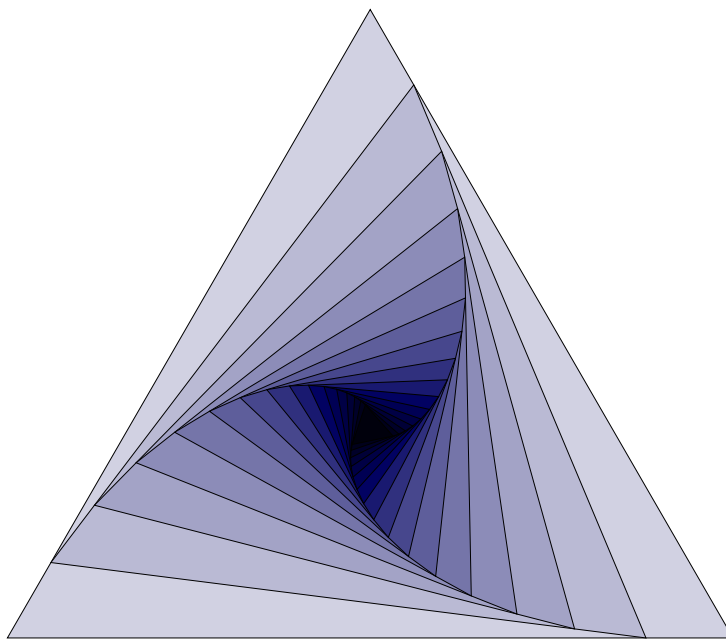


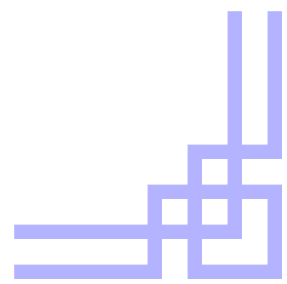
2006–2020 年考研数学二真题解答

向禹◎著

第一版



[yuxtech.github.io](http://yuxtech.github.io)





# 目 次

<b>1 2006 年考研数学二</b>	<b>1 5 2010 年考研数学二</b>	<b>38</b>
一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	38
二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	40
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 4	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 41	
<b>2 2007 年考研数学二</b>	<b>10 6 2011 年考研数学二</b>	<b>46</b>
一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分. . . . .	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	46
二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	48
三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分. 14	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 49	
<b>3 2008 年考研数学二</b>	<b>20 7 2012 年考研数学二</b>	<b>55</b>
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	55
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	57
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 23	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 58	
<b>4 2009 年考研数学二</b>	<b>29 8 2013 年考研数学二</b>	<b>64</b>
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	64
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	66
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 33	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分. 67	

<b>9 2014 年考研数学二</b>	<b>73</b>	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	102
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	73	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	103
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	75	<b>13 2018 年考研数学二</b>	<b>108</b>
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	76	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	108
<b>10 2015 年考研数学二</b>	<b>81</b>	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	110
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	81	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	111
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	84	<b>14 2019 年考研数学二</b>	<b>117</b>
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	84	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	117
<b>11 2016 年考研数学二</b>	<b>89</b>	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	119
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	89	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	120
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	92	<b>15 2020 年考研数学二</b>	<b>126</b>
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	93	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	126
<b>12 2017 年考研数学二</b>	<b>100</b>	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分. . . . .	129
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分. . . . .	100	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	130

# 1 2006 年考研数学二

## 一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. 曲线  $y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}$  的水平渐近线为\_\_\_\_\_.

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x} = \frac{1}{5}$ , 故曲线的水平渐近线方程为  $y = \frac{1}{5}$ .

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

解 根据连续的定义, 由洛必达法则得  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$ .

3. 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$ \_\_\_\_\_.

解  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ .

4. 微分方程  $y' = \frac{y(1-x)}{x}$  的通解为\_\_\_\_\_.

解 原方程变量分离得  $\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x} dx$ , 解得  $\ln |y| = \ln |Cx| - \ln e^x$ , 即  $y = Cx e^{-x}$  ( $x \neq 0$ ),  $C$  为任意常数.

5. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $y = 1 - x e^y$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

解 当  $x = 0$  时,  $y = 1$ , 原方程两边对  $x$  求导得  $y' = -e^y - x e^y y'$ , 代入  $x = 0, y = 1$  得  $y'(0) = -e$ .

6. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  是二阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $|B| =$ \_\_\_\_\_.

解 由条件可得

$$B(A - E) = 2E \Rightarrow |B(A - E)| = |2E| \Rightarrow |B| |A - E| = 2^2 = 4,$$

因为  $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , 所以  $|B| = 2$ .

## 二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则 ( )  
 A.  $0 < dy < \Delta y$     B.  $0 < \Delta y < dy$     C.  $\Delta y < dy < 0$     D.  $dy < \Delta y < 0$

解 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0, \Delta x > 0$ , 即  $0 < dy < \Delta y$ , 选 A.

8. 设  $f(x)$  是奇函数, 除  $x = 0$  外处处连续,  $x = 0$  是其第一类间断点, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是 ( )  
 A. 连续的奇函数    B. 连续的偶函数  
 C. 在  $x = 0$  间断的奇函数    D. 在  $x = 0$  间断的偶函数

解 首先, 可积函数的变上限积分一定是连续的, 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{t=-u}{=} \int_0^x f(-u) d(-u) = \int_0^x f(u) du = F(x),$$

因此  $F(x)$  是连续的偶函数, 选 B.

9. 设函数  $g(x)$  可微,  $h(x) = e^{1+g(x)}, h'(1) = 1, g'(1) = 2$ , 则  $g(1)$  等于 ( )  
 A.  $\ln 3 - 1$     B.  $-\ln 3 - 1$     C.  $-\ln 2 - 1$     D.  $\ln 2 - 1$

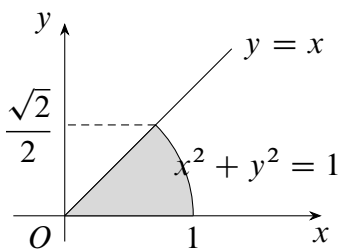
解  $h(x) = e^{1+g(x)}$  两边对  $x$  求导得  $h'(x) = e^{1+g(x)} g'(x)$ , 令  $x = 1$ , 结合  $h'(1) = 1, g'(1) = 2$ , 解得  $g(1) = -\ln 2 - 1$ , 选 C.

10. 函数  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$  满足的一个微分方程是 ( )  
 A.  $y'' - y' - 2y = 3x e^x$     B.  $y'' - y' - 2y = 3e^x$   
 C.  $y'' + y' - 2y = 3x e^x$     D.  $y'' + y' - 2y = 3e^x$

解 由所给解的形式知, 原微分方程对应的齐次方程有特征根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , 即对应的特征方程为  $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 故对应的齐次方程为  $y'' + y' - 2y = 0$ . 又  $y = x e^x$  为原微分方程的一个特解, 而  $\lambda_1$  为单特征根, 那么非齐次方程的右端应具有形式  $f(x) = k e^x$ , 正确答案选 D.

11. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  等于 ( )  
 A.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$     B.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$   
 C.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$     D.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

解 如图, 积分区域是一个 Y 型区域, 则原式 =  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ , 选 C.



第 11 题图

12. 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

- A. 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$
- B. 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
- C. 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$
- D. 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解 令  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ , 并记对应  $x_0, y_0$  的参数  $\lambda$  的值为  $\lambda_0$ , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

那么当  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$  时, 必有  $\lambda_0 \neq 0, \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 消去  $\lambda_0$  得

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

注意到  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ , 于是  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 选 D.

13. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均为  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 下列选项正确的是 ( )

- A. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关
- B. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关
- C. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关
- D. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关

解 注意到  $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ , 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s,$$

因此  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关, 选 A.

14. 设  $A$  为三阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的  $-1$  倍加到第

2 列得  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则 ( )

$$A. C = P^{-1}AP \quad B. C = PAP^{-1} \quad C. C = P^TAP \quad D. C = PAP^T$$

解 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PAP^{-1},$$

因此选 B.

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

试确定常数  $A, B, C$  的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

其中  $o(x^3)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x^3$  高阶的无穷小.

解 将  $e^x$  的泰勒展开式  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  代入题设等式得

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right](1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

展开整理得

$$1 + (B + 1)x + \left(B + C + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3),$$

比较两边同次幂的系数可得

$$\begin{cases} B + 1 = A \\ B + C + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 10 分)

求  $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$ .

解 首先分部积分得

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= - \int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -e^{-x} \arcsin e^{-x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx \\ &= -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}. \end{aligned}$$



令  $t = \sqrt{1 - e^{2x}}$ , 则  $x = \frac{1}{2} \ln(1 - t^2)$ ,  $dx = -\frac{t}{1 - t^2} dt$ , 那么

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} &= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + C, \end{aligned}$$

因此原积分  $= -e^{-x} \arcsin e^x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + C$ .

17.(本题满分 10 分)

设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$ .

解 区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 因此  $\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0$ , 于是

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

18.(本题满分 12 分)

设数列  $x_n$  满足  $0 < x_1 < \pi$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

(1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限;

(2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

解 (1) 因为  $x_2 = \sin x_1 \in (0, 1]$ , 那么归纳可知当  $n \geq 2$  时, 均有  $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n$ , 即数列  $\{x_n\}$  单调递减且有下界, 因此极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  存在. 在  $x_{n+1} = \sin x_n$  中令  $n \rightarrow \infty$  可得  $a = \sin a$ , 此方程的唯一解为  $a = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2) 令  $t = x_n \rightarrow 0$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{t^2} \ln \frac{\sin t}{t} \right) \\ &= \exp \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left( \frac{\sin t - t}{t} + 1 \right) \right] \\ &= \exp \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \right) = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

证明: 当  $0 < a < b < \pi$  时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

证 令  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in (0, \pi)$ , 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi, \quad f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = \cos x + x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

因此当  $x \in (0, \pi)$  时,  $f'(x)$  单调递减,  $f'(x) > f'(\pi) = 0$ , 则  $f(x)$  单调增加, 于是当  $0 < a < b < \pi$  时,  $f(b) > f(a)$ , 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

20.(本题满分 12 分)

设函数  $f(u)$  在  $(0, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  满足等式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

(1) 验证  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ ;

(2) 若  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 求函数  $f(u)$  的表达式.

解 (1) 令  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 由复合函数偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$= f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

代入  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  以及  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  得  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ .

(2) 令  $f'(u) = p$ , 则  $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}$ , 解得  $\ln|p| = \ln\left|\frac{C}{u}\right|$ , 所以  $f'(u) = p = \frac{C}{u}$ . 由  $f'(1) = 1$  知  $C = 1$ , 于是  $f(u) = \ln u + C_2, u > 0$ . 再由  $f(1) = 0$  知  $C_2 = 0$ , 于是  $f(u) = \ln u, u > 0$ .

21.(本题满分 12 分)

已知曲线  $L$  的方程为  $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ .

(1) 讨论  $L$  的凹凸性;

(2) 过点  $(-1, 0)$  引  $L$  的切线, 求切点  $(x_0, y_0)$ , 并写出切线的方程;

(3) 求此切线与  $L$  (对应于  $x \leq x_0$  的部分) 及  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

解 (1) 注意到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \left( -\frac{2}{t^2} \right) / (2t) = -\frac{1}{t^3} < 0, t \geq 0,$$

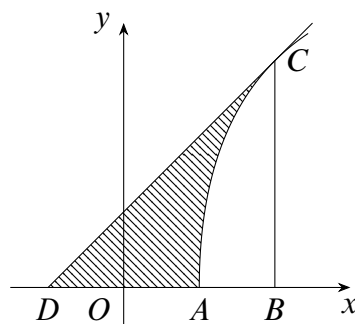
因此曲线  $L$  是凸的.

(2) 由 (1) 知, 切线的方程为  $y - 0 = \frac{2-t}{t}(x+1)$ . 设  $x_0 = t_0^2 + 1, y_0 = 4t_0 - t_0^2$ , 则

$$4t_0 - t_0^2 = \frac{2-t_0}{t_0}(t_0^2 + 2), \text{ 即 } 4t_0 - t_0^2 = (2-t_0)(t_0^2 + 2).$$

整理得  $t_0^2 + t_0 - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$  或  $-2$  (舍去). 将  $t_0 = 1$  代入参数方程, 得切点为  $(2, 3)$ , 故切线方程为  $y = x + 1$ .

(3) 所求平面图形如图所示, 其中各点的坐标分别为  $A(1, 0), B(2, 0), C(2, 3), D(-1, 0)$ . 设曲线  $L$  的方程为  $y = f(x)$ , 则所求的面积为



第 21 题图

$$S = S_{\triangle BCD} - \int_1^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt$$

$$= \frac{7}{3}.$$

22.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$  有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵  $A$  的秩  $r(A) = 2$ ;

(2) 求  $a, b$  的值及方程组的通解.

解 (1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的两个线性无关的解, 因此  $n - r(A) \geq 2$ , 即  $r(A) \leq 2$ . 又显然矩阵  $A$  中有 2 阶子式不为 0, 又有  $r(A) \geq 2$ , 故  $r(A) = 2$ .

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{pmatrix}.$$

由题设和第一问知,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2$ , 则

$$4 - 2a = b + 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3.$$

此时  $\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 那么  $\boldsymbol{\alpha} = (2, -3, 0, 0)^T$  是  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系,

$\boldsymbol{\eta}_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \boldsymbol{\eta}_2 = (4, -5, 0, 1)^T$  是  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系, 所以方程组的通解为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

23.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的各行元素之和均为 3, 向量  $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的两个解.

(1) 求  $\mathbf{A}$  的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵  $\mathbf{Q}$  与对角矩阵  $\boldsymbol{\Lambda}$ , 使得  $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$ .

解 (1) 因为  $\mathbf{A}$  的各行元素之和为 3, 即有

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^T$  是  $\mathbf{A}$  的属于 3 的特征向量. 又根据题意,  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的属于  $\lambda = 0$  的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值是 3, 0, 0.

特征值  $\lambda = 3$  的特征向量为  $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$ ;

特征值  $\lambda = 0$  的特征向量为  $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T, k_1, k_2$  不全为零.

(2) 先对  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$  进行施密特正交化,

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

单位化得  $\boldsymbol{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 令

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

则  $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$ .

## 2 2007 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 ( )
- A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

解 当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln \left( \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}, \\ \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 &\sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &\sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

因此选 B.

2. 函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的第一类间断点是  $x =$  ( )

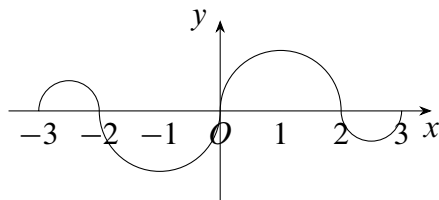
- A. 0      B. 1      C.  $-\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

解  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的无定义点, 即间断点为  $x = 0, 1, \pm\frac{\pi}{2}$ , 不难得知  $x = 1, \pm\frac{\pi}{2}$  均为第二类的无穷间断点, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \cdot (-1) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

因此  $x = 0$  为第一类的跳跃间断点, 选 A.

3. 如图, 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2]$ ,  $[2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0]$ ,  $[0, 2]$  的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 则下列结论正确的是 ( )



第 3 题图

- A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$                       B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$   
 C.  $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$                       D.  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

解 根据定积分的几何意义知,  $F(2)$  是半径为 1 的半圆面积,  $F(2) = \frac{1}{2}\pi$ ,  $F(3)$  是两个半圆的面积之差,  $F(3) = \frac{1}{2}\pi \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2)$ ,

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = -\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 下列命题错误的是 ( )
- A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$
- B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$
- C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$
- D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$

解 A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由  $f(x)$  的连续性知  $f(0) = 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则

$$f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例  $f(x) = |x|$  说明 D 选项错误, 选 D.

5. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  渐近线的条数为 ( )
- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = \infty$ , 所以  $x = 0$  为垂直渐近线. 又  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$ , 所以  $y = 0$  为水平渐近线. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以有斜渐近线  $y = x$ , 选 D.

6. 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $f''(x) > 0$ , 令  $u_n = f(n), n = 1, 2, \dots$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛  
 B. 若  $u_1 > u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散  
 C. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必收敛  
 D. 若  $u_1 < u_2$ , 则  $\{u_n\}$  必发散

解 如果  $u_2 > u_1$ , 即  $f(2) > f(1)$ , 由于  $f''(x) > 0$ , 那么  $f'(x)$  单调递增, 对任意正整数  $n$ ,

$$f(n+2) - f(n+1) = f'(\xi_1) > f'(\xi_2) > f(n+1) - f(n),$$

因此  $f(n)$  单调递增, 且  $f'(x) > f(2) - f(1), x \geq 2$ , 那么

$$f(n) - f(2) = f'(\xi)(n-2) > [f(2) - f(1)](n-2),$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$ , 即  $\{u_n\}$  发散, 选 D. 对于 A 和 B 可分别取  $f(n) = n^2$  和  $f(n) = \frac{1}{n}$  作为反例.

