-1$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

10. 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

✎ **解:** 原方程两边对 x 求导得 $1+y'+\mathrm{e}^{2xy}(2y+2xy')=0$, 代入 $x=0, y=-1$ 得 $y'=1$, 所以曲线在 $(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

11. 设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为________.

✎ **解:** 由 $Q=\frac{800}{P+3}-2$ 可知 $P=\frac{800}{Q+2}-3$, 则利润函数为

$$L(Q)=\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q).$$

令 $\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{1600}{(Q+2)^2}-16=0\Rightarrow Q=8$, 且 $\frac{\mathrm{d}^2L(Q)}{\mathrm{d}Q^2}=-\frac{3200}{(Q+2)^3}<0$, 因此 $Q=8$ 时, 取得最大利润.

12. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1\right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为________.

✎ **解:** $V=2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\ln(1+x^2)-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right)$.

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

✎ **解:** 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14.随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$, Y 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY=$ ________.

✎ **解:** 由题意知 Y 的取值为 $0,1,2$, 且

$$P(Y=0)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X=3n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{7},$$
$$P(Y=1)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=3n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{8^n}=\frac{4}{7},$$
$$P(Y=2)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=3n+2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{8^n}=\frac{2}{7}.$$

所以 $EY=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 10 分**)

设 a,b 为常数, 且当 $n\to\infty$ 时, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a,b 的值.

✎ **解:** 直接利用等价无穷小得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1\right)$$
$$\sim \mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\mathrm{e}\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right]$$
$$=-\frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

因此 $a=1, b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

于是当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0,B=-1,C=0$, 那么 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 不是极值点; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A=1,B=-1,C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1, f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 设 $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

✎ **解:** (1) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$, 特征根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$, 通解为 $y=\mathrm{e}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$, 代入 $f(0)=0, f'(0)=-1$ 得 $C_1=1, C_2=0$, 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$.

(2) 直接计算得

$$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left(-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\right)\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$.

18.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

计算 $\displaystyle\iint\limits_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 令 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$, 则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$, 两边在区域 D 上积分可得

$$A=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D Ax\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (1-x^2(^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}
$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分. 于是 $f(x,y) = y\sqrt{1-x^2} + \dfrac{3\pi}{16}x$, 所以

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x\left(y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{3\pi}{16}\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{16}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3\pi^2}{128}.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

☛ **证明:** (1) 设 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|=|f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,2)$, 使得

$$
|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x-x_0}\right| = \frac{M}{x_0},\quad |f'(\xi_2)| = \left|\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}\right| = \frac{M}{2-x_0}.
$$

注意到

$$
\left|f'(\xi_1)\right| + \left|f'(\xi_2)\right| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2-x_0} \geqslant \frac{2M}{\sqrt{x_0(2-x_0)}} \geqslant M,
$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \dfrac{M}{x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\geqslant 1$; $|f'(\xi_2)| = \dfrac{M}{2-x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\leqslant 1$. 于是只能 $x_0=1$, 即 $|f(1)|=M$.

$$
M = |f(1)-f(0)| = \left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 M\,\mathrm{d}x = M,
$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)|\equiv M$, $x\in[0,1]$. 而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1)=0$, 因此 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** (1) 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+4=a+b\\1\times 4=ab\end{cases}, a\geqslant b\Rightarrow a=4, b=1.$

(2) 易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$. 当 $\lambda_1=0$ 时, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2=5$ 时, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$, 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2,-3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

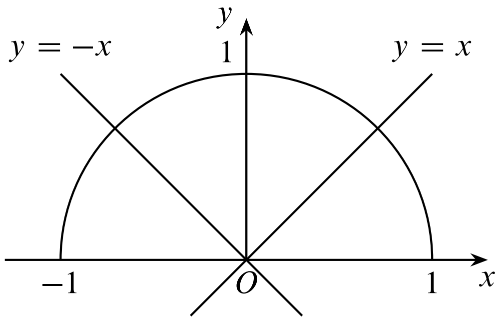
设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0\\0, & X-Y\leqslant 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0\\0, & X+Y\leqslant 0\end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布；

(2) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

✎ **解:** (1) 如图, 不难得知



第 22 题图

$$P(Z_1=0, Z_2=0) = P(X-Y\leqslant 0, X+Y\leqslant 0) = P(Y\geqslant X, Y\leqslant -X) = \frac{1}{4},$$

$$P(Z_1=0, Z_2=1) = P(X-Y\leqslant 0, X+Y> 0) = P(Y\geqslant X, Y> -X) = \frac{1}{2},$$

$$P(Z_1=1, Z_2=0) = P(X-Y> 0, X+Y\leqslant 0) = P(Y< X, Y\leqslant -X) = 0,$$

$$P(Z_1=1, Z_2=1) = P(X-Y> 0, X+Y> 0) = P(Y< X, Y> -X) = \frac{1}{4}.$$

因此 (Z_1, Z_2) 的联合分布为

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(2) 由 (Z_1, Z_2) 的联合分布律可得边缘分布律为

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

于是 $E(Z_1)=\frac{1}{4}, E(Z_2)=\frac{3}{4}, D(Z_1)=D(Z_2)=\frac{3}{16}, E(Z_1Z_2)=\frac{1}{4}$, 因此 Z_1, Z_2 的相关系数为

$$\rho_{Z_1,Z_2} = \frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}.$$

23.(**本题满分 11 分**)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T>t)$ 与 $P(T>s+t|T>s)$, 其中 $s>0, t>0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

✎ **解:** (1) 当 $s>0, t>0$ 时

$$P(T>t)=1-F(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},$$

$$\begin{aligned}P(T>s+t|T>s)&=\frac{P(T>s+t, T>s)}{P(T>s)}\\&=\frac{P(T>s+t)}{P(T>s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m-s^m}{\theta^m}}.\end{aligned}$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(t_i)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t^m} m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}\theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n>0$ 时, $\ln L(\theta)=-\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t^m+n\ln m+(m-1)\ln(t_1t_2\cdots t_n)-nm\ln\theta$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^n t_i^m-\frac{nm}{\theta}=0\Rightarrow\theta=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^m\right)^{\frac{1}{m}},$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.