2020 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ ( )

A. $b\sin a$ B. $b\cos x$ C. $b\sin f(a)$ D. $b\cos f(a)$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 则 ( )

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 是奇函数 B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 是奇函数 D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 是偶函数

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 ( )

A. $(-2,6)$ B. $(-3,1)$ C. $(-5,3)$ D. $(-17,15)$

5. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$ B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(AB)=0,\ P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\dfrac{3}{4}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{5}{12}$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2}\right)$, 则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

10. 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

11. 设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为________.

12. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

14. 随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$, Y 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. **(本题满分 10 分)**

设 a,b 为常数, 且当 $n\to\infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a,b 的值.

16. **(本题满分 10 分)**

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

17. **(本题满分 10 分)**

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 设 $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

18.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

计算 $\iint\limits_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0\\ 0, & X-Y\leqslant 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0\\ 0, & X+Y\leqslant 0\end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布;

(2) 求 Z_1,Z_2 的相关系数.

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T>t)$ 与 $P(T>s+t|T>s)$, 其中 $s>0, t>0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.