2020 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,\mathrm{d}t$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$

✎ **解:** 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)}{g(t)}=1$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

于是当 $x\to 0^+$ 时, 我们有

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3,$$
$$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^x \sqrt{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$
$$\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{\sin x} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\sin^3 x\sim\frac{1}{3}x^3,$$
$$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}\sim\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5,$$

正确答案选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 则 ( )

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

✎ **解:** 选项 A 和 B 不涉及到 $f(0)$ 是否有定义, 无法保证 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 处的连续性, 所以可导性更加得不到. 对于选项 C 和 D, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 那么由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 可知 $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 存在, 那么

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=A\cdot 0=0,$$

正确答案选 C, 而 D 显然可取反例 $f(x)=x$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0)=0$, $\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 则 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\big(x,y,f(x,y)\big)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\times\big(x,y,f(x,y)\big)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(x,y,f(x,y)\big)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\times\big(x,y,f(x,y)\big)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

✎ **解:** 由于函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 处可微, 且 $f(0,0)=0$ 那么有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}'(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\boldsymbol{n}\cdot\big(x,y,f(x,y)\big)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\big(x,y,f(x,y)\big)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 选 A.

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时, $|r|\geqslant R$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时, $|r|<R$

C. $|r|\geqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散

D. $|r|\leqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

✎ **解:** 注意到当 $|r|<R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 绝对收敛, 那么此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}r^{2n}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_nr^n|<+\infty,$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{2n}r^{2n}|$ 收敛. 也就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 是绝对收敛的, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 自然也是收敛的, 那么选项 A 的逆否命题正确, 因此正确答案选 A. 对于选项 B 和 C, 如果取 $a_{2n-1}=1, a_{2n}\equiv 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 对任意 r 均收敛. 对于选项 D, 如取 $a_n\equiv 1$, 那么 $R=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 在 $r=R=1$ 处发散.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则 ( )

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$

B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$

D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

✎ **解:** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$ 说明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}^{-1}=\boldsymbol{BP}$, 选 B, 其他选项易知都不对.

6. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}, i=1,2,3$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示 B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示 D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

✎ **解:** L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 这两条直线交于一点, 说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 点 $P_1(a_2,b_2,c_2)\in L_1$, $P_2(a_3,b_3,c_3)\in L_2$, 由于 L_1,L_2 共面, 所以

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3-a_2\\b_1&b_2&b_3-b_2\\c_1&c_2&c_3-c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 选 C. 而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可能是零向量, 因此 A 和 B 均不对.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\dfrac{3}{4}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{5}{12}$

✎ **解:** 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC)=\frac{7}{12},\\
P(A\bar{B}\bar{C})&=P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\
&=1-P(B\cup C)-[1-P(A\cup B\cup C)]=P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\\
&=\frac{7}{12}-P(B)-P(C)+P(BC)=\frac{1}{6},\\
P(\bar{A}B\bar{C})&=\frac{7}{12}-P(A)-P(C)+P(AC)=\frac{1}{6},\\
P(\bar{A}\bar{B}C)&=\frac{7}{12}-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{12},
\end{aligned}$$

因此 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$, 选 D.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)$ 的近似值为 ( )

A. $1-\Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1-\Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$

解: 注意到 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}\sim B\left(100,\dfrac{1}{2}\right)$, 那么 $EY=50, DY=25$, 且由中心极限定理知 $\dfrac{Y-50}{5}$ 近似服从标准正态分布, 于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)=P(Y\leqslant 55)=P\left(\frac{Y-50}{5}\leqslant 1\right)\approx\Phi(1),$$

选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=$________.

解: 通分以后利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(1+x)^2}-\mathrm{e}^x\right)=-1.\end{aligned}$$

10.设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

解: 由参数方程求导公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t=1$ 可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\,(a>0)$, 且 $f(0)=m, f'(0)=n$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解: 微分方程 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$. 如果 $a\geqslant 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}<0$, 此时方程的通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

如果 $0<a<2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4-a^2}\mathrm{i}}{2}$, 特征根的实部分为负, 此时方程的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

总之一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 那么

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)]\,\mathrm{d}x = -\big[f'(x) + af(x)\big]\Big|_0^{+\infty} = n + am.$$

12.设函数 $f(x,y) = \int_0^{xy} \mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} =$________.

✎ **解:** 令 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x = x\mathrm{e}^{x^2y^2}$, 于是 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathrm{e}^{x^3y^2} + 3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$, 代入 $(x,y) = (1,1)$ 得 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)} = 4\mathrm{e}$.

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$________.

✎ **解:** 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14.设 X 服从区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\mathrm{Cov}(X,Y) =$________.

✎ **解:** X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 显然 $E(X) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = E(X\sin X) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{216}$.