7. 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微的一个充分条件是 ( )

- A.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$   
 B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$   
 C.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$   
 D.  $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$

解 选项 A, B 分别是连续和偏导数的定义, 这都不是可微的充分条件, 对于 D 选项可取反例  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ , 可知  $f(x, y)$  满足条件, 但  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不连续. 正确答案选 C, 事实上, C 选项就是可微的定义,

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = 0 \cdot f'_x(0, 0)x + 0 \cdot f'_y(0, 0)y + o(\rho),$$

其中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 因此选 C.



8. 设函数  $f(x, y)$  连续, 则二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$  等于 ( )

- A.  $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$       B.  $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$   
 C.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$       D.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx$

解 积分区域  $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y < 1$ , 也可表示为

$$0 \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi,$$

因此  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$ , 选 B.

9. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

- A.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$       B.  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$   
 C.  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$       D.  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

解 不难知 A 中三个向量的和为  $\mathbf{0}$ , 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

10. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  与  $B$  ( )

- A. 合同, 且相似      B. 合同, 但不相似  
 C. 不合同, 但相似      D. 既不合同, 也不相似

解 由  $|\lambda E - A| = 0$  得  $A$  的特征值为  $0, 3, 3$ , 而  $B$  的特征值为  $0, 1, 1$ , 从而  $A$  与  $B$  合同而不相似, 选 B.

## 二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$  \_\_\_\_\_.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x + x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

12. 曲线  $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$  上对应于  $t = \frac{\pi}{4}$  的点处的法线斜率为\_\_\_\_\_.

解 因为  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t - 2\cos t \sin t}$ , 于是  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ , 故法线的斜率为  $1 + \sqrt{2}$ .

13. 设函数  $y = \frac{1}{2x+3}$ , 则  $y^{(n)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

解  $y = (2x+3)^{-1}$ ,  $y' = -1 \cdot 2(2x+3)^{-2}$ ,  $y'' = -1 \cdot (-2)2^2(2x+3)^{-3}$ , 归纳可知  $y^{(n)} = (-1)^n n! 2^n (2x+3)^{-n-1}$ , 从而  $y^{(n)}(0) = \frac{1}{3} (-1)^n n! \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

14. 二阶常系数非齐次线性方程  $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的通解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

解 齐次方程  $y'' - 4y' + 3y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , 因此齐次方程的通解为  $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ . 设非齐次线性微分方程  $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$  的特解为  $y^* = k e^{2x}$ , 代入可得  $k = -2$ , 因此原方程的通解为  $y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$ .

15. 设  $f(u, v)$  是二元可微函数,  $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ \_\_\_\_\_.

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$ , 于是有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left( -\frac{y}{x^2} f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) - y \left( \frac{1}{x} f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2 \right) = -\frac{2y}{x} f'_1 + \frac{2x}{y} f'_2.$$

16. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为\_\_\_\_\_.

解 直接计算可得  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 故  $r(A^3) = 1$ .

### 三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  是区间  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中  $f^{-1}$  是  $f$  的反函数, 求  $f(x)$ .

解 等式两边对  $x$  求导得

$$x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = f^{-1}[f(x)]f'(x) = xf'(x),$$

因此  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ ,  $f(x) = \ln(\sin x + \cos x) + C$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ . 当  $x = 0$  时,

$$\int_0^{f(0)} f^{-1}(t) dt = 0.$$

注意到  $f^{-1}(t) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , 因此必有  $f(0) = 0$ , 即  $C = 0$ , 所以  $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$ .

18.(本题满分 11 分)

设  $D$  是位于曲线  $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$  ( $a > 1, 0 \leq x < +\infty$ ) 下方、 $x$  轴上方的无界区域.

(1) 求区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V(a)$ ;

(2) 当  $a$  为何值时,  $V(a)$  最小? 并求此最小值.

解 (1)  $V(a) = \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_0^{+\infty} \pi \left(\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\right)^2 dx = \pi \int_0^{+\infty} x e^{-bx} dx = \frac{\pi}{b^2} = \frac{a^2\pi}{\ln^2 a}$ , 其中  $b = \frac{\ln a}{a}$ .

(2) 令  $g(a) = \frac{a}{\ln a}$ , 则  $g'(a) = \frac{\ln a - 1}{\ln^2 a}$ ,  $a = e$  是唯一驻点, 也是最小值点, 因此  $a = e$  时,  $V(a)$  取最小值  $V(e) = \pi e^2$ .

19.(本题满分 10 分)

求微分方程  $y''(x + y^2) = y'$  满足初始条件  $y(1) = y'(1) = 1$  的特解.

解 令  $y' = p$ , 则  $y'' = p'$ , 原方程变为  $p'(x + p^2) = p$ , 即

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p} = p$$

解得  $x = p(p + C_1)$ , 代入  $p(1) = y'(1) = 1 > 0$  可得  $C_1 = 0$ , 所以  $x = p^2$ ,  $p = y' = \sqrt{x}$ , 进一步得  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2$ , 结合  $y(1) = 1$  得  $C_2 = \frac{1}{3}$ , 因此  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$ .

20.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(u)$  具有二阶导数, 且  $f'(0) = 1$ , 函数  $y = y(x)$  由方程  $y - x e^{y-1} = 1$  所

确定, 设  $z = f(\ln y - \sin x)$ , 求  $\left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}$ ,  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$ .

解 在  $y - xe^{y-1} = 1$  中令  $x = 0$  得  $y = 1$ , 在方程两端对  $x$  求导得

$$y' - e^{y-1} - xe^{y-1} y' = y' - e^{y-1} - (y-1)y' = 0.$$

代入  $x = 0, y = 1$  得  $y'(0) = 1$ . 上式两端再对  $x$  求导得

$$-y'^2 + (2-y)y'' - e^{y-1} y' = 0,$$

代入  $x = 0, y = 1, y' = 1$  可得  $y''(0) = 2$ .

又  $\frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left( \frac{y'}{y} - \cos x \right)$ , 则  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0$ . 进一步,

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2} &= f''(\ln y - \sin x) \left( \frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left( \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} + \sin x \right), \\ \left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0} &= f'(0)(2-1) = f'(0) = 1. \end{aligned}$$

### 21.(本题满分 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数存在相等的最大值,  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

证 令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 由题意有  $F(a) = F(b) = 0$ . 又  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内具有相等的最大值, 不妨设存在  $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$  使得

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x), g(x_2) = M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

若  $x_1 = x_2$ , 令  $c = x_1$ , 则  $F(c) = 0$ .

若  $x_1 < x_2$ , 因  $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$ , 从而存在  $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$ , 使得  $F(c) = 0$ .

在区间  $[a, c], [c, b]$  上分别利用罗尔定理知, 存在  $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对  $F'(x)$  在区间  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用罗尔定理, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 有  $F''(\xi) = 0$ , 即  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

### 22.(本题满分 11 分)

设二元函数

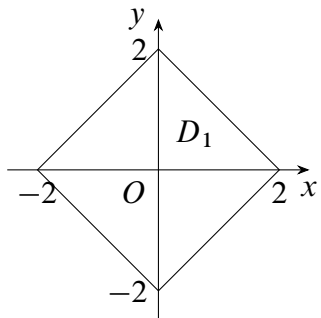
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$ .

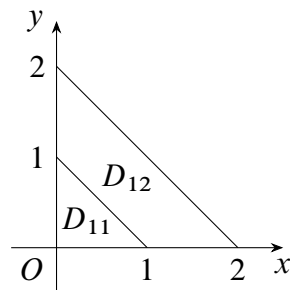
解 区域  $D$  如图 (1) 所示, 它关于  $x, y$  轴对称,  $f(x, y)$  关于  $x, y$  均为偶函数, 得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中  $D_1$  是  $D$  在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将  $D_1$  分成如图 (2) 所示的两部分:  $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$ , 其中

$$D_{11}: |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad D_{12}: 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

于是  $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$ , 其中

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

23.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解.

解 因为方程 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵  $\bar{A}$  进行初等行变换得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是当  $a = 1$  时, 有  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$ , 方程组 (3) 有解, 此时

$$\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为  $(-1, 0, 1)^T$ , 所以 (1)、(2) 的公共解为  $k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$ .

当  $a = 2$  时,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 3$ , 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为  $(0, 1, -1)^T$ , 即 (??)、(??) 的公共解为  $(0, 1, -1)^T$ .

24.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ .  $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$  是  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda_1$  的一个特征向量, 记  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^5 - 4\mathbf{A}^3 + \mathbf{E}$ , 其中  $\mathbf{E}$  为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $\mathbf{B}$  的特征向量, 并求  $\mathbf{B}$  的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵  $\mathbf{B}$ .

解 (1) 由  $A\alpha_1 = \alpha_1$  得  $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = \alpha_1, A^5\alpha_1 = \alpha_1$ , 故

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^4 + E)\alpha_1 \\ &= A^5\alpha_1 - 4A^4\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1. \end{aligned}$$

因此  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的属于特征值  $-2$  的特征向量.

因为  $B = A^5 - 4A^4 + E$ , 及  $A$  的三个特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ , 得  $B$  的 3 个特征值为  $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ .

设  $\alpha_2, \alpha_3$  为  $B$  的属于  $\mu_2 = \mu_3 = 1$  的两个线性无关的特征向量, 又  $A$  为对称矩阵, 则  $B$  也为对称矩阵, 因此  $\alpha_1$  与  $\alpha_2, \alpha_3$  正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0.$$

所以  $\alpha_2, \alpha_3$  可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

其基础解系为  $(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$ , 故可取  $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$ , 即  $B$  的全部特征向量为  $k_1(1, -1, 1)^T, k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$ , 其中  $k_1 \neq 0, k_2, k_3$  不全为零.

(2) 令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 得

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3 2008 年考研数学二

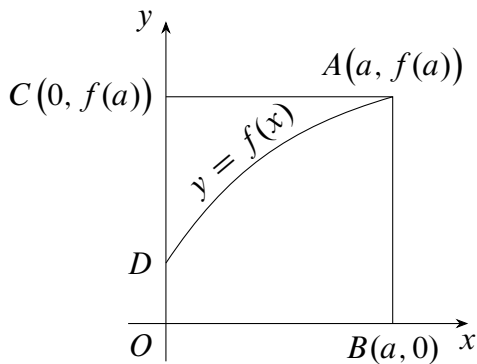
#### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数  $f(x) = x^2(x-1)(x+2)$ , 则  $f'(x)$  的零点个数为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

解 注意到  $f(0) = f(1) = f(-2) = 0$ , 因此由罗尔定理知存在  $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (-2, 0)$  使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , 且由定义知  $f'(0) = 0$ . 而  $f'(x)$  为三次多项式, 因此  $f'(x)$  有且只有 3 个零点, 选 D.

2. 如图, 曲线段的方程为  $y = f(x)$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上有连续的导数, 则定积分  $\int_0^a x f'(x) dx$  等于 ( )



第 2 题图

- A. 曲边梯形  $ABOD$  的面积                      B. 梯形  $ABOD$  的面积  
C. 曲边三角形  $ACD$  的面积                      D. 三角形  $ACD$  的面积

解 由分部积分知

$$\int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x df(x) = af(a) - \int_0^a f(x) dx,$$

其中  $af(a)$  是矩形面积,  $\int_0^a f(x) dx$  为曲边三角形  $ACD$  的面积, 选 C.



3. 在下列微分方程中, 以  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  为任意常数) 为通解的是 ( )

- A.  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$                       B.  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$   
 C.  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$                       D.  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解 从通解形式可知微分方程的特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$ . 因此对应的特征方程为  $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$ , 故对应的微分方程为  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ , 选 D.

4. 设函数  $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$ , 则  $f(x)$  有 ( )

- A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点                      B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点  
 C. 2 个跳跃间断点    D. 2 个无穷间断点

解 直接计算可知  $x = 0$  是可去间断点,  $x = 1$  是跳跃间断点, 选 A.

5. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题正确的是 ( )

- A. 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛                      B. 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛  
 C. 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛                      D. 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛

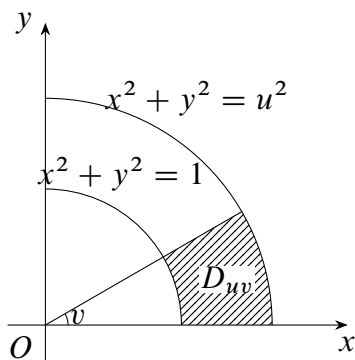
解 对 B 选项, 因为数列  $\{x_n\}$  单调,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 所以数列  $\{f(x_n)\}$  单调有界, 由单调有界准则知数列  $\{f(x_n)\}$  收敛. A 选项可取反例

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2+x^2}, & x \geq 0 \\ -1 - \frac{1}{2+x^2}, & x < 0 \end{cases}, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

C 和 D 选项可取反例  $f(x) = \arctan x, x_n = n$ , 选 B.

6. 设函数  $f(x)$  连续, 若  $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中区域  $D_{uv}$  为图中阴影部分,

则  $\frac{\partial F}{\partial u} =$  ( )



第 6 题图

- A.  $vf(u^2)$       B.  $\frac{v}{u}f(u^2)$       C.  $vf(u)$       D.  $\frac{v}{u}f(u)$

解 利用极坐标可得

$$F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$= \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr,$$

所以  $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$ , 选 A.

7. 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 若  $A^3 = O$ , 则 ( )

- A.  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆      B.  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆  
C.  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆      D.  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆

解 因为  $A^3 = O$ , 所以  $A$  的特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^3 = 0$ , 即  $\lambda = 0$ . 因此  $E - A$  和  $E + A$  的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

8. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则在实数域上与  $A$  合同的矩阵为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ , 则  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ ,

记  $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ , 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0,$$

则  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ , 正负关系指数相同, 选 D.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$ , 则  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 利用等价无穷小替换得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 f^2(x)}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = 1,$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ , 又  $f(x)$  连续, 可知  $f(0) = 2$ .

10. 微分方程  $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 原方程变形得  $y' - \frac{y}{x} = x e^{-x}$ , 于是  $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = e^{-x}$ , 因此  $\frac{y}{x} = -e^{-x} + C$ , 即方程的通解为  $y = x(C - e^{-x})$ .

11. 曲线  $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 原方程两边对  $x$  求导得  $\cos(xy)(y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1$ , 代入  $x = 0, y = 1$  得  $y'(0) = 1$ , 因此曲线在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $y = x + 1$ .

12. 曲线  $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点坐标为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x)$ , 于是拐点的坐标为  $(-1, -6)$ .

13. 设  $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$ , 则  $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $z = e^{\frac{x}{y} \ln \frac{y}{x}} = e^{\frac{x}{y}(\ln y - \ln x)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}(\ln y - \ln x)} \left(\frac{\ln y - \ln x}{y} - \frac{1}{y}\right)$ , 代入  $x = 1, y = 2$

可知  $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$ .

14. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, 3, \lambda$ , 若行列式  $|2A| = -48$ , 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $|2A| = 2^3|A| = 8 \times 2 \times 3\lambda = 48\lambda = -48, \lambda = -1$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$ .

解 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x \cdot \sin x}{\sin^4 x} = \frac{1}{6}.$$

16. (本题满分 10 分)

设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^t \ln(1 + u) du \end{cases}$  确定, 其中  $x(t)$  是初值问题

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2t e^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$  的解, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解 由  $\frac{dx}{dt} - 2t e^{-x} = 0$  得  $e^x dx = 2t dt$ , 积分并由条件  $x|_{t=0} = 0$  得  $e^x = 1 + t^2$ , 即

$x = \ln(1 + t^2)$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t \ln(1 + t^2)}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1 + t^2) \ln(1 + t^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} [(1 + t^2) \ln(1 + t^2)]}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2t \ln(1 + t^2) + 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1 + t^2) [\ln(1 + t^2) + 1]. \end{aligned}$$

17.(本题满分 9 分)

计算  $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

解

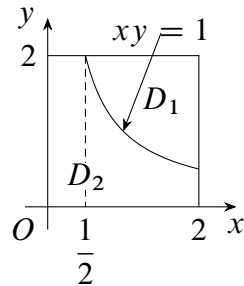
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin 2t) \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 11 分)

计算  $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ .

解 曲线  $xy = 1$  将区域  $D$  分成如图所示的两个区域  $D_1$  和  $D_2$ , 于是

$$\begin{aligned} &\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \max\{xy, 1\} dx dy + \iint_{D_2} \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



第 18 题图

19.(本题满分 11 分)

设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上具有连续导数的单调增加函数, 且  $f(0) = 1$ . 对任意的  $t \in [0, +\infty)$ , 直线  $x = 0, x = t$ , 曲线  $y = f(x)$  以及  $x$  轴所围成的曲边梯形绕  $x$  轴

旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数  $f(x)$  的表达式.

