2020 年考研数学二模拟卷二

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: ________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{1+x^2}{x}$ ( )

(A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线 (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线

(C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线 (D) 只有一条斜渐近线

解 首先

$$\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1+x^2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t^2}}=0,$$

因此曲线没有垂直渐近线. 不难得到曲线有一条斜渐近线 $y=x$, 选 D.

2. 下列广义积分收敛的是 ( )

(A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (B) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ (C) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$ (D) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

解 选项 A, 是一个无穷积分加上一个瑕积分, 其中无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty$, 因此原积分发散. 选项 B, 由于当 $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}\sim\dfrac{1}{x^4}$, 因此由比较判别法知选项 B 收敛, 选 B. C 选项是一个瑕积分, 且当 $x\to0$ 时, $\dfrac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, 注意到 $\dfrac{3}{2}>1$, 所以积分发散. 选项 D 是一个瑕积分, 且当 $x\to1$ 时, $\dfrac{1}{\ln x}\sim\dfrac{1}{x-1}$, 因此积分发散.

3. 设 $u=x^{y^z}$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)}=$ ( )

(A) $4\ln3$ (B) $8\ln3$ (C) $324\ln3$ (D) $324\ln2\ln3$

解 $u=\mathrm{e}^{y^z\ln x}$, 于是 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{y^z\ln x}zy^{z-1}\ln x$, 因此 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)}=324\ln3$, 选 C.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 则 ( )

(A) 当 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界

(B) 当 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\infty$
(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

解 对选项 A, 如果 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 设 $|f'(x)|<M$, 则对任意 $x\in(0,1)$ 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\\&=|f'(\xi)|\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|<M+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|,\end{aligned}$$

则 $f(x)$ 一定有界, 因此选 A. 选项 B 和 D 可取反例 $f(x)=\sqrt{x}$, 选项 C 的反例比较复杂, 取 $f(x)=\ln x+\sin\ln x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$, 而 $f'(x)=\dfrac{1+\cos\ln x}{x}$, 它在 $x=0$ 的右邻域内无穷次取到零, 因此它不是无穷大.

5. 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(\alpha>1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )

(A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

解 首先当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f_x'(x,y)=2x(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, 而因为 $\alpha>1$, 则 $\dfrac{1+\alpha}{2}>1$, 故

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x}=0.$$

且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}=0=f_x'(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 关于 x 的偏导数在 $(0,0)$ 处来连续, 同理关于 y 的偏导数也在这点连续, 选 C.

6. 设平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$, 记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D\left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\right]\mathrm{d}\sigma,$$

则有 ( )

(A) $I_2>I_1>I_3$ (B) $I_1>I_2>I_3$ (C) $I_1>I_3>I_2$ (D) $I_2>I_3>I_1$

解 在区域 D 上, $\cos x^2\sin y^2\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\leqslant 0$, 且等号只在原点处成立, 因此 $I_2>0, I_3<0$. 根据被积函数的奇偶性和区域对称性可知

$$I_1=\iint\limits_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

因此 $I_3<I_1<I_2$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 ( )

(A) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$ (B) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{AB}|=0$
(C) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$ (D) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{AB}|=0$

解 当 $m>n$ 时, $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant n<m$, 而 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 m 阶矩阵, 所以它不满秩, 即 $|\boldsymbol{AB}|=0$, 选 B.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 如果对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=n$

(C) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解

(D) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 †

解 对选项 A, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的, 因此 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, A 正确. 对选项 B, 只要 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$ 就有 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, 那么齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 所以 $\boldsymbol{A}$ 列满秩, B 正确. 对选项 C, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵, 考虑矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩有

$$m=r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant m,$$

因此有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m$, 所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 一定有解, 选项 C 正确. 对选项 D, $\boldsymbol{A}$ 是列满秩, 那么 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 可能有唯一解, 也可能无解, 错误的选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=$________.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}.$

10. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}-1\right)=\left.\frac{x\ln x}{1+x}\right|_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=-\ln 2$†.

11. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大点处的曲率半径为________.