16.(本题满分 10 分)

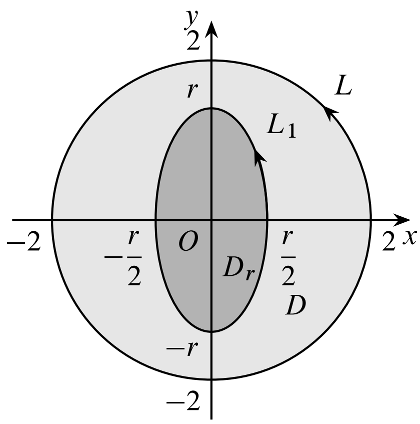
计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{4x - y}{4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x + y}{4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

✎ **解:** 令 $P(x, y) = \dfrac{4x - y}{4x^2 + y^2}, Q(x, y) = \dfrac{x + y}{4x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} = 0.$$

如图, 取闭曲线 $L_1 : 4x^2 + y^2 = r^2$, r 充分小使得 L_1 在 L 所包围的区域内, 方向为逆时针. 设 L 与 L_1 所围成的区域为 D, L_1 所围成的椭圆区域为 D_r, 则利用格林公式, 可知原曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L - L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{L_1} (4x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r} [1 - (-1)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r^2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2}r \cdot r = \pi. \end{aligned}$$



第 16 题图

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n + 1)a_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

✎ **解:** *方法一* 首先有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n + 1}{n + \frac{1}{2}}\right| = 1$, 因此幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 即当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 现在令 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则当 $|x| < 1$ 时,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a x_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2}\right)a_n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + xS'(x) + \frac{1}{2}S(x).$$

因此 $S'(x) - \dfrac{1}{2(1-x)}S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, 解此一阶线性微分方程得 $S(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}} - 2$. 再由 $S(0) = C - 2 = 0$ 得 $C = 2$, 因此和函数 $S(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2, |x| < 1$.

方法二　收敛半径同方法一, 直接求和函数. 注意到

$$a_n = \frac{n-\frac{1}{2}}{n}a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n}a_n = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{3}{4}a_1 = 2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

那么当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin^2 t}{1 - x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-x\sin^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + (1-x)\sin^2 t} - 2 \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{1 + (1-x)\tan^2 t} - 2 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\arctan\left(\sqrt{1-x}\tan t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\pi}{2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.
\end{aligned}$$

注: 如果熟记麦克劳林级数

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, -1 < x < 1$$

的话, 方法二的计算会更快.

18.(**本题满分 10 分**)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}\,(1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma}[xf(xy) + 2x - y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + [yf(xy) + 2y + x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + [zf(xy) + z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 令 $F(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$, 那么

$$F'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, F'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, F'_z = 1.$$

曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为圆环 $D_{xy} = \{(x,y) : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 则

$$I = \iint_{\Sigma}[xf(xy) + 2x - y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + [yf(xy) + 2y + x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + [zf(xy) + z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{\Sigma} \left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{F_x'}{F_z'}+[yf(xy)+2y+x]\frac{F_y'}{F_z'}+zf(xy)+z\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+[yf(xy)+2y+x]\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+zf(xy)+z\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{14}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

☛ **证明:** (1) 设 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|=|f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,2)$, 使得

$$|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x-x_0}\right|=\frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)|=\left|\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}\right|=\frac{M}{2-x_0}.$$

注意到

$$\left|f'(\xi_1)\right|+\left|f'(\xi_2)\right|=\frac{M}{x_0}+\frac{M}{2-x_0}\geqslant\frac{2M}{\sqrt{x_0(2-x_0)}}\geqslant M,$$

那么取 $|f'(\xi)|=\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\geqslant 1$; $|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\leqslant 1$. 于是只能 $x_0=1$, 即 $|f(1)|=M$.

$$M=|f(1)-f(0)|=\left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 M\,\mathrm{d}x=M,$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)|\equiv M, x\in[0,1]$. 而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1)=0$, 因此 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** (1) 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+4=a+b\\ 1\times 4=ab\end{cases}, a \geqslant b \Rightarrow a=4, b=1.$

(2) 易知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=0, \lambda_2=5$. 当 $\lambda_1=0$ 时, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2=5$ 时, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0 & \\ & 5\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$, 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=-3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2,-3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3=0)=P(X_3=1)=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明:随机变量 Y 服从标准正态分布.

✎ **解:** (1) (X_1, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=P(X_1\leqslant x, Y\leqslant y)=P(X_1\leqslant x, Y\leqslant y)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(X_3=0, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) + P(X_3=1, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) \\
&= P(X_3=0, X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant y) + P(X_3=1, X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y) \\
&= \frac{1}{2}P(X_1 \leqslant x)P(X_2 \leqslant y) + \frac{1}{2}P(X_1 \leqslant \min\{x,y\}) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x), & x \leqslant y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y), & x > y \end{cases}.
\end{aligned}
$$

(2) Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$, 因此 Y 服从标准正态分布.

23.**(本题满分 11 分)**

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$
F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

✎ **解:** (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$
P(T > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},
$$

$$
\begin{aligned}
P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\
&= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = \mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}.
\end{aligned}
$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \dfrac{m t^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.
$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m + n\ln m + (m-1)\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm\ln\theta$, 令

$$
\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n} t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^m\right)^{\frac{1}{m}},
$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.