解 旋转体的体积  $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$ , 侧面积  $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ , 由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

上式两端对  $t$  求导, 得  $f^2(t) = f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)}$ , 即  $y' = \sqrt{y^2 - 1}$ , 由变量分离法解得

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = t + C_1,$$

即  $y + \sqrt{y^2 - 1} = C e^t$ . 将  $y(0) = 1$  代入知  $C = 1$ , 故

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^t, \quad y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

于是所求函数为  $y = f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ .

20.(本题满分 11 分)

(1) 证明积分中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则至少存在一点  $\eta \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$ .

(2) 若函数  $\varphi(x)$  具有二阶导数, 且满足  $\varphi(2) > \varphi(1)$ ,  $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$ , 则至少存在一点  $\xi \in (1, 3)$ , 使得  $\varphi''(\xi) < 0$ .

证 (1) 方法一 设  $M$  与  $m$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值与最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b],$$

由定积分的性质, 有

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

由连续函数的介值定理可知, 至少存在一点  $\eta \in [a, b]$ , 使得

$$f(\eta) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx,$$

即  $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$ .

方法二 令  $F(t) = \int_a^t f(x) dx, x \in [a, b]$ , 则  $F(t)$  在  $[a, b]$  上可导, 由拉格朗日中值定理知存在  $\eta \in (a, b)$ <sup>1</sup>  $\subset [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a) = f(\eta)(b - a).$$

<sup>1</sup>事实上, 这里的结论更强.

(2) 由 (1) 知, 至少存在一点  $\eta \in (2, 3)$ , 使得

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)(3 - 2) = \varphi(\eta).$$

对  $\varphi(x)$  在  $[1, 2]$  和  $[2, \eta]$  上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到  $\varphi(1) < \varphi(2), \varphi(\eta) < \varphi(2)$ , 得

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi_1) &= \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} > 0, & 1 < \xi_1 < 2, \\ \varphi'(\xi_2) &= \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta - 2} < 0, & 2 < \xi_2 < \eta < 3. \end{aligned}$$

在  $[\xi_1, \xi_2]$  上对  $\varphi'(x)$  应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \quad \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3).$$

21.(本题满分 11 分)

求函数  $u = x^2 + y^2 + z^2$  在约束条件  $z = x^2 + y^2$  和  $x + y + z = 4$  下的最大值和最小值.

解 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4),$$

令

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

解方程组得  $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$ , 所求最大值为 72, 最小值为 6.

22.(本题满分 12 分)

设  $n$  元线性方程组  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$



(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{P} &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由(1)知  $\mathbf{P}$  为可逆矩阵, 从而  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



## 4 2009 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数  $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$  的可去间断点的个数为 ( )  
 A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 无穷多个

解 显然  $f(x)$  的间断点为所有整数, 且  $x = 0, x = \pm 1$  为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.

2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小, 则 ( )  
 A.  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$     B.  $a = 1, b = \frac{1}{6}$         C.  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$     D.  $a = -1, b = \frac{1}{6}$

解 首先当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx) \sim -bx^3$ , 利用泰勒公式得

$$f(x) = x - \sin ax = x - \left( ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3) \right) = (1 - a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3),$$

由  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小知  $\begin{cases} 1 - a = 0 \\ \frac{a^3}{6} = -b \end{cases}$ , 因此  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ , 选 A.

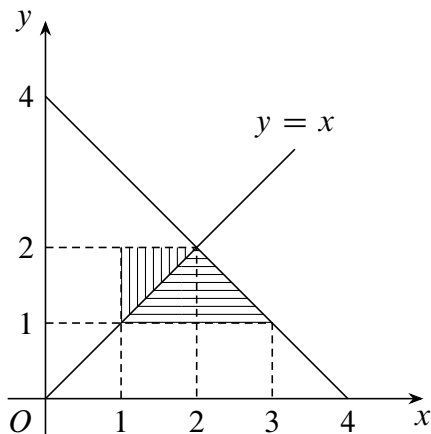
3. 设函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = xdx + ydy$ , 则点  $(0, 0)$  ( )  
 A. 不是  $f(x, y)$  的连续点                      B. 不是  $f(x, y)$  的极值点  
 C. 是  $f(x, y)$  的极大值点                      D. 是  $f(x, y)$  的极小值点

解 由  $dz = xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$  知  $z = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$ , 因此点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点.

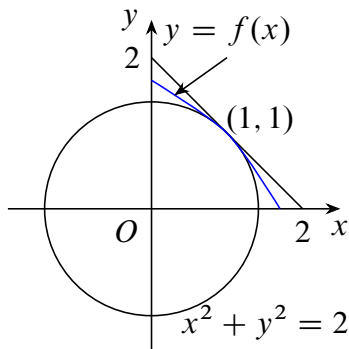
4. 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y)dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y)dx =$  ( )  
 A.  $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y)dy$                       B.  $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y)dy$   
 C.  $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y)dx$                       D.  $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y)dx$

解 由题意可知积分区域有两部分:  $D_1 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, D_2 = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4 - y\}$ , 如图, 两部分区域可以用 Y 型区域表示为

$D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4 - y\}$ , 选 C.



第 4 题图



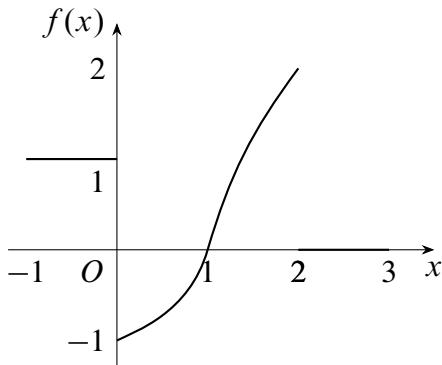
第 5 题图

5. 若  $f''(x)$  不变号, 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处的曲率圆为  $x^2 + y^2 = 2$ , 则函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  内 ( )

- A. 有极值点, 无零点
- B. 无极值点, 有零点
- C. 有极值点, 有零点
- D. 无极值点, 无零点

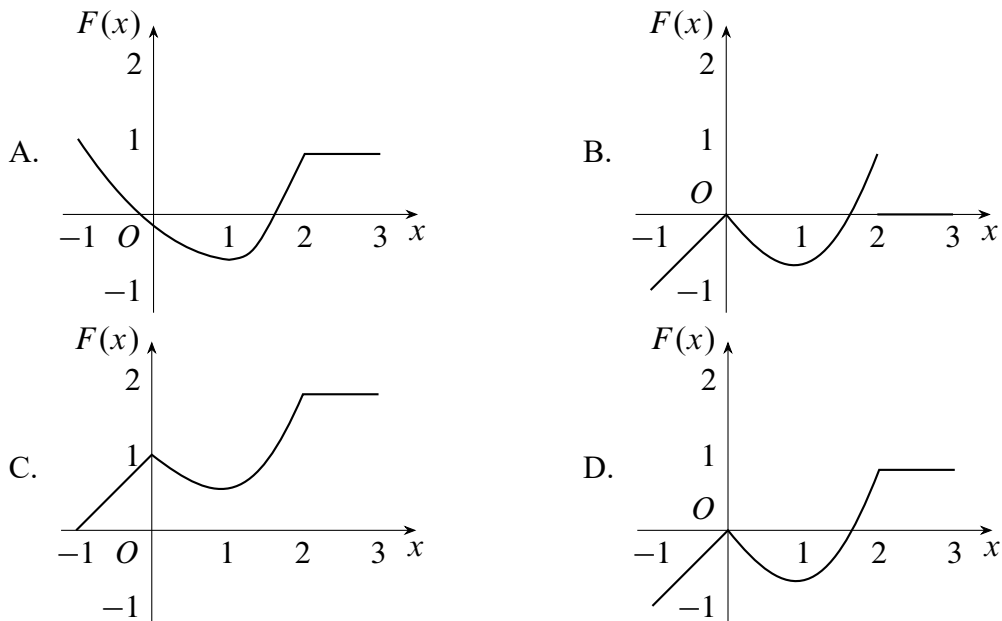
解 如图, 由曲率圆的概念知曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处与曲率圆  $x^2 + y^2 = 2$  相切, 且二者具有相同的凹凸性和曲率, 于是由  $f(1) = 1, f'(1) = -1$  易求得  $f''(1) = -2 < 0$ . 因为  $f''(x)$  不变号, 所以有  $f''(x) < 0$ . 从而  $f'(x)$  在  $[1, 2]$  上递减,  $f'(x) < f'(1) = -1 < 0$ , 进而  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上递减, 故  $f(x)$  在  $(1, 2)$  内没有极值点. 且曲线  $y = f(x)$  为凸曲线, 故曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处切线的下方, 即  $f(x) < 2 - x (1 < x < 2)$ , 故  $f(2) < 0$ . 由连续函数的零点定理知  $y = f(x)$  在  $(1, 2)$  内有零点, 选 B.

6. 设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形如图所示,



第 6 题图

则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形为 ( )



解 首先  $F(x)$  是连续函数, 排除 B 选项. 当  $-1 < x < 0$  时,  $F'(x) = f(x) = 1$  且此时  $F(x) < 0$ , 排除 A, C 选项, 选 D.

7. 设  $A, B$  均为 2 阶矩阵,  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 若  $|A| = 2, |B| = 3$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$     B.  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$     C.  $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$     D.  $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

解 由  $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$  知矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. 设  $A, P$  均为 3 阶矩阵,  $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^T A Q$  为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$     B.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$     C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$     D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解 由题意可知把  $P$  的第二列加到第一列上得到  $Q$ , 因此有  $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$ . 记

$$E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= [P E_{21}(1)]^T A [P E_{21}(1)] = E_{21}^T(1) P^T A P E_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此选 A.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

解  $(0, 0)$  点对应的参数  $t = 1$ , 曲线在这一点处的切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{t=1} = \left. \frac{2t \ln(2-t^2) - \frac{2t^3}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}} \right|_{t=1} = 2,$$

于是切线方程为  $y = 2x$ .

10. 已知  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

解 显然有  $k < 0$ , 且  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{kx} dx = -\frac{2}{k}$ , 因此  $k = -2$ .

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ \_\_\_\_\_.

解 首先  $\int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} d(\cos nx) = \frac{1 - e^{-1} \cos n}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} \cos nx dx$ , 则根据无穷小乘以有界量知此极限为 0.

12. 设  $y = y(x)$  是由方程  $xy + e^y = x + 1$  确定的隐函数, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.


解 原方程中令  $x = 0$  得  $y = 0$ , 方程两边对  $x$  求导得  $y + xy' + e^y y' = 1$ , 代入  $x = y = 0$  得  $y' = 1$ . 方程两边继续对  $x$  求导得  $y' + y' + xy'' + e^y y'^2 + e^y y'' = 0$ , 代入  $x = y = 0, y' = 1$  得  $y'' = -3$ , 即  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -3$ .

13. 函数  $y = x^{2x}$  在区间  $(0, 1]$  上的最小值为\_\_\_\_\_.

解 求导得  $y' = 2x^{2x}(\ln x + 1)$ , 不难知最小值点就是  $x = \frac{1}{e}$ , 最小值为  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$ .

14. 设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量,  $\beta^T$  为  $\beta$  的转置. 若矩阵  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $\beta^T\alpha =$ \_\_\_\_\_.

解  $\beta^T\alpha = \text{tr}(\beta^T\alpha) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = 2$ .

 提示: 当矩阵  $A$  与  $B$  可以互乘时,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , 矩阵  $AB$  与  $BA$  的所有非零特征值及其重数都相同.

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$ .

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x + \tan x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx (x > 0)$ .

解 令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}} > 1$ , 则  $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)} + C \end{aligned}$$

$$= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + C.$$

17.(本题满分 10 分)

设  $z = f(x + y, x - y, xy)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $dz$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 直接求全微分得

$$\begin{aligned} dz &= f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy) + f'_3 \cdot (ydx + xdy) \\ &= (f'_1 + f'_2 + yf'_3)dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3)dy \end{aligned}$$

由于  $f$  具有二阶连续偏导数, 所以  $f''_{21} = f''_{12}$ ,  $f''_{31} = f''_{13}$ ,  $f''_{23} = f''_{32}$ . 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_1 + f'_2 + yf'_3) \\ &= f''_{11} - f''_{12} + xf''_{13} + f''_{21} - f''_{22} + xf''_{23} + f'_3 + y(f''_{31} - f''_{32} + xf''_{33}) \\ &= f''_{11} + (x + y)f''_{13} - f''_{22} + (x - y)f''_{23} + xyf''_{33} + f'_3. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设非负函数  $y = y(x)$  ( $x \geq 0$ ) 满足微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ . 当曲线  $y = y(x)$  过原点时, 其与直线  $x = 1$  及  $y = 0$  围成的平面区域  $D$  的面积为 2, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

解 当  $x > 0$  时, 原方程即  $y'' - \frac{y'}{x} = -\frac{2}{x}$ , 于是  $\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{xy'' - y'^2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$ ,  $y' = C_1x + 2$ , 再次积分得  $y = C_2x^2 + 2x + C_3$ . 因为  $y(0) = 0$ , 那么令  $x \rightarrow 0^+$  可得  $C_3 = 0$ , 因此  $y = C_2x^2 + 2x$ . 由题意有  $\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 (C_2x^2 + 2x)dx = \frac{C_2}{3} + 1 = 2$ , 于是  $C_2 = 3$ ,  $y = 3x^2 + 2x$ .  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_0^1 xy(x)dx = 2\pi \int_0^1 (3x^3 + 2x^2)dx = \frac{17}{6}\pi.$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D (x - y)dxdy$ , 其中  $D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}$ .

解 方法一 积分区域可表示为  $D = \left\{(r, \theta) \left| \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2(\cos \theta + \sin \theta) \right.\right\}$ , 故

$$\iint_D (x - y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} r^2(\cos \theta - \sin \theta)dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\
&= \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

方法二 作换元  $u = x - 1, v = y - 1$ , 则  $dx = du, dy = dv$ , 积分区域化为  $D_1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$ , 于是

$$\begin{aligned}
\iint_D (x - y) dx dy &= \iint_{D_1} (u - v) du dv \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

20.(本题满分 12 分)

设  $y = y(x)$  是区间  $(-\pi, \pi)$  内过点  $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$  的光滑曲线. 当  $-\pi < x < 0$  时, 曲线上任一点处的法线过原点; 当  $0 \leq x < \pi$  时, 函数  $y(x)$  满足  $y'' + y + x = 0$ . 求  $y(x)$  的表达式.

解 当  $-\pi < x < 0$  时, 曲线  $y = y(x)$  上任一点  $(x, y)$  处的法线方程为  $Y = -\frac{1}{y'}(X - x) + y$ , 而此法线过原点, 因此  $y' = -\frac{x}{y}$ , 积分可得  $x^2 + y^2 = C$ . 由  $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  可得  $C = \pi^2$ , 于是  $y = \sqrt{\pi^2 - x^2} (-\pi < x < 0)$ .

当  $0 \leq x < \pi$  时, 函数  $y = y(x)$  满足二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + y + x = 0$ , 其通解为  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$ . 而曲线  $y = y(x)$  光滑, 因此  $y(x)$  在  $x = 0$  处可导, 于是

$$\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\pi^2 - x^2} = \pi, \\
y'(0) &= y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2} - \pi}{x} = 0.
\end{aligned}$$

由此可解得  $C_1 = \pi, C_2 = 1$ , 当  $0 \leq x < \pi$  时,  $y = \pi \cos x + \sin x - x$ , 因此最后所求的函数为  $y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

21.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

(2) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 在  $(0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

证 (1) 令  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ , 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left( f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \right) - \left( f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \right) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \end{aligned}$$

因此由罗尔定理知存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , 即  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf'(\xi)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = A.$$

 提示: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

22.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(1) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1$ ,  $A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;

(2) 对 (1) 中的任意向量  $\xi_2, \xi_3$ , 证明  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

解 (1) 对增广矩阵  $(A, \xi_1)$  作初等行变换得

$$(A \ \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组  $Ax = \xi_1$  的通解为  $x = (0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$ , 从而  $\xi_2 = (-k, k, 1 - 2k)^T$ ,  $k$  为任意常数.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ , 对增广矩阵  $(A^2, \xi_1)$  作初等行变换得

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是方程组  $A^2x = \xi_1$  的通解为  $x_1 = -\frac{1}{2} - u$ ,  $x_2 = u$ ,  $x_3 = v$ , 即  $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$ , 其中  $u, v$  为任意常数.



(2) 对任意的常数  $k, u, v$  有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量  $\xi_2, \xi_3$ , 恒有  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

23.(本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

(1) 求二次型  $f$  的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

解 (1) 二次型  $f$  的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ , 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a + 1))(\lambda - (a - 2)),$$

所以  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$ .

(2) 因为二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 说明正惯性指数  $p = 2$ , 负惯性指数  $q = 0$ , 因此矩阵  $A$  的特征值为两正一零, 显然  $a - 2 < a < a + 1$ , 因此必有  $a = 2$ .