解 要想曲率最大, 也就是对应的曲率半径最小, 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上任一点 (x,y) 处的曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^x}=\left[\frac{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^3}{\mathrm{e}^{2x}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

令 $t=\mathrm{e}^{2x}>0$, $f(t)=\dfrac{(1+t)^3}{t}=t^2+3t+3+\dfrac{1}{t}$, 则

$$f'(t)=2t+3-\frac{1}{t^2}=\frac{2t^3+3t^2-1}{t^2}=\frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}.$$

易知 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{1}{2}$ 处取最小值 $\dfrac{27}{4}$, 此时对应的最小曲率半径为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

12. 已知动点 $M(x,y)$ 在 xOy 面上运动方程为 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$, 则在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 动点 M 的运动速率为________.

† 这里对选项 D 进行了更改, 否则原题中所有选项都对.

† 第一步分部积分的时候必须后面要减去 1, 保证分部积分的合理进行, 否则会发散.

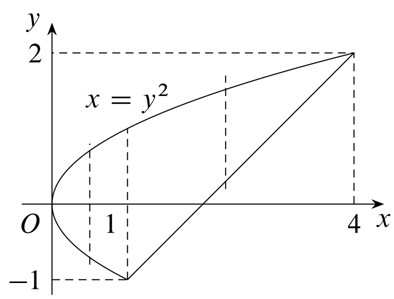
解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin t, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\cos t$, 于是任意时刻 t 时的速率

$$v=\sqrt{[v'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}=\sqrt{2-2\cos t}=2\sin\frac{t}{2},$$

那么当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $v=\sqrt{2}$.

13. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的积分次序的结果为________.

解 积分区域为 $-1<y<2, y^2<x<y+2$, 画出区域图改为 X 区域的积分为



第 13 题图

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 其特征值为 $1,2,0$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行得到 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列得到 $\boldsymbol{C}$, 则 $|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}|=$________.

解 由题意知 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$, 因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 相似, 它们有相同的特征值, 于是 $|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}|=6$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求其导数.

解 直接计算可知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-(x+b)}, & x>0\end{cases}.$$

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\mathrm{e}^{-b}=f(0)=\dfrac{1}{2}, b=\ln 2$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}=f'_+(0)=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=-1,$$

因此 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$.

16.（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\arctan\sqrt{x-1}$, 则 $\sqrt{x-1}=\tan t, x=\sec^2 t, \mathrm{d}x=2\sec^2 t\tan t$, 则原积分

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\tan t\cdot t}{\sec^2 t}\cdot 2\sec^2 t\tan t\,\mathrm{d}t=2\int t\tan^2 t\,\mathrm{d}t=2\int(t\sec^2 t-t)\,\mathrm{d}t\\&=-t^2+2\int t\,\mathrm{d}(\tan t)=-t^2+2t\tan t+2\ln|\cos t|+C\\&=-\arctan^2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x+C.\end{aligned}$$

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, f(x)>0$, 且满足

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}&=\exp\left(\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h}\right)\\&=\exp\left(\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h\cos^2 x}\cos^2 x\right)\\&=\exp\left([\ln f(x)]'\cos^2 x\right)=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x}.\end{aligned}$$

由条件得

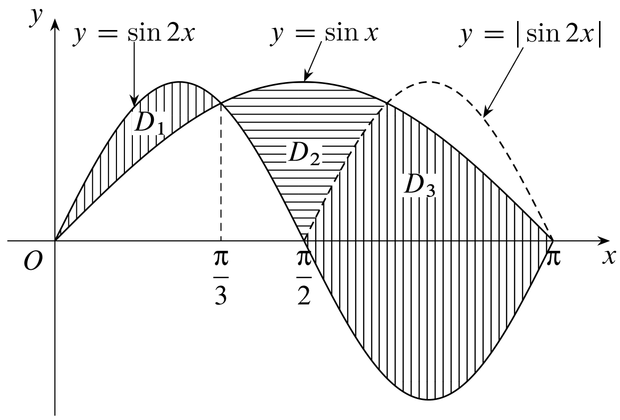
$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x=x\cos^2 x+\tan x, \frac{f'(x)}{f(x)}=x+\tan x\sec^2 x.$$

积分可得 $\ln|f(x)|=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln|C|$, 即 $f(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0)=1$ 得 $C=1$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x)=(x+\tan x\sec^2 x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$.