## 5 2010 年考研数学二


### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  的无穷间断点的个数为 ( )  
 A. 0                                      B. 1                                      C. 2                                      D. 3

解 函数  $f(x)$  的间断点只有  $x = 0, \pm 1$ , 不难判断  $x = -1$  是无穷间断点,  $x = 0$  是跳跃间断点,  $x = 1$  是可去间断点, 因此只有一个无穷间断点, 选 B.

2. 设  $y_1, y_2$  是一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解, 若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )  
 A.  $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$                                       B.  $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$   
 C.  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$                                       D.  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

解  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是非齐次方程的解, 则  $\lambda + \mu = 1$ , 而  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是对应的齐次方程的解, 则  $\lambda - \mu = 0$ , 因此  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ .

 提示: 如果  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是非齐次方程的  $n$  个解, 则线性组合  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  仍然是此非齐次方程的解的充要条件是  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1$ ,  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  是对应齐次方程的解的充要条件是  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0$ .

3. 曲线  $y = x^2$  与曲线  $y = a \ln x (a \neq 0)$  相切, 则  $a =$  ( )  
 A.  $4e$                                       B.  $3e$                                       C.  $2e$                                       D.  $e$

解 设两条曲线的切点为  $(x_0, x_0^2)$ , 则  $a \ln x_0 = x_0^2$ , 且切点处的切线斜率相同, 即  $2x_0 = \frac{a}{x_0}$ , 解得  $x_0 = \sqrt{e}, a = 2e$ , 选 C.

4. 设  $m, n$  是正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性 ( )  
 A. 仅与  $m$  的取值有关                                      B. 仅与  $n$  的取值有关  
 C. 与  $m, n$  的取值都有关                                      D. 与  $m, n$  的取值都无关

解 任取  $c \in (0, 1)$ , 原反常积分  $I = \int_0^c \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_c^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx =$



解 因为向量组 I 被向量组 II 线性表示, 所以  $r(\text{I}) \leq r(\text{II})$ , 因此当向量组 I 线性无关时,  $r = r(\text{I}) \leq r(\text{II}) \leq s$ , 选 A.

8. 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ , 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于 ( )

A.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解 由  $A^2 + A = O$  知  $A$  的任一特征值  $\lambda$  必满足  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 则  $\lambda = 0$  或  $-1$ . 又  $r(A) = 3$ , 所以  $A$  的特征值为  $-1, -1, -1, 0$ , 且  $A$  为实对称矩阵, 则它相似于  $\text{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$ , 选 D.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 三阶常系数线性齐次微分方程  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 原方程的特征方程为  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0$ , 因此特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_3 = 2$ , 方程的通解为  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x}$ .

10. 曲线  $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$  的渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$ , 所以曲线的渐近线方程为  $y = 2x$ .

11. 函数  $y = \ln(1 - 2x)$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由  $n$  阶麦克劳林公式得

$$f(x) = \ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(-2x)^n}{n} + o(x^n),$$

而  $x^n$  的系数应为  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , 即  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(-2)^n}{n}$ , 因此  $f^{(n)}(0) = -2^n(n-1)!$ .

12. 当  $0 \leq \theta \leq \pi$  时, 对数螺线  $r = e^\theta$  的弧长为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由极坐标系下曲线的弧长公式得对数螺线  $r = e^\theta$  的弧长为

$$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

13. 已知一个长方形的长  $l$  以 2 cm/s 的速率增加, 宽  $w$  以 3 cm/s 的速率增加, 则当  $l = 12$  cm,  $w = 5$  cm 时, 它的对角线增长的速率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 对角线的长为  $L = \sqrt{l^2 + w^2}$ , 由全导数公式得  $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{\partial L}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{2l + 3w}{\sqrt{l^2 + w^2}}$ , 于是  $\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\substack{l=12 \\ w=5}} = \frac{2 \times 12 + 3 \times 5}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 3 \text{ cm/s}$ .

14. 设  $A, B$  为 3 阶矩阵, 且  $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$ , 则  $|A + B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解

$$|A + B^{-1}| = |A(B + A^{-1})B^{-1}| = |A||B + A^{-1}||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

解  $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$ ,  $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ . 分析  $f'(x)$  的零点及正负可知  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-1, 0)$  和  $(1, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(-\infty, -1)$  和  $(0, 1)$ , 极小值为  $f(-1) = f(1) = 0$ , 极大值为  $f(0) = \int_1^0 (0 - t)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ .

16. (本题满分 10 分)

(1) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由.

(2) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

解

(1) 当  $0 < t < 1$  时,  $0 < \ln(1+t) < t$ , 所以  $|\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$ , 由定积分保序性可知  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$ .

(2) 由 (1) 可知, 当  $0 < t < 1$  时,  $0 < \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt$ . 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = - \int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

因此  $0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2}$ , 由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

17. (本题满分 11 分)

设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $t > -1$ ) 所确定, 其中  $\psi(t)$  具有二阶导数, 且  $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$ , 已知  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 求函数  $\psi(t)$ .

解 利用参数方程求导得  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2(1+t)}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4(1+t)} \left( \frac{\psi''(t)}{1+t} - \frac{\psi'(t)}{(1+t)^2} \right),$$

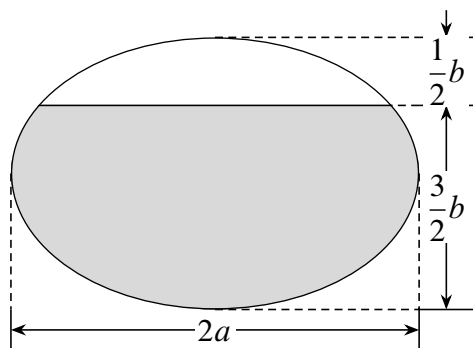
由题设条件  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$  可得  $\psi''(t) - \frac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t)$ , 因此

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\psi'(t)}{1+t} \right) = \frac{1}{1+t} \left( \psi''(t) - \frac{\psi'(t)}{1+t} \right) = 3,$$

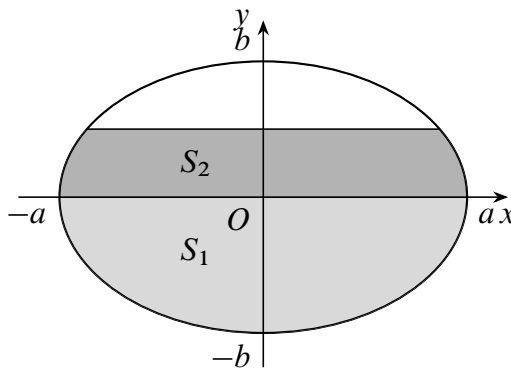
于是  $\psi'(t) = (3t + C_1)(1+t)$ , 由  $\psi'(1) = 6$  得  $C_1 = 0$ , 则  $\psi'(t) = 3t(1+t)$ ,  $\psi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3 + C_2$ . 由  $\psi(1) = \frac{5}{2}$  得  $C_2 = 0$ , 所以  $\psi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3, t > -1$ .

18.(本题满分 10 分)

一个高为  $l$  的柱体形贮油罐, 底面是长轴为  $2a$ , 短轴为  $2b$  的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中右面高度为  $\frac{3}{2}b$  时 (如图 1), 计算油的质量.(长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数  $\rho \text{ kg/m}^3$ .)



第 18 题图 1



第 18 题图 2

解 以椭圆长轴为  $x$  轴, 短轴为  $y$  轴建立坐标系, 用  $S_1$  和  $S_2$  分别表示在  $x$  轴下方和  $x$  轴上方的阴影部分的面积, 则  $S_1 = \frac{\pi}{2}ab$ , 而

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - y^2} dy \stackrel{y=b \sin t}{=} \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{6}} b^2 \cos^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = ab \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = ab \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

因此油的质量为  $M = (S_1 + S_2)l\rho = \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)abl\rho \text{ kg}$ .

19.(本题满分 11 分)

设函数  $u = f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且满足等式  $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

确定  $a, b$  的值, 使等式在变换  $\xi = x + ay, \eta = x + by$  下简化为  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

解 利用多元复合函数的偏导公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + b \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

把以上各式代入题设等式得

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + [10ab + 12(a+b) + 8] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

根据条件有 
$$\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \\ 10ab + 12(a+b) + 8 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}.$$

20.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} \, dr d\theta$ , 其中  $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, \right.$

$$\left. 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

解 积分区域用直角坐标可表示为  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y \sqrt{1 - x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 + y^2} \Big|_0^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ 1 - (\sqrt{1 - x^2})^3 \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}.$$

21.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$ .

证明: 存在  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$ .

解 令  $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ , 则根据条件有  $F(0) = F(1) = 0$ , 由拉格朗日中值定理知存在  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使得

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}F'(\xi) \\ F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2) \\ -F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2) \end{cases},$$

两式相加得  $f'(\xi) + f'(\eta) - \xi^2 - \eta^2 = 0$ , 即  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$ .

22.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 已知线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  存在两个不同的解.

(1) 求  $\lambda, a$ ;

(2) 求方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的通解.

解 (1) 因为方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有两个不同的解, 所以  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

因此  $\lambda = \pm 1$ . 当  $\lambda = 1$  时,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 显然  $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$ , 方程组无

解, 因此  $\lambda = 1$  舍去. 当  $\lambda = -1$  时, 对  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的增广矩阵进行初等行变换得

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix},$$

因为方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 所以  $a = -2$ .



(2) 当  $\lambda = -1, a = -2$  时,  $\bar{A} = (A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 因此方程组  $Ax = b$  的

通解为  $x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k(1, 0, 1)^T$ , 其中  $k$  为任意常数.

23.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ , 正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q$  为对角矩阵. 若  $Q$  的第 1 列为

$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ , 求  $a, Q$ .

解 设  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$  是矩阵  $A$  的属于特征值  $\lambda_1$  的特征向量, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1 \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1 \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ a = -1 \end{cases}.$$

由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0$  可得  $A$  的特征值为

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$ .

对  $\lambda_2 = 5$ , 解方程  $(5E - A)x = 0$  得特征值 5 的单位特征向量  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ ;

对  $\lambda_3 = -4$ , 解方程  $(-4E - A)x = 0$  得特征值 -4 的单位特征向量  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$ .

取  $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{1} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , 则  $Q^T A Q = \text{diag}\{2, 5, -4\}$ .

## 6 2011 年考研数学二


### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  是等价无穷小, 则 ( )  
A.  $k = 1, c = 4$       B.  $k = 1, c = -4$       C.  $k = 3, c = 4$       D.  $k = 3, c = -4$

解 利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3)\right) = 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3,$$

因此  $k = 3, c = 4$ , 选 C.

 提示: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式  $\sin 3x = 3 \sin x - \sin^3 x$  更快.

2. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f(0) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$  ( )  
A.  $-2f'(0)$       B.  $-f'(0)$       C.  $f'(0)$       D. 0

解 注意到  $f(0) = 0$ , 利用导数定义得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0), \end{aligned}$$

因此选 B.

3. 函数  $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$  的驻点个数为 ( )  
A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

解 因为  $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

由  $f'(x) = 0$  得  $3x^2 - 12x + 11 = 0$ , 解得  $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 因此有两个驻点.

4. 微分方程  $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$  的特解形式为 ( )



## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 先取对数得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1+2^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{2^x - 1}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} = \frac{\ln 2}{2},$$

因此原极限为  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$

10. 微分方程  $y' + y = e^{-x} \cos x$  满足条件  $y(0) = 0$  的解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由条件得  $e^x(y' + y) = (ye^x)' = \cos x$ , 于是  $ye^x = \sin x + C$ . 由  $y(0) = 0$  得  $C = 0$ , 因此  $ye^x = \sin x$ ,  $y = e^{-x} \sin x$ .

11. 曲线  $y = \int_0^x \tan t \, dt$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) 的弧长  $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

12. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $\lambda > 0$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \, dx \stackrel{\lambda x=t}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t d(e^{-t}) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

13. 设平面区域  $D$  由直线  $y = x$ , 圆  $x^2 + y^2 = 2y$  及  $y$  轴所围成, 则二重积分  $\iint_D xy \, d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 利用极坐标计算得

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d\sigma &= \iint_D xy \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \, dr = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \theta)^4 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \, d \sin \theta = \frac{2}{3} \sin^6 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^6 \right] = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

14. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ , 则  $f$  的正惯性指数为\_\_\_\_\_.

解 利用配方可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$

因此  $f$  的正惯性指数为 2.

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数  $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ , 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ , 试求  $\alpha$  的取值范围.

解 显然由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$  可知  $\alpha > 0$ , 由题设及洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}},$$

这里要求  $\alpha > 1$ , 否则不可能使得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , 且在  $\alpha > 1$  的条件下有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha-1}(1+x^2)} = 0.$$

再由等价无穷小得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^2 dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{3x^\alpha},$$

此时必有  $\alpha < 3$  才能有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ , 因此综合起来  $\alpha$  的范围是  $1 < \alpha < 3$ .

16.(本题满分 11 分)

设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$  确定, 求  $y = y(x)$  的极值和曲线

$y = y(x)$  的凹凸区间及拐点.

解 利用参数方程求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}.$$

令  $y' = 0$  得  $t = \pm 1$ .  $t = 1$  时,  $x = \frac{5}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ , 此时  $y'' > 0$ , 所以  $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$  是极小值. 当  $t = -1$  时,  $x = -1$ ,  $y = 1$ , 此时  $y'' < 0$ , 所以  $y(1) = 1$  是极大值.

17.(本题满分 9 分)

设函数  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 函数  $g(x)$  可导且在  $x = 1$  处取得极值  $g(1) = 1$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ .

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(xy, yg(x)) \cdot y + f'_2(xy, yg(x)) \cdot g'(x) \cdot y$ , 所以  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} = y f'_1(y, y)$ .  
故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} \right) \Big|_{y=1} = \frac{d}{dy} [y f'_1(y, y)] \Big|_{y=1} \\ &= [f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y))] \Big|_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设函数  $y(x)$  具有二阶导数, 且曲线  $l: y = y(x)$  与直线  $y = x$  相切于原点. 记  $\alpha$  为曲线  $l$  在点  $(x, y)$  处切线的倾角, 若  $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$ , 求  $y(x)$  的表达式.

解 因为曲线  $y = y(x)$  与直线  $y = x$  相切于原点, 所以  $\alpha(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

1. 由  $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$  可知  $\alpha = y + C_1$ , 代入  $y(0) = 0, \alpha(0) = \frac{\pi}{4}$  可得  $C_1 = \frac{\pi}{4}$ . 由

$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$  分离变量解得  $x = \ln(\sin \alpha) + C_2$ , 取  $x = 0$  可得  $C_2 = -\ln\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) =$

$\ln \sqrt{2}$ , 所以  $x = \ln(\sin \alpha) + \ln \sqrt{2} = \ln\left[\sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ , 因此  $y(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) -$

$\frac{\pi}{4}$ .

19.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  成立.

(2) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$ , 证明数列  $\{a_n\}$  收敛.

证 (1) 由拉格朗日中值定理得  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1 + n) - \ln n = \frac{1}{\xi} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ , 其中  $\xi \in (n, n+1)$ , 得证.

(2) 首先有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0, \end{aligned}$$

因此数列  $\{a_n\}$  单调递减. 再将不等式  $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$  对  $k$  从 1 到

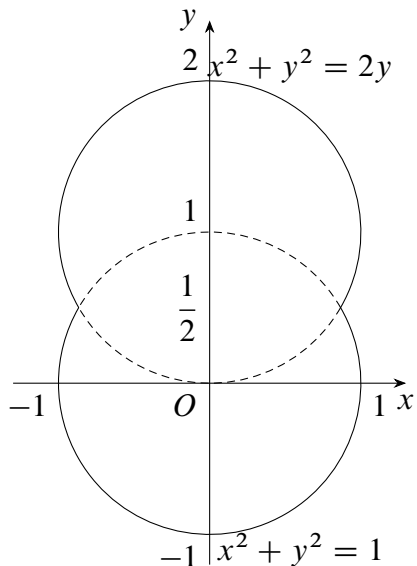
$n$  求和得  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1) > \ln n$ , 因此  $a_n > 0$ . 根据单调有界准则知数列  $\{a_n\}$  收敛.

20.(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕  $y$  轴旋转一周而成的曲面, 该曲面由  $x^2 + y^2 = 2y$  ( $y \geq \frac{1}{2}$ ) 与  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y \leq \frac{1}{2}$ ) 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为  $g\text{m/s}^2$ , 水的密度为  $10^3\text{kg/m}^3$ ).



第 20 题图

解 (1) 由旋转体体积公式可得容器的容积为

$$V = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(1 - y^2)dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi(2y - y^2)dy = \frac{9}{4}\pi.$$

(2) 所求的功分为两部分: 抽出对应于  $y \in [\frac{1}{2}, 2]$  部分容器里的水所做的功  $W_1$  和抽出对应于  $y \in [-1, \frac{1}{2}]$  部分容器里的水所做的功  $W_2$ . 当  $y \in [\frac{1}{2}, 2]$  时, 功微元  $dW = (2 - y)\rho g\pi(2y - y^2)dy$ ; 当  $y \in [-1, \frac{1}{2}]$  时, 功微元  $dW = (2 - y)\rho g\pi(1 - y^2)dy$ , 因此

$$W = W_1 + W_2 = \rho g\pi \left[ \int_{\frac{1}{2}}^2 (2 - y)(2y - y^2)dy + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y)(1 - y^2)dy \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho g \pi \left[ \int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y - 2y^2 + y^3) dy \right] \\
 &= 3375\pi g.
 \end{aligned}$$

即将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做的功为  $3375\pi g J$ .

21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且  $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算二重积分  $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$ .

解 由  $f(1, y) = f(x, 1) = 0$  知  $f'_y(1, y) = f'_x(x, 1) = 0$ , 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 xy f''_{xy}(x, y) dx \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^1 xy d(f'_y(x, y)) = \int_0^1 \left( xy f'_y(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left( y f'_y(1, y) - \int_0^1 y f'_y(x, 1) dx \right) dy = - \int_0^1 dy \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \\
 &= - \int_0^1 dx \int_0^1 y f'_y(x, y) dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 y d(f(x, y)) \\
 &= - \int_0^1 \left( y f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_D f(x, y) dx dy = a.
 \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

解 (1) 首先有  $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , 于是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

因此  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能被  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示等价于  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关, 于是  $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| =$



$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5=0, \text{ 所以 } a=5.$$

(2) 对增广矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  作初等行变换得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

23.(本题满分 11 分)

设  $A$  为 3 阶实对称矩阵,  $A$  的秩为 2, 且  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $A$  的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵  $A$ .

解 (1) 由条件知  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 因此  $-1$  是一个特征值, 且

它对应的特征向量为  $k_1(1, 0, -1)^T, k_1 \neq 0$ ;  $1$  是一个特征值, 它所对应的特征向量为  $k_2(1, 0, 1)^T, k_2 \neq 0$ . 再由  $r(A) = 2$  知  $0$  也是  $A$  的特征值, 设它的特征向量为

$(x_1, x_2, x_3)^T$ , 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得  $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ ,

解得特征值  $0$  对应的特征向量为  $k_3(0, 1, 0)^T, k_3 \neq 0$ .

(2) 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = A$ , 因此

$$A = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 7 2012 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的渐近线的条数为 ( )

A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$ , 所以直线  $y = 1$  是曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ , 所以  $x = 1$  是一条垂直渐近线, 而  $x = -1$  不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  为正整数, 则  $f'(0) =$  ( )

A.  $(-1)^{n-1}(n-1)!$     B.  $(-1)^n(n-1)!$     C.  $(-1)^{n-1}n!$     D.  $(-1)^n n!$

解 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)] = (-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 设  $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ , 则数列  $\{S_n\}$  有界是数列  $\{a_n\}$  收敛的 ( )

A. 充分必要条件                      B. 充分非必要条件  
C. 必要非充分条件                      D. 既非充分也非必要条件

解 由于  $a_n > 0$ , 所以数列  $\{S_n\}$  单调递增. 若  $\{S_n\}$  有界, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ , 则数列  $\{a_n\}$  收敛. 反之若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{S_n\}$  不一定有界, 如取  $a_n = 1$  即可, 因此数列  $\{S_n\}$  有界是数列  $\{a_n\}$  收敛的充分不必要条件, 选 B.

4. 设  $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$ , 则有 ( )

A.  $I_1 < I_2 < I_3$     B.  $I_3 < I_2 < I_1$     C.  $I_2 < I_3 < I_1$     D.  $I_2 < I_1 < I_3$

解

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx \\
 &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < I_1, \\
 I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\
 &= \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\
 &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\
 &= I_1 + \int_0^{\pi} e^{(2\pi-t)^2} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{(2\pi+t)^2} \sin t dt \\
 &= I_1 + \int_0^{\pi} [e^{(2\pi+t)^2} - e^{(2\pi-t)^2}] \sin t dt > I_1.
 \end{aligned}$$

选 D.

5. 设函数  $f(x, y)$  可微, 且对任意的  $x, y$  都有  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ , 则使不等式  $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$  成立的一个充分条件是 ( )

A.  $x_1 > x_2, y_1 < y_2$     B.  $x_1 > x_2, y_1 > y_2$     C.  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$     D.  $x_1 < x_2, y_1 > y_2$

解 由题意知  $f(x, y)$  关于  $x$  单调递增, 而关于  $y$  单调递减, 因此当  $x_1 < x_2, y_1 > y_2$  时,  $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$ , 选 D.

6. 设区域  $D$  由曲线  $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$  围成, 则  $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy =$  ( )

A.  $\pi$                                     B. 2                                    C. -2                                    D.  $-\pi$

解 直接化为累次积分计算得

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^5 y - 1) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 (x^5 y - 1) dy \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} x^5 \cos^2 x - 1 + \sin x \right) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\pi.
 \end{aligned}$$

7. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$                     B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$                     C.  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$                     D.  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 显然可得  $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  一定线性相关, 选 C.

8. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $P$  为 3 阶可逆矩阵, 且  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^{-1}AQ =$  ( )

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系可知  $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 因此

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选 B.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $y = y(x)$  是由方程  $x^2 - y + 1 = e^y$  所确定的隐函数, 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

解 令  $x = 0$  可得  $y(0) = 0$ . 原方程两边对  $x$  求导得  $2x - y' = e^y y'$ , 代入  $x = y = 0$  得  $y'(0) = 0$ . 等式两边再对  $x$  求导的  $2 - y'' = e^y y'' + e^y y'^2$ , 代入  $x = y = 0, y'(0) = 0$

得  $y''(0) = 1$ , 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 1$ .

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$  \_\_\_\_\_.

解 利用定积分定义得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2 + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

11. 设  $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ , 其中函数  $f(u)$  可微, 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$ \_\_\_\_\_.

解 由  $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$  可知  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} f'$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} f'$ , 于是  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{x} f' + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) f' = 0$ .

12. 微分方程  $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$  满足条件  $y|_{x=1} = 1$  的解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

解 由条件得  $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 3y$ , 于是  $\frac{d}{dy}(xy) = x + y \frac{dx}{dy} = 3y^2$ ,  $xy = y^3 + C$ . 当  $x = 1$  时  $y = 1$ , 所以  $C = 0$ ,  $x = y^2$ ,  $y = \sqrt{x}$  (初值条件是  $y(1) = 1$ , 因此舍去  $y = -\sqrt{x}$ ).

13. 曲线  $y = x^2 + x (x < 0)$  上曲率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的点的坐标为\_\_\_\_\_.

解 由条件得  $y' = 2x + 1$ ,  $y'' = 2$ , 曲率  $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1 + (2x + 1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $x = -1$  或  $x = 0$  (舍去). 当  $x = -1$  时,  $y = 0$ , 因此坐标为  $(-1, 0)$ .

14. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $|A| = 3$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵. 若交换  $A$  的第一行与第二行得到矩阵  $B$ , 则  $|BA^*| =$ \_\_\_\_\_.

解 记  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则由题意知  $PA = B$ . 又  $|A| = 3$ , 所以  $|A^*| = |A|^2 = 9$ , 因此  $|BA^*| = |B||A^*| = |P||A||A^*| = -27$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ , 记  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 求常数  $k$  的值.

解 (1) 由题意得

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$f(x) - a = \frac{x + x^2 - \sin x}{x \sin x} - 1 = \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x \sin x}$$

$$\sim \frac{(1+x)(x - \sin x)}{x^2} \sim \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = \frac{1}{6}x,$$

因此  $k = 1$ .

16.(本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  的极值.

解 由  $\begin{cases} f'_x(x, y) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases}$  解得  $f(x, y)$  的驻点为  $(1, 0)$  和  $(-1, 0)$ . 记

$$A = f''_{xx}(x, y) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, B = f''_{xy}(x, y) = y(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

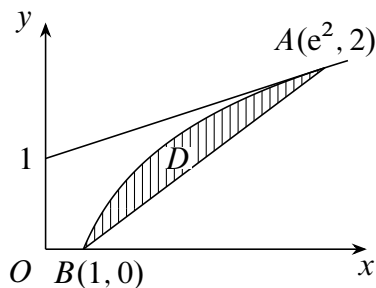
$$C = f''_{yy}(x, y) = x(y^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在驻点  $(1, 0)$  处, 由于  $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0, A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$ , 所以  $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$  为  $f(x, y)$  的极大值. 在驻点  $(-1, 0)$  处, 由于  $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0, A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0$ , 所以  $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$  为  $f(x, y)$  的极小值.

17.(本题满分 12 分)

过  $(0, 1)$  点作曲线  $L: y = \ln x$  的切线, 切点为  $A$ , 又  $L$  与  $x$  轴交于  $B$  点, 区域  $D$  由  $L$  与直线  $AB$  围成, 求区域  $D$  的面积及  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 设  $A$  点的坐标为  $(x_0, \ln x_0)$ , 则切线的方程为  $y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0 = \frac{x}{x_0} - 1 + \ln x_0$ , 代入  $x = 0, y = 1$  得  $x_0 = e^2$ , 因此切线的方程为  $y = \frac{1}{e^2}x + 1$ , 切点  $A$  为  $(e^2, 2)$ , 而  $L$  与  $x$  轴的交点为  $B(1, 0)$ . 那么区域  $D$  的面积为



第 17 题图

$$S = \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2$$

$$\begin{aligned}
 &= x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx - (e^2 - 1) \\
 &= 2e^2 - (e^2 - 1) - (e^2 - 1) = 2.
 \end{aligned}$$

$D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \frac{\pi}{3} \times 2^2 (e^2 - 1) \\
 &= \pi x \ln^2 x \Big|_1^{e^2} - \pi \int_1^{e^2} 2 \ln x dx - \frac{4}{3} \pi (e^2 - 1) \\
 &= 4\pi e^2 - 2\pi x \ln x \Big|_1^{e^2} + 2\pi (e^2 - 1) - \frac{4}{3} \pi (e^2 - 1) \\
 &= \frac{2}{3} \pi (e^2 - 1).
 \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D xy d\sigma$ , 其中区域  $D$  为曲线  $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 与极轴围成.

解 化为极坐标系下的累次积分计算得

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r^3 dr \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta d(\cos \theta) \\
 &= -\frac{1}{4} \int_1^{-1} (1 + u)^4 u du = \frac{16}{15}.
 \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x)$  满足方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  及  $f''(x) + f(x) = 2e^x$ .

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 求曲线  $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$  的拐点.

解 (1) 微分方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , 故方程的通解为  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ . 将  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ ,  $f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$  代入方程  $f''(x) + f(x) = 2e^x$  得  $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$ , 所以  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 故  $f(x) = e^x$ .



(2) 由 (1) 得到曲线  $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, \quad y'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x,$$

令  $y'' = 0$  得  $x = 0, y = 0$ . 当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 因此点  $(0, 0)$  就是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

20.(本题满分 10 分)

证明:  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$ .

证 注意到  $f(x)$  是偶函数, 因此只需要证明  $f'(x) \geq 0, x \in [0, 1)$  即可. 首先有  $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$ , 且  $\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$ , 因此  $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$ . 而  $f(0) = 0$ , 则有  $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$ , 证毕.

21.(本题满分 10 分)

(1) 证明方程  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  ( $n$  为大于 1 的整数) 在区间  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为  $x_n$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限.

证 (1) 令  $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$ , 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \quad f(1) = n > 1,$$

因此由介值定理知方程  $f(x) = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有根. 再由  $f'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 \geq 1 > 0$  知  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内为增函数, 因此方程  $f(x) = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且只有一个根.

(2) 由题意  $f(x_n) = 1$ , 由拉格朗日中值定理得  $f(x_n) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(x_n - \frac{1}{2}\right)$ . 因为  $f'(\xi_n) \geq 1$ , 所以

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| \leq \left|f(x_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{2^n},$$

由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|x_n - \frac{1}{2}\right| = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ .

22.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式  $|A|$ ;

(2) 当实数  $a$  为何值时, 方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵  $(A, \beta)$  作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, \beta) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解当且仅当  $r(A) = r(A, \beta) < 4$ , 因此  $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$ , 解得  $a = -1$ , 此时方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为  $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$ , 其中  $k$  为任意常数.

23.(本题满分 11 分)

已知  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ , 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$  的秩为 2.

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 求正交变换  $x = Qy$  将二次型  $f$  化为标准形.

解 (1) 因为  $r(A) = r(A^T A) = 2$ , 对矩阵  $A$  作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以  $a = -1$ .

(2) 由  $a = -1$  可得  $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , 故矩阵  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  的特征多项式为

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ .

当  $\lambda_1 = 0$  时, 解方程组  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  得  $\lambda_1$  的单位特征向量  $\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$ ;

当  $\lambda_2 = 2$  时, 解方程组  $(2\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  得  $\lambda_2$  的单位特征向量  $\boldsymbol{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ;

当  $\lambda_3 = 6$  时, 解方程组  $(6\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  得  $\lambda_3$  的单位特征向量  $\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$ .

令  $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$ , 则在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  下, 原二次型化为标准形  $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$ .

## 8 2013 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设  $\cos x - 1 = x \cdot \sin \alpha(x)$ ,  $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  ( )

- A. 比  $x$  高阶的无穷小                      B. 比  $x$  低阶的无穷小  
C. 与  $x$  同阶但不等价的无穷小              D. 与  $x$  等价的无穷小

解 利用等价无穷小可知当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \alpha(x) = \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ , 因此  $\sin \alpha(x) \sim -\frac{1}{2}x$ . 所以当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , 于是  $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim -\frac{1}{2}x$ , 即  $\alpha(x)$  是与  $x$  同阶但不等价的无穷小, 选 C.

2. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] =$  ( )  
A. 2                      B. 1                      C. -1                      D. -2

解 当  $x = 0$  时,  $y = 1$ , 方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  两边对  $x$  求导得  $-\sin(xy)(y + xy') + \frac{1}{y} \cdot y' - 1 = 0$ , 代入  $x = 0, y = 1$  得  $y'(0) = f'(0) = 1$ . 则由导数定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] \stackrel{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - 1}{2x} = 2f'(0) = 2,$$

选 A.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则 ( )

- A.  $x = \pi$  为  $F(x)$  的跳跃间断点                      B.  $x = \pi$  为  $F(x)$  的可去间断点  
C.  $F(x)$  在  $x = \pi$  处连续但不可导                      D.  $F(x)$  在  $x = \pi$  处可导

解 首先变上限积分函数一定是连续的,  $f(x)$  在区间  $[0, \pi)$  和  $(\pi, 2\pi]$  内都连续, 利用洛必达法则得

$$F'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^\pi f(t)dt}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0,$$
$$F'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^\pi f(t)dt}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 2.$$

因此  $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$ ,  $F(x)$  在  $x = \pi$  处不可导, 选 C.

4. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$ , 若反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则 ( )

A.  $\alpha < -2$       B.  $\alpha > 2$       C.  $-2 < \alpha < 0$       D.  $0 < \alpha < 2$

解 由  $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^e f(x)dx + \int_e^{+\infty} f(x)dx$  收敛可知  $\int_1^e f(x)dx$  与  $\int_e^{+\infty} f(x)dx$

都收敛. 根据  $p$  积分与对数  $p$  积分的敛散性结论知  $\int_1^e f(x)dx$  收敛当且仅当  $\alpha - 1 <$

$1$ ,  $\int_e^{+\infty} f(x)dx$  收敛当且仅当  $\alpha + 1 > 1$ , 解得  $0 < \alpha < 2$ , 选 D.

5. 设  $z = \frac{y}{x}f(xy)$ , 其中函数  $f$  可微, 则  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$  ( )

A.  $2yf'(xy)$       B.  $-2yf'(xy)$       C.  $\frac{2}{x}f(xy)$       D.  $-\frac{2}{x}f(xy)$

解 利用复合函数求偏导得  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + yf'$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{y} \left( -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy) \right) + \left( \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) \right) \\ &= -\frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) + \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) = 2yf'(xy), \end{aligned}$$

选 A.

6. 设  $D_k$  是圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  位于第  $k$  象限的部分, 记  $I_k = \iint_{D_k} (y - x)dx dy$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), 则 ( )

A.  $I_1 > 0$       B.  $I_2 > 0$       C.  $I_3 > 0$       D.  $I_4 > 0$

解 根据对称性可知  $I_1 = I_3 = 0$ , 而当  $x \in D_2$  时,  $y - x > 0$ , 因此  $I_2 = \iint_{D_2} (y - x)dx dy >$

$0$ . 当  $x \in D_4$  时,  $y - x < 0$ ,  $I_4 < 0$ , 选 B.