18.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\sin 2x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

解 D 的图形如图所示, 将区域适当分块, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, 记 D_1, D_2, D_3 三部分旋转所得旋转体的体积分别为 V_1, V_2, V_3, 则 $V = V_1 + V_2 + V_3$, 其中



第 18 题图

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 2x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(1-\cos 4x) - (1-\cos 2x)]\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x - \cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi,$$
$$V_2 = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 x - \sin^2 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos 4x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi,$$
$$V_3 = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

因此 $V = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}\pi + \dfrac{\pi^2}{4}$.

19.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}\ (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\left(\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}-\sqrt{4a^2-r^2}\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\left(\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+2a^2\arcsin\frac{r}{2a}\right)\right]\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}\right)\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

20.（本题满分 11 分）

证明: 对每个 $x>0$, 存在唯一的 $\xi=\xi(x)\in(0,1)$ 使得 $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$, 并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi$.

解 对任意 $x>0$, 由积分中值定理知存在 $\eta=\eta(x)\in(0,x)$, 使得

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\eta^2},$$

令 $\xi=\dfrac{\eta^2}{x^2}\in(0,1)$, 则 $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$. 如果存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,x)$, 使得 $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi_1 x^2}=x\mathrm{e}^{\xi_2 x^2}$, 显然有 $\xi_1=\xi_2$, 唯一性得证.

由 $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$ 可得 $\xi=\dfrac{1}{x^2}\left(\ln\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-\ln x\right)$, 那么

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\xi &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\ln\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}} = 1.
\end{aligned}$$

21.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且

$$f(0)f(1)>0,\ f''(x)>0,\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:

(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有两个零点;

(2) 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 (1) 由 $f(0)f(1) > 0$ 知 $f(0), f(1)$ 同号, 如果 $f(0) < 0, f(1) < 0$, 结合 $f''(x) > 0$ 知 $f(x)$ 为凹函数, 那么 $f(x) < 0, x \in [0,1]$, 这与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾, 因此 $f(0) > 0, f(1) > 0$.

$f(x)$ 不可能在 $(0,1)$ 内恒为正, 因此存在 $\eta \in (0,1)$ 使得 $f(\eta) < 0$, 于是由零点定理知存在 $\eta_1 \in (0,\eta), \eta_2 \in (\eta,1)$ 使得 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$. 如果还存在一点 η_3 使得 $f(\eta_3) = 0$, 则必然存在一点 $\zeta \in (0,1)$ 使得 $f''(\zeta) = 0$, 矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有两个零点.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0) = F(1) = 0, F''(x) = f'(x)$. 由 (1) 可知, $f(x)$ 在 $(0,\eta_1), (\eta_2,1)$ 内为正, 在 (η_1,η_2) 内为负, 因此 $F(\eta_1 > 0), F(\eta_2) < 0$, 于是存在 $c \in (\eta_1,\eta_2)$ 使得 $F(c) = 0$. 令

$$G(x) = F(x)\mathrm{e}^{-x}, G'(x) = [F'(x) - F(x)]\mathrm{e}^{-x}$$

$G(0) = G(c) = G(1) = 0$, 于是存在 $\xi_1 \in (0,c), \xi_2 \in (c,1)$ 使得 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$, 即 $F'(\xi_1) - F(\xi_1) = F'(\xi_2) - F(\xi_2) = 0$. 再令 $H(x) = [F'(x) - F(x)]\mathrm{e}^{x}$, 则 $H(\xi_1) = H(\xi_2) = 0$, 于是存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,1)$ 使得

$$H'(\xi) = [F''(\xi) - F(\xi)]\mathrm{e}^{\xi} = 0,$$

即 $F''(\xi) - F(\xi) = 0$, 也就是 $f'(\xi) = \int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

22.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a, b, c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

解 (1) 由题意首先有 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 2$, 且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2, 于是

$$|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 1 & 1\\1 & 2 & c\end{vmatrix} = 3c = 0, c = 0.$$

同理, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2| = 3a + 3 = 0$ 得 $a = -1$, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2| = 3b - 3 = 0$ 得 $b = 1$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此所求的矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

23.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-8a=0,a=0$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$. 对特征值 $\lambda_1=0$, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 二次型化为标准形 $2y_2^2+2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$ 即为方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases},$$

此方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)=(k,-k,0),k\in\mathbb{R}$.