7. 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 若  $AB = C$ , 且  $B$  可逆, 则 ( )

A. 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的行向量组等价  
 B. 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价  
 C. 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的行向量组等价  
 D. 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $B$  的列向量组等价

解 对一个矩阵  $A$  右乘一个可逆矩阵  $B$  就是对  $A$  进行一系列的初等列变换后得到矩阵  $C$ , 因此矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价, 选 B.

8. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为 ( )

A.  $a = 0, b = 2$

B.  $a = 0, b$  为任意常数

C.  $a = 2, b = 0$

D.  $a = 2, b$  为任意常数

解 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的特征值为  $2, b, 0$ , 而  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2)$ ,

因此当且仅当  $a = 0$  时,  $A$  的特征值为  $2, b, 0$ , 其中  $b$  可为任意常数, 选 B.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 先取对数利用等价无穷小可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此原极限为  $e^{\frac{1}{2}}$ .

10. 设函数  $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$ , 则  $y = f(x)$  的反函数  $x = f^{-1}(y)$  在  $y = 0$  处的导数  $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由题意知  $f(-1) = 0, f'(x) = \sqrt{1-e^x}$ , 所以  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}, \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$ .

11. 设封闭曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \cos 3\theta, -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ , 则  $L$  所围平面图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 利用极坐标系下的面积公式得

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{\sin 6\theta}{6} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}.$$

12. 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  上对应于  $t = 1$  处的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由参数方程求导公式得  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{t/(1+t^2)}{1/(1+t^2)} = t$ . 当  $t = 1$  时,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = \ln 2$ , 曲线上对应点的法线斜率为  $k = -1$ , 因此法线方程为  $y = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ln 2 = -x + \frac{\pi}{4} + \ln 2$ .

13. 已知  $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$ ,  $y_2 = e^x - xe^{2x}$ ,  $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 因为  $y_1 - y_3 = e^{3x}$ ,  $y_2 - y_3 = e^x$  是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且  $e^{3x}$  与  $e^x$  线性无关. 又因为  $y_3 = -xe^{2x}$  是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为  $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - xe^{2x}$ .

14. 设  $A = (a_{ij})$  是 3 阶非零矩阵,  $|A|$  为  $A$  的行列式,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 若  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$  可知  $A^T = -A^*$ , 于是  $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A^*| = -|A|^2$ , 因此  $|A| = 0$  或  $-1$ . 又  $A$  是非零矩阵, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ , 于是  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$ , 所以  $|A| = -1$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小, 求  $n$  和  $a$  的值.

解 当  $x \rightarrow 0$  时, 利用泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(1 + 2^2 + 3^2)x^2\right) + o(x^2) \sim 7x^2, \end{aligned}$$

因此  $a = 7, n = 2$



提示: 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  的必要非充分条件, 也就是说由

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$  是不能直接得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{nax^{n-1}} = 1$  的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此

用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n (1 - \cos a_k x)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$ .

16.(本题满分 10 分)

设  $D$  是由曲线  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , 直线  $x = a (a > 0)$  及  $x$  轴所围成的平面图形,  $V_x, V_y$  分别是  $D$  绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积. 若  $V_y = 10V_x$ , 求  $a$  的值.

解 利用旋转体的体积公式得

$$V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}, V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}.$$

由  $V_y = 10V_x$  得  $\frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$ .

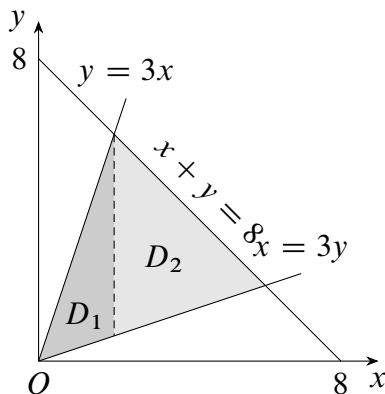
17.(本题满分 10 分)

设平面区域  $D$  由直线  $x = 3y, y = 3x$  及  $x + y = 8$  围成, 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ .

解 积分区域可分为两部分

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{3} \leq y \leq 3x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, \frac{x}{3} \leq y \leq 8 - x \right\}.$$



第 17 题图

则

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy \\ &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\ &= \int_0^2 x^2 \left( 3x - \frac{x}{3} \right) dx + \int_2^6 x^2 \left( 8 - x - \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \frac{416}{3}. \end{aligned}$$



18.(本题满分 10 分)

奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ , 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ ;
- (2) 存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

证 (1) 令  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(0) = f(0) = 0, F(1) = f(1) - 1 = 0$ , 由罗尔定理知存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$ , 即  $f'(\xi) = 1$ .

(2) 因为  $f(x)$  是  $[-1, 1]$  上的奇函数, 所以  $f(x)$  为偶函数.

方法一 令  $G(x) = f(x) + f'(x) - x$ , 则

$$G(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1),$$

$$G(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1.$$

由罗尔定理知存在  $\eta \in (-1, 1)$  使得  $G'(\eta) = f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$ , 即  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

方法二 令  $H(x) = e^x(f'(x) - 1)$ , 由 (1) 可知  $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$ , 因此  $H(\xi) = H(-\xi) = 0$ , 由罗尔定理知存在  $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$  使得  $H'(\eta) = e^\eta(f''(\eta) + f'(\eta) - 1) = 0$ , 即  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

19.(本题满分 10 分)

求曲线  $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$  上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

解 设  $M(x, y)$  为曲线上一点, 该点到坐标原点的距离为  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 构造拉格朗日函数  $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$ , 则

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0 \\ F'_y = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0 \\ F'_\lambda = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$(1, 1)$  是唯一的驻点, 且  $d(1, 1) = \sqrt{2}$ . 考虑边界点  $(0, 1)$  和  $(1, 0)$  有  $d(0, 1) = d(1, 0) = 1$ , 因此曲线上的点到坐标原点的最长距离为  $\sqrt{2}$ , 最短距离为 1.

20.(本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

- (1) 求  $f(x)$  的最小值;
- (2) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限.

证 (1) 由题意得  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ , 则  $x = 1$  为  $f(x)$  的唯一驻点, 且当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ . 所以  $f(x)$  的最小值为  $f_{\min}(x) = f(1) = 1$ .

(2) 由 (1) 知  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ , 又  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 所以  $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$ , 即数列  $\{x_n\}$  单调递增. 再由  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  可知  $\ln x_n < 1 \Rightarrow 0 < x_n < e$ , 所以  $\{x_n\}$  由上界, 由单调有界准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 在等式  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  两边取极限得  $\ln A + \frac{1}{A} \leq 1$ . 由 (1) 知对任意  $x > 0$  都有  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ , 等号成立当且仅当  $x = 1$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = 1$ .

21.(本题满分 11 分)

设曲线  $L$  的方程为  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leq x \leq e)$ .

(1) 求  $L$  的弧长;

(2) 设  $D$  是由曲线  $L$ , 直线  $x = 1, x = e$  及  $x$  轴所围平面图形, 求  $D$  的形心的横坐标.

解 (1) 由曲线的弧长公式得  $L$  的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_1^e \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right) \Big|_1^e = \frac{1 + e^2}{4}. \end{aligned}$$

(2) 由形心公式得  $D$  的形心的横坐标为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x} x dy}{\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x} dy} = \frac{\int_1^e x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx}{\int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx} \\ &= \frac{\frac{1}{16}e^4 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{12}e^3 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}. \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有矩阵  $C$ .

解 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 代入  $AC - CA = B$  得方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (*)$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

由此可知当  $a \neq -1$  或  $b \neq 0$  时, 方程组 (\*) 无解. 当  $a = -1$  且  $b = 0$  时, 方程组 (\*) 有解, 且此时方程组的通解为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数. 因此, 当且仅当  $a = -1, b = 0$  时存在矩阵  $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$  使得  $AC - CA = B$ .

23.(本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ , 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ ;

(2) 若  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  正交且均为单位向量, 证明  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

证 (1) 记  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

因此

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(\mathbf{x}^T\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{x}) + (\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

且  $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$  为对称矩阵, 所以二次型  $f$  对应的矩阵为  $A = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ .

(2) 因为  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 所以

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha,$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta,$$

故  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  是矩阵  $A$  的特征值. 又  $A$  的秩  $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$ , 即  $A$  不是满秩矩阵, 所以  $\lambda_3 = 0$  也是  $A$  的特征值, 故二次型  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

## 9 2014 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若  $\ln^\alpha(1+2x)$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$  均是比  $x$  高阶的无穷小, 则  $\alpha$  的取值范围是 ( )

A.  $(2, +\infty)$       B.  $(1, 2)$       C.  $(\frac{1}{2}, 1)$       D.  $(0, \frac{1}{2})$

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ , 由题意得  $\alpha > 1, \frac{2}{\alpha} > 1$ , 因此  $1 < \alpha < 2$ , 选 B.

2. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A.  $y = x + \sin x$       B.  $y = x^2 + \sin x$       C.  $y = x + \sin \frac{1}{x}$       D.  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ , 从而直线  $y = x$  是曲线  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  的斜渐近线.

3. 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在区间  $[0, 1]$  上 ( )

A. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       B. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$   
C. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       D. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

解 令  $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ , 且  $F''(x) = f''(x)$ . 故当  $f''(x) > 0$  时,  $F(x)$  为凹函数, 它的最大值在端点  $x = 0$  或  $x = 1$  处取到, 而  $F(0) = F(1) = 0$ , 所以  $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ , 选 D.

4. 曲线  $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$  上对应于  $t = 1$  的点处的曲率半径是 ( )

A.  $\frac{\sqrt{10}}{50}$       B.  $\frac{\sqrt{10}}{100}$       C.  $10\sqrt{10}$       D.  $5\sqrt{10}$

解 由参数方程求导公式得  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+4}{2t}$ , 于是

$$\frac{d^2y^2}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{2 \cdot 2t - 2(2t+4)}{(2t)^2} / (2t) = -\frac{1}{t^3}.$$

在  $t = 1$  对应的点处有  $y' = 3, y'' = -1$ , 曲率半径为  $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = 10\sqrt{10}$ , 选 C.

5. 设函数  $f(x) = \arctan x$ , 若  $f(x) = xf'(\xi)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$  ( )

- A. 1                      B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{3}$

解 因为  $\frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1 + \xi^2}$ , 所以  $\xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{3}x^3}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{3},$$

选 D.

6. 设函数  $u(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 在  $D$  的内部具有二阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ , 且  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 则 ( )

- A.  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的边界上取得  
 B.  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的内部取得  
 C.  $u(x, y)$  的最大值在  $D$  的内部取得,  $u(x, y)$  的最小值在  $D$  的边界上取得  
 D.  $u(x, y)$  的最小值在  $D$  的内部取得,  $u(x, y)$  的最大值在  $D$  的边界上取得

解 如果内部有最值点, 那么这一点一定是驻点, 且判别式要满足  $AC - B^2 \geq 0$ . 而在  $D$  内的任意驻点处有  $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ , 因为  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 即  $A + C = 0$ , 那么一定有  $AC - B^2 < 0$ , 矛盾. 因此  $D$  的内部没有最值点, 最值都在边界上取到, 选 A.

7. 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$  ( )

- A.  $(ad - bc)^2$               B.  $-(ad - bc)^2$               C.  $a^2d^2 - b^2c^2$               D.  $b^2c^2 - a^2d^2$

解 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2,$$

选 B.

8. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为三维向量, 则对任意常数  $k, l$ , 向量组  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的 ( )

- A. 必要非充分条件  
B. 充分非必要条件  
C. 充分必要条件  
D. 既非充分也非必要条件

解 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 令  $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}$ , 即

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\alpha_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$

从而  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关. 反之, 如果  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关, 不一定有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 如取反例  $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0)^T$ , 因此选 A.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$  \_\_\_\_\_.

解 
$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{3\pi}{8}.$$

10. 设  $f(x)$  是周期为 4 的可导奇函数, 且  $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$ , 则  $f(7) =$  \_\_\_\_\_.

解 当  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + C$ , 由  $f(0) = 0$  得  $C = 0$ , 即  $f(x) = x^2 - 2x$ . 又  $f(x)$  是周期为 4 的奇函数, 故  $f(7) = f(-1) = -f(1) = 1$ .

11. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$  确定的函数, 则  $dz|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} =$  \_\_\_\_\_.

解 原方程中令  $x = y = \frac{1}{2}$  得  $z = 0$ . 方程  $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$  两边求全微分得  $e^{2yz}(2ydz + 2zdx) + dx + 2ydy + dz = 0$ , 代入  $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$  得  $dz + dx + dy + dz = 0$ , 因此  $dz|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$ .

12. 曲线  $L$  的极坐标方程是  $r = \theta$ , 则  $L$  在点  $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  处的切线的直角坐标方程是 \_\_\_\_\_.

解 曲线  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = r \cos \theta = \theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = \theta \sin \theta \end{cases}$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$ .

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $x = 0, y = \frac{\pi}{2}, \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\pi}$ , 则该点处的切线方程为  $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$ .

13. 一根长为 1 的细棒位于  $x$  轴的区间  $[0, 1]$  上, 若其线密度  $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$ , 则该细棒的质心坐标  $\bar{x} =$  \_\_\_\_\_.

解 利用质心的横坐标公式得  $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1)dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx} = \frac{11}{20}$ .

14. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数为 1, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以  $4 - a^2 \geq 0$ , 解得  $-2 \leq a \leq 2$ .


### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$ .

解 当  $t > 0$  时,  $t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t > t^2(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}) - t = \frac{1}{2}$ , 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \bigg/ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 提示: 事实上, 洛必达法则适用于  $\frac{?}{\infty}$  型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16. (本题满分 10 分)

已知函数  $y = y(x)$  满足微分方程  $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ , 且  $y(2) = 0$ , 求  $y(x)$  的极大值与极小值.

解 由已知等式得  $y' = \frac{1 - x^2}{1 + y^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $y = y(x)$  的驻点为  $x = \pm 1$ . 当  $x < -1$  时,  $y' < 0$ ; 当  $-1 < x < 1$  时,  $y' > 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $y' < 0$ . 原为分方程变量分离得  $(1 + y^2)dy = (1 - x^2)dx$ , 积分可得  $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$ . 由  $y(2) = 0$  可知  $C = \frac{2}{3}$ . 分别代入  $x = \pm 1$  可得函数  $y(x)$  的极大值  $y(1) = 1$ , 极小值  $y(-1) = 0$ .



17.(本题满分 10 分)

设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 计算  $\iint_D \frac{x \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$ .

解 积分区域关于直线  $y = x$  对称, 利用轮换对称性与极坐标可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left( \iint_D \frac{x \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin(\pi r) dr \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z = f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ , 若  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ , 求  $f(u)$  的表达式.

解 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(e^x \cos y)e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y)e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y)e^x \cos y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(e^x \cos y)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y)e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y)e^x \cos y. \end{aligned}$$

所以等式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$  化为

$$f''(e^x \cos y)e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y]e^{2x},$$

因此函数  $f(u)$  满足微分方程  $f''(u) = 4f(u) + u$ , 此方程的通解为  $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$ . 由  $f(0) = f'(0) = 0$  得  $C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0$ , 解得  $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$ , 故  $f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$ .

19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加,  $0 \leq g(x) \leq 1$ . 证明:

- (1)  $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$ ;
- (2)  $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$ .

解 (1) 因为  $0 \leq g(x) \leq 1$ , 所以  $0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x dt = x - a, x \in [a, b]$ .

(2) 令  $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^{a+\int_0^x g(u)du} f(t)dt$ , 则

$$F'(x) = f(x)g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u)du\right)g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u)du\right]g(x).$$

由 (1) 知  $a + \int_a^x g(t)dt \leq a + x - a = x$ , 而  $f(x)$  单调增加, 所以  $F'(x) \geq 0$ , 这说明

$F(x)$  单调增加. 又  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \geq 0$ , 即  $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

20.(本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$ . 定义函数列  $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ , 记  $S_n$  是由曲线  $y = f_n(x)$ , 直线  $x = 1$  及  $x$  轴所围成平面图形的面积, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ .

解 因为  $f(x) = \frac{x}{1+x}, f_1(x) = f(x)$ , 所以

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x},$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}.$$

依此类推可得  $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, x \in [0, 1]$ . 于是  $f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0, f_n(x)$  单调增加. 因为  $f_n(0) = 0$ , 所以  $f_n(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ . 因此

$$S_n = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \ln(1+n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n^2} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1.$$

21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ , 且  $f(y, y) = (y+1)^2 - 2(2-y)\ln y$ . 求曲线  $f(x, y) = 0$  所围成的图形绕直线  $y = -1$  旋转所成旋转体的体积.

解 由  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$  对  $y$  积分可得  $f(x, y) = y^2 + 2y + \varphi(x)$ . 又  $f(y, y) = y^2 + 2y + \varphi(y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$ , 所以  $\varphi(y) = 1 - (2-y)\ln y$ . 因此

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 + 2y + \varphi(x) \\ &= y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x = (y+1)^2 - (2-x)\ln x. \end{aligned}$$

则  $f(x, y) = 0$  对应的曲线方程为  $(y + 1)^2 = (2 - x) \ln x$ , 当  $y = -1$  时,  $x = 1$  或  $2$ . 从而所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (y + 1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (2 - x) \ln x dx = \pi \int_1^2 \ln x d\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \pi \left[ \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) \ln x - \left(2x - \frac{1}{4}x^2\right) \right] \Big|_1^2 = \left(2 \ln 2 - \frac{5}{4}\right) \pi. \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵.

- (1) 求方程  $Ax = 0$  的一个基础解系;
- (2) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ .

解 (1) 对矩阵  $A$  作初等行变换得  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ , 则方

程组  $Ax = 0$  的一个基础解系为  $\alpha = (-1, 2, 3, 1)^T$ .

(2) 对矩阵  $(A \ E)$  作初等行变换得

$$(A \ E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

记  $E = (e_1, e_2, e_3)$ , 则  $Ax = e_1$  的通解为  $x = (2, -1, -1, 0)^T + k_1\alpha, k_1 \in \mathbb{R}$ ;  $Ax = e_2$  的通解为  $x = (6, -3, -4, 0)^T + k_2\alpha, k_2 \in \mathbb{R}$ ;  $Ax = e_3$  的通解为  $x = (-1, 1, 1, 0)^T + k_3\alpha, k_3 \in \mathbb{R}$ . 因此所求的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha) = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & -4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ .

23.(本题满分 11 分)

证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

解 先证明一个基本结论:

#### 引理

秩为 1 的矩阵  $A$  可对角化的充要条件是  $\text{tr}(A) \neq 0$ . 且当  $\text{tr}(A) \neq 0$  时,  $A$  的相似标准形为  $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$ .

**证** 由于  $r(A) = 1$ , 所以方程组  $Ax = 0$  有且只有  $n - 1$  个线性无关的解, 因此 0 至少是  $A$  的  $n - 1$  重特征值, 且它只有  $n - 1$  个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此  $A$  的最后一个特征值就是  $\text{tr}(A)$ . 当  $\text{tr}(A) \neq 0$  时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时  $A$  可对角化, 且其相似标准形为  $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$ . 若  $\text{tr}(A) = 0$ , 则 0 是  $A$  的  $n$  重特征值, 但只有  $n - 1$  个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由  $r(A) = r(B) = 1, \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = n$  可知  $A$  与  $B$  都相似于对角阵  $\text{diag}\{n, 0, \dots, 0\}$ , 故  $A$  与  $B$  相似.

## 10 2015 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列反常积分中收敛的是 ( )

A.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$     B.  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$     C.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$     D.  $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

解 直接计算可知  $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2}$ , 其他选项都发散, 选 D.

2. 函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内 ( )

A. 连续型    B. 有可去间断点    C. 有跳跃间断点    D. 有无穷间断点

解 首先有  $x \neq 0$ , 且  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{x^2}{t} \frac{\sin t}{x}} = e^x$ ,

因此  $f(x)$  有可去间断点  $x = 0$ , 选 B.

3. 设函数  $\begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ), 若  $f'(x)$  在  $x = 0$  处连续, 则 ( )

A.  $\alpha - \beta > 1$     B.  $0 < \alpha - \beta \leq 1$     C.  $\alpha - \beta > 2$     D.  $0 < \alpha - \beta \leq 2$

解 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = 0, f'_-(0) = 0$ , 则

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = f'_-(0) = 0,$$

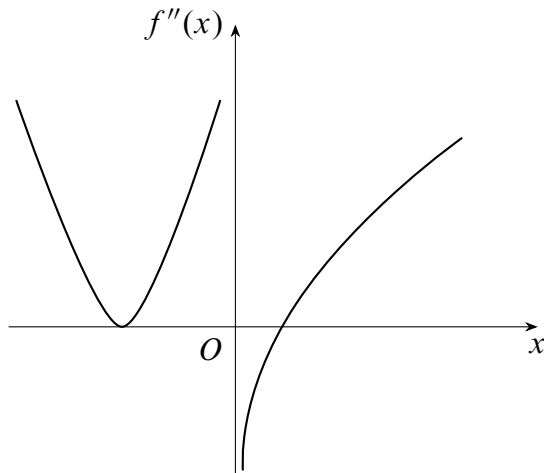
这要求  $\alpha > 1$ . 当  $x > 0$  时,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}.$$

要想  $f'(x)$  在  $x = 0$  处连续, 则

$$0 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right),$$

因此  $\alpha - \beta - 1 > 0$ , 选 A.



第 4 题图

4. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其二阶导函数  $f''(x)$  的图像如图所示, 则曲线  $y = f(x)$  的拐点个数为 ( )

A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

解 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知  $f''(x)$  的符号发生变化的点是原点和  $y = f''(x)$  在  $x > 0$  时与  $x$  轴的交点,  $x < 0$  时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

5. 设函数  $f(u, v)$  满足  $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ , 则  $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$  与  $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$  依次为 ( )

A.  $\frac{1}{2}, 0$                       B.  $0, \frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}, 0$                       D.  $0, -\frac{1}{2}$

解 令  $u = x + y, v = \frac{y}{x}$ , 则  $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$ . 当  $u = v = 1$  时,  $x = y = \frac{1}{2}$ , 从而  $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$  变为

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

因此  $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = \frac{2u(1-v)}{1+v} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = -\frac{1}{2}$ , 选 D.

6. 设  $D$  是第一象限中由曲线  $2xy = 1, 4xy = 1$  与直线  $y = x, y = \sqrt{3}x$  围成的平面区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$  ( )

A.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$       B.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

C.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$       D.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

解 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  得四条曲线分别为  $r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta = \frac{\pi}{4}$  和  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 正确答案选 B.

7. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有

无穷多解的充分必要条件为 ( )

A.  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$     B.  $a \notin \Omega, d \in \Omega$     C.  $a \in \Omega, d \notin \Omega$     D.  $a \in \Omega, d \in \Omega$

解 方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有无穷多解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A \mathbf{b}) < 3$ , 利用初等行变换得

$$(A \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以  $a = 1$  或  $2, d = 1$  或  $2$ , 选 D.

8. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . 若  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  下的标准形为 ( )

A.  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$     B.  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$     C.  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$     D.  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵为  $A$ , 由题意知  $\mathbf{P}^T A \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . 由初等变

换与初等矩阵的关系知  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{C}$ , 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T A \mathbf{Q} &= \mathbf{C}^T (\mathbf{P}^T A \mathbf{P}) \mathbf{C} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  下的标准形为  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , 选 A.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ \_\_\_\_\_.

解 利用参数方程求导公式得  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3 + 3t^2}{1/(1+t^2)} = 3(1+t^2)^2$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{12t(1+t^2)}{1/(1+t^2)} = 12t(1+t^2)^2,$$

因此  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48$ .

10. 函数  $f(x) = x^2 \cdot 2^x$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

解 根据莱布尼茨公式可得

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 \cdot 2(2^x)^{(n-2)} \Big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \ln^{n-2} 2 = n(n-1) \ln^{n-2} 2.$$

11. 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$ , 若  $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$ , 则  $f(1) =$ \_\_\_\_\_.

解 由条件  $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t)dt$ , 求导得  $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + 2x^2 f(x^2)$ , 故  $\varphi(1) = \int_0^1 f(t)dt = 1, \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$ , 则  $f(1) = 2$ .

12. 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的解, 且在  $x = 0$  处取得极值 3, 则  $y(x) =$ \_\_\_\_\_.

解 由题意知  $y(0) = 3, y'(0) = 0$ . 微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 解得  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , 所以微分方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ . 代入  $y(0) = 3, y'(0) = 0$  得  $C_1 = 2, C_2 = 1$ , 故  $y = 2e^x + e^{-2x}$ .

13. 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  确定, 则  $dz|_{(0,0)} =$ \_\_\_\_\_.

解 令  $x = y = 0$  可得  $z(0, 0) = 0$ , 原方程两边同时求全微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + xydz + yzdx + xzdy = 0.$$

令  $x = y = z = 0$  得  $(dx + 2dy + 3dz)|_{(0,0)} = 0$ , 即  $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$ .

14. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 2, -2, 1,  $B = A^2 - A + E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则行列式  $|B| =$ \_\_\_\_\_.

解  $A$  的特征值为 2, -2, 1 则  $B = A^2 - A + E$  的特征值为 3, 7, 1, 因此  $|B| = 21$ .

## 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)




设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \ln(1+x) + bx \sin x = x + a \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3) \\ &= (1+a)x + \left( b - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{a}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  与  $g(x) = kx^3$  当  $x \rightarrow 0$  时为等价无穷小, 所以  $1+a=0$ ,  $b-\frac{a}{2}=0$ ,  $k=\frac{a}{3}$ , 解得  $a=-1$ ,  $b=-\frac{1}{2}$ ,  $c=-\frac{1}{3}$ .

 **提示:** 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  是无法直接

得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$  的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(本题满分 10 分)

设  $A > 0$ ,  $D$  是由曲线段  $y = A \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 及直线  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  所围成的平面区域,  $V_1, V_2$  分别表示  $D$  绕  $x$  轴与  $y$  轴旋转所成旋转体的体积, 若  $V_1 = V_2$ , 求  $A$  的值.

解 由旋转体的体积公式得

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A \sin x)^2 dx = \frac{\pi^2 A^2}{4}, \\ V_2 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x |f(x)| dx = 2\pi A \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2\pi A. \end{aligned}$$

由题意有  $V_1 = V_2$ , 且  $A > 0$ , 所以  $A = \frac{8}{\pi}$ .

17.(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x, y)$  满足  $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$ ,  $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$ ,  $f(0, y) = y^2 + 2y$ , 求  $f(x, y)$  的极值.

解 由  $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$  两边对  $y$  积分得

$$f'_x(x, y) = 2 \left( \frac{1}{2} y^2 + y \right) e^x + \varphi(x) = (y^2 + 2y)e^x + \varphi(x).$$

故  $f'_x(x, 0) = \varphi(x) = (x+1)e^x$ ,  $f'_x(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + (1+x)e^x$ . 两边再对  $x$  积分得  $f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x + \psi(y)$ . 由  $f(0, y) = y^2 + 2y$  知  $\psi(y) = 0$ , 所以  $f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x$ .

$$\text{令 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \text{ 得驻点 } (x, y) = (0, -1). \text{ 又}$$

$$f''_{xx} = (y^2 + 2y)e^x + (x + 2)e^x, f''_{xy} = 2(y + 1)e^x, f''_{yy} = 2e^x.$$

当  $x = 0, y = -1$  时,  $A = f''_{xx}(0, -1) = 1, B = f''_{xy}(0, -1) = 0, C = f''_{yy}(0, -1) = 2$ , 因此  $AC - B^2 > 0, A > 0$ , 故  $f(0, -1) = -1$  为极小值.

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D x(x+y)dxdy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$ .

解 区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 则由对称性得

$$\begin{aligned} \iint_D x(x+y)dxdy &= \iint_D x^2dxdy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2} - x^2)dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cdot 2 \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \quad (x = \sqrt{2} \sin t) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$ , 求  $f(x)$  的零点个数.

解 求导得  $f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}(2x-1)$ , 令  $f'(x) = 0$  得唯一驻点  $x = \frac{1}{2}$ .  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  内单调递减, 在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  内单调递增, 所以  $f(\frac{1}{2})$  是唯一的极小值, 也是最小值. 而  $f(\frac{1}{2}) < f(1) = 0$ , 因此  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  内有一个零点  $x = 1$ . 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , 因此  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  也有一个零点, 共两个零点.

20.(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为  $120^\circ\text{C}$  的物体在  $20^\circ\text{C}$  的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至  $30^\circ\text{C}$ . 若要将该物体的温度继续降至  $21^\circ\text{C}$ , 还需冷却多长时间?

解 设  $t$ (单位: min) 时刻物体温度为  $x(t)$ , 则由题意得  $\frac{dx}{dt} = -k(x-m)$ , 其中比例常数为  $k > 0$ , 介值温度为  $m = 20^\circ\text{C}$ , 解得  $x(t) = Ce^{-kt} + 20$ . 代入  $x(0) = 120$  得

$C = 100$ , 再由  $x(30) = 30$  可得  $k = \frac{\ln 10}{30}$ , 所以  $x(t) = 100e^{-\frac{\ln 10}{30}t} + 20$ . 令  $x = 21$  得  $t = 60$ . 因此要降到  $21^\circ\text{C}$ , 还需要 30min.

21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上具有二阶导数,  $f(a) = 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ . 设  $b > a$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线与  $x$  轴的交点是  $(x_0, 0)$ , 证明  $a < x_0 < b$ .

证 曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线方程为  $y = f(b) + f'(b)(x - b)$ , 令  $y = 0$  得  $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ . 因为  $f'(x) > 0, f(a) = 0$ , 所以  $f(x)$  单调递增,  $f(b) > f(a)$ . 又  $f'(b) > 0$ , 所以  $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$ . 又  $x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)}$ , 在区间  $(a, b)$  上应用拉格朗日中值定理得  $f(b) = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b)$ . 所以

$$x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{f(b)}{f'(\xi)} - \frac{f(b)}{f'(b)} = f(b) \frac{f'(b) - f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)},$$

因为  $f''(x) > 0$ , 所以  $f'(x)$  单调递增, 故  $f'(b) > f'(\xi), x_0 > a$ , 因此  $a < x_0 < b$ .

22.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 且  $A^3 = O$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若矩阵  $X$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 求  $X$ .

解 (1) 因为  $A^3 = O$ , 所以  $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0$ , 所以  $a = 0$ .

(2) 由  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$  得  $(E - A)X(E - A^2) = E$ . 由 (1) 知

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

解 (1) 由于矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 所以  $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$ , 解得

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

(2) 由 (1) 知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 由  $A$  与  $B$  相似知  $|\lambda E - A| =$

$|\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$ , 故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$ .

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  时, 解方程组  $(E - A)x = 0$ , 得线性无关特征向量  $\xi_1 = (2, 1, 0)^T$ ,  $\xi_2 = (-3, 0, 1)^T$ .

当  $\lambda_3 = 5$  时, 解方程组  $(5E - A)x = 0$ , 得特征向量  $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$ .

取  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  为对角阵.

## 11 2016 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

A.  $a_1, a_2, a_3$       B.  $a_2, a_3, a_1$       C.  $a_2, a_1, a_3$       D.  $a_3, a_2, a_1$

解 当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x,$$

所以三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是  $a_2, a_3, a_1$ , 选 B.

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

A.  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$       B.  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

C.  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$       D.  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

解 从四个选项中选一个函数  $F(x)$  满足  $F'(x) = f(x)$  对任意  $x$  成立即可, 其中 B 和 C 当  $x > 1$  时  $F'(x) \neq f(x)$ , 而 A 不满足  $F(x)$  在  $x = 1$  处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 反常积分 ①  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ , ②  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$  的敛散性为 ( )

A. ① 收敛, ② 收敛      B. ① 收敛, ② 发散  
C. ① 发散, ② 收敛      D. ① 发散, ② 发散

解 直接计算得

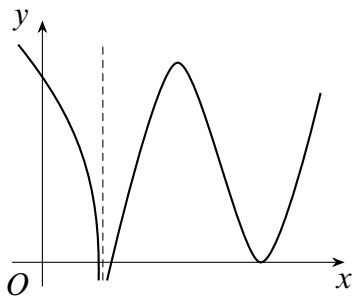
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{-\infty}^{0^-} = 1,$$

则 ① 收敛, 而

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{0^+}^{+\infty} = +\infty,$$

则 ② 发散, 选 B.

4. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ( )



第 4 题图

- A. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点
- B. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 3 个拐点
- C. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 1 个拐点
- D. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点

**解** 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中  $y = f'(x)$  的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

5. 设函数  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) 具有二阶连续导数, 且  $f_i''(x_0) < 0$  ( $i = 1, 2$ ), 若两条曲线  $y = f_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) 在点  $(x_0, y_0)$  处具有公切线  $y = g(x)$ , 且在该点处曲线  $y = f_1(x)$  的曲率大于曲线  $y = f_2(x)$  的曲率, 则在  $x_0$  的某个邻域内, 有 ( )
- A.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$
  - B.  $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$
  - C.  $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$
  - D.  $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

**解**<sup>1</sup> 曲线  $y = f_1(x)$  与  $y = f_2(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  处具有公切线, 故  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ ,  $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$ . 又在该点处曲线  $y = f_1(x)$  的曲率  $K_1$  大于曲线  $y = f_2(x)$  的曲率  $K_2$ , 其中

$$K_1 = \frac{|f_1''(x_0)|}{(1 + f_1'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}, K_2 = \frac{|f_2''(x_0)|}{(1 + f_2'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}},$$

<sup>1</sup>作为选择题而言, 建议大家用切线, 凹凸性和曲率的几何意义做.

且  $f_i''(x) < 0 (i = 1, 2)$ , 因此  $f_1''(x_0) < f_2''(x_0) < 0$ . 由二阶导数的连续性知在  $x_0$  的某个邻域内都有  $f_1''(x) < f_2''(x) < 0$ , 由泰勒公式

$$f_i(x) = f_i(x_0) + f_i'(x_0)(x - x_0) + \frac{f_i''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \quad (i = 1, 2)$$

以及  $g(x) = f_i(x_0) + f_i'(x_0)(x - x_0)$  可得在  $x_0$  的某邻域内有  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$ .

6. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$ , 则 ( )

- A.  $f'_x - f'_y = 0$       B.  $f'_x + f'_y = 0$       C.  $f'_x - f'_y = f$       D.  $f'_x + f'_y = f$

解 由  $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$  得  $f'_x(x, y) = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x-y)^2}$ , 故  $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x-y} = f(x)$ , 选 D.

7. 设  $A, B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是 ( )

- A.  $A^T$  与  $A^T$  相似      B.  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似  
C.  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似      D.  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似

解 由  $A$  与  $B$  相似知存在可逆矩阵  $P$  使得  $B = P^{-1}AP$ , 因此

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, \quad B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P,$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ , 则

$A$  与  $B$  相似, 但  $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$  与  $B + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$  不相似.

8. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 ( )

- A.  $a > 1$       B.  $a < -2$       C.  $-2 < a < 1$       D.  $a = 1$  或  $a = -2$

解 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$ . 由于  $f(x_1, x_2, x_3)$  的正负惯性指数分别为 1, 2, 即正负特征值个数分别为 1, 2, 因此  $\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$ , 即  $-2 < a < 1$ , 选 C.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

解

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left( \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) \right) = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为  $y = x + \frac{\pi}{2}$ .

10. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ \_\_\_\_\_.

解 利用定积分定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} = \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

11. 以  $y = x^2 - e^x$  和  $y = x^2$  为特解的一阶非齐次线性微分方程为\_\_\_\_\_.

解 设一阶非齐次线性微分方程为  $y' + p(x)y = q(x)$ , 将特解代入得

$$\begin{cases} 2x + x^2 p(x) = q(x) \\ 2x - e^x + (x^2 - e^x) p(x) = q(x) \end{cases}$$

解得  $p(x) = -1, q(x) = 2x - x^2$ , 故此微分方程为  $y' - y = 2x - x^2$ .

12. 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 则当  $n \geq 2$  时,  $f^{(n)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

解 注意到  $f(0) = 1$ , 且等式两边是可导的, 两边求导得  $f'(x) = 2(1+x) + 2f(x)$ , 则  $f'(0) = 4$ . 两边再求导得  $f''(x) = 2 + 2f'(x)$ , 则  $f''(0) = 10$ , 两边同时求  $n-2$  阶导数得到  $f^{(n)}(x) = 2f^{(n-1)}(x)$ , 则  $f^{(n)}(0) = 2f^{(n-1)}(0) = \cdots = 2^{n-2} f''(0) = 5 \cdot 2^{n-1}$ .

13. 已知动点  $P$  在曲线  $y = x^3$  上运动, 记坐标原点与点  $P$  间的距离为  $l$ . 若点  $P$  的横坐标对时间的变化率为常数  $v_0$ , 则当点  $P$  运动到点  $(1, 1)$  时,  $l$  对时间的变化率是\_\_\_\_\_.

解 注意到  $l = \sqrt{x^2 + x^6}$ , 两边对时间  $t$  求导得

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2x + 6x^5}{2\sqrt{x^2 + x^6}} \frac{dx}{dt},$$



$x = 1$  时,  $\frac{dx}{dt} = v_0$ , 所以  $\left. \frac{dl}{dt} \right|_{x=1} = \frac{8}{2\sqrt{2}}v_0 = 2\sqrt{2}v_0$ .

14. 设矩阵  $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  等价, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

解 因为矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  等价, 所以  $r(A) = r(B) =$

2, 因此  $|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2) = 0$ , 得  $a = 2$  或  $a = -1$ . 注意到

$a = -1$  时,  $r(A) = 1$  不满足条件, 因此  $a = 2$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$ .

解 首先有  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4}\right)$ , 其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x - 1 + 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - 2 \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (x - \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

因此原极限为  $e^{\frac{1}{3}}$ .

16.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$  ( $x > 0$ ), 求  $f'(x)$  并求  $f(x)$  的最小值.

解 首先

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases},$$

于是  $f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ . 当  $x \geq 1$  时,  $f'(x) = 2x > 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 令  $f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ , 且  $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ , 因此  $x = \frac{1}{2}$  是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故  $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

17.(本题满分 10 分)

已知函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$  确定, 求  $z = z(x, y)$  的极值.

解 原方程两边分别对  $x, y$  求偏导数得

$$2xz + (x^2 + y^2)z'_x + \frac{1}{z}z'_x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$2yz + (x^2 + y^2)z'_y + \frac{1}{z}z'_y + 2 = 0 \quad (2)$$

令  $z'_x = z'_y = 0$  得  $\begin{cases} xz + 1 = 0 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}$ , 解得  $y = x, z = -\frac{1}{x}$ , 代入原方程得  $2x + 2 + \ln(-x) = 0$ , 利用求导考虑单调性知此方程的唯一根为  $x = -1$ , 于是  $y = -1, z = 1$ , 点  $(-1, -1)$  是函数  $z(x, y)$  的唯一驻点. 等式 (1) 两边分别对  $x, y$  求偏导数, 等式 (2) 两边对  $y$  求偏导数并代入 2 得

$$2z + 2xz'_x + 2xz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xx} + \frac{1}{z}z''_{xx} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_x\right)z'_x = 0 \quad (3)$$

$$2z + 2yz'_y + 2yz'_y + (x^2 + y^2)z''_{yy} + \frac{1}{z}z''_{yy} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_y = 0 \quad (4)$$

$$2xyz'_y + 2yz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xy} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_x + \frac{1}{z}z''_{xy} = 0 \quad (5)$$

代入  $z(-1 - 1) = 1, z'_x(-1 - 1) = z'_y(-1 - 1) = 0$  得

$$\begin{cases} 2z + (x^2 + y^2)z''_{xx} + \frac{1}{z}z''_{xx} = 0 \\ 2z + (x^2 + y^2)z''_{yy} + \frac{1}{z}z''_{yy} = 0, \\ (x^2 + y^2)z''_{xy} + \frac{1}{z}z''_{xy} = 0 \end{cases}$$

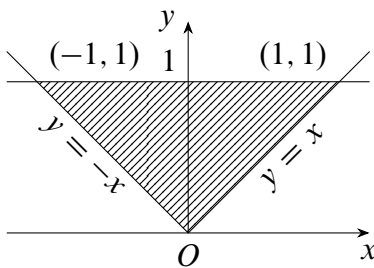
因此  $A = z''_{xx}(-1, -1) = -\frac{2}{3}, B = z''_{xy}(-1, -1) = 0, C = z''_{yy}(-1, -1) = -\frac{2}{3}$ . 由  $AC - B^2 > 0, A < 0$  知  $z(-1, -1) = 1$  是函数  $z(x, y)$  的极大值.

18.(本题满分 10 分)

设  $D$  是由直线  $y = 1, y = x, y = -x$  围成的有界区域, 计算二重积分  $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$ .

解 首先

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \right\},$$



第 18 题图

且利用积分区域关于  $y$  轴对称可得原积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cot^2 \theta - 1) d\theta = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$  的两个解, 若  $u(-1) = e, u(0) = -1$ , 求  $u(x)$  并写出微分方程的通解.

解 由  $y_2(x) = u(x)e^x$  得  $y_2' = u(x)e^x + u'(x)e^x, y_2'' = u(x)e^x + 2u'(x)e^x + u''(x)e^x$ , 代入原方程得

$$(2x - 1)e^x [u''(x) + 2u'(x) + u(x)] - (2x + 1)e^x (u'(x) + u(x)) + 2u(x)e^x = 0.$$

即  $(2x - 1)u''(x) + (2x - 3)u'(x) = 0$ , 变量分离得到  $\frac{du'(x)}{u'(x)} = -\frac{2x - 3}{2x - 1} dx$ , 两边积分得

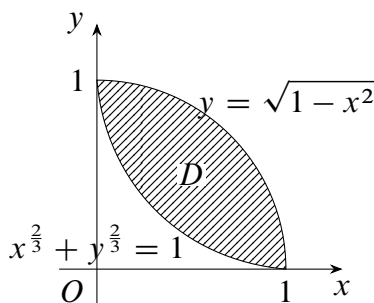
$$\ln|u'(x)| = -\int \left(1 - \frac{2}{2x - 1}\right) dx = -x + \ln|2x - 1| + \ln C_1,$$

因此  $u'(x) = C_1(2x - 1)e^{-x}$ ,  $u(x) = -C_1(2x + 1)e^{-x} + C_2$ . 由  $u(-1) = e$ ,  $u(0) = -1$  得  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , 所以  $u(x) = -(2x + 1)e^{-x}$ . 由二阶线性微分方程解的结构定理知原方程的通解为  $y = k_1y_1 + k_2y_2 = k_1e^x - k_2(2x + 1)$ ,  $k_1, k_2$  为任意常数.

20.(本题满分 11 分)

设  $D$  是曲线  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) 围成的平面区域, 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解 上下两条曲线分别记为  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ , 利用曲线的参数方程得  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为



第 20 题图

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y_1^2(x) dx - \pi \int_0^1 y_2^2(x) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t (-\sin t) dt - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt = \frac{18\pi}{35}. \end{aligned}$$

旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= 2\pi + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{3 \cos^2 t (\sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi + 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{16\pi}{5}. \end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  内是函数  $\frac{\cos x}{2x - 3\pi}$  的一个原函数, 且  $f(0) = 0$ .

- (1) 求  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  上的平均值;  
 (2) 证明  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  内存在唯一零点.

解 (1) 由题意知  $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t - 3\pi} dt$ , 因此  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  上的平均值为

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t - 3\pi} dt \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t - 3\pi} dx \\ &= -\frac{1}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{3\pi}. \end{aligned}$$

(2) 由  $f'(x) = \frac{\cos x}{2x - 3\pi} = 0$  得  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  内的唯一驻点为  $x = \frac{\pi}{2}$ . 且当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时  $f'(x) > 0$ , 当  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $x = \frac{\pi}{2}$  是  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  内的最小值点. 由  $f(0) = 0$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t - 3\pi} dt < 0$ ,  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} > 0$  结合零点定理与单调性可知  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  内存在唯一零点.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ , 且方程组  $Ax = \beta$  无解.

- (1) 求  $a$  的值;  
 (2) 求方程组  $A^T Ax = A^T \beta$  的通解.

解 (1) 对增广矩阵  $(A, \beta)$  进行初等行变换得

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & a-2 \end{pmatrix},$$

方程组  $Ax = \beta$  无解, 所以  $r(A) < r(A, \beta)$ , 可知  $a = 0$ .

(2) 由于  $a = 0$ , 所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

方程组  $A^T A \mathbf{x} = A^T \boldsymbol{\beta}$  的增广矩阵  $(A^T A, A^T \boldsymbol{\beta})$  作初等行变换得

$$(A^T A, A^T \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A^T A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系为  $\boldsymbol{\xi} = (0, -1, 1)^T$ ,  $A^T A \mathbf{x} = A^T \boldsymbol{\beta}$  的特解为  $\boldsymbol{\eta} = (1, -2, 0)^T$ , 所以  $A^T A \mathbf{x} = A^T \boldsymbol{\beta}$  的通解为  $\mathbf{x} = k(0, -1, 1)^T + (1, -2, 0)^T$ , 其中  $k$  为任意常数.

23.(本题满分 11 分)

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $A^{99}$ ;

(2) 设 3 阶矩阵  $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ , 将  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$  分别表示为  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  的线性组合.

解 (1) 首先由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$  知  $A$  的特征值为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0.$$

当  $\lambda_1 = -1$  时, 解方程组  $(-E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 得特征向量  $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 0)^T$ .

当  $\lambda_2 = -2$  时, 解方程组  $(-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 得特征向量  $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 2, 0)^T$ .

当  $\lambda_3 = 0$  时, 解方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 得特征向量  $\boldsymbol{\xi}_3 = (3, 2, 2)^T$ .

令  $P = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$ , 所以

$$\begin{aligned} A^{99} &= (P\Lambda P^{-1})^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由  $B^2 = BA$  知  $B^{100} = BA^{99} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 即  $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$ ,  $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$ ,  $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$ .

## 12 2017 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则 ( )

A.  $ab = \frac{1}{2}$       B.  $ab = -\frac{1}{2}$       C.  $ab = 0$       D.  $ab = 2$

解 由  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续得  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设二阶可导函数  $f(x)$  满足  $f(1) = f(-1) = 1$ ,  $f(0) = -1$ , 且  $f''(x) > 0$ , 则 ( )

A.  $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$       B.  $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$   
 C.  $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$       D.  $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

解 由于  $f''(x) < 0$ , 则函数  $f(x)$  为凸函数, 从而  $f(x)$  图像上连接两点的弧在连接着两点的割线的下方, 即

$$f(x) < f(0) + [f(1) - f(0)]x = 2x - 1, x \in (0, 1),$$

因此  $\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 (2x - 1) dx = 0$ . 同理有  $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$ , 选 B.

3. 设数列  $\{x_n\}$  收敛, 则 ( )

A. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$   
 B. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$   
 C. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$   
 D. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

解 A 不对, 反例取  $x_n = \pi$ ; B, C 不对, 反例取  $x_n = -1$ ; D 是对的, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,



则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = x + \sin x = 0$ , 而方程  $x + \sin x = 0$  的唯一实根就是  $x = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 选 D.

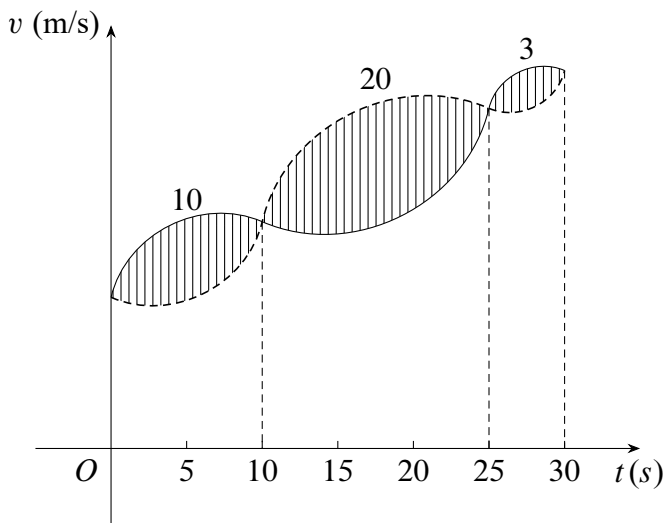
4. 微分方程  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$  的特解可设为  $y^* =$  ( )
- A.  $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$       B.  $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$   
 C.  $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$       D.  $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

解 齐次方程的特征根为  $\lambda = 2 \pm 2i$ , 原方程的非齐次项有两项, 其中  $e^{2x}$  对应的特解形式  $y_1 = Ae^{2x}$ ,  $e^{2x} \cos 2x$  对应的特解形式  $y_2 = xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$ , 选 C.

5. 设  $f(x, y)$  具有一阶偏导数, 且在任意的  $(x, y)$ , 都有  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ , 则 ( )
- A.  $f(0, 0) > f(1, 1)$       B.  $f(0, 0) < f(1, 1)$   
 C.  $f(0, 1) > f(1, 0)$       D.  $f(0, 1) < f(1, 0)$

解 由题意可知  $f(x, y)$  关于  $x$  递增, 关于  $y$  递减, 因此  $f(0, 1) < f(0, 0) < f(1, 0)$ , 选 D.

6. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$  (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线  $v = v_2(t)$ , 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为  $t_0$  (单位: s), 则 ( )
- A.  $t_0 = 10$       B.  $15 < t_0 < 20$       C.  $t_0 = 25$       D.  $t_0 > 25$



第 6 题图

解 从 0 到  $t_0$  时刻, 甲和乙的位移分别为  $\int_0^{t_0} v_1(t)dt$  与  $\int_0^{t_0} v_2(t)dt$ . 要使乙追上甲, 则有  $\int_0^{t_0} (v_2(t) - v_1(t))dt = 10$ , 由定积分的几何意义知  $\int_0^{25} (v_2(t) - v_1(t))dt = 20 - 10 = 10$ , 可知  $t_0 = 25$ , 选 C.

7. 设  $A$  为三阶矩阵,  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为可逆矩阵, 使得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) =$  ( )

- A.  $\alpha_1 + \alpha_3$                   B.  $\alpha_2 + 2\alpha_3$                   C.  $\alpha_2 + \alpha_3$                   D.  $\alpha_1 + 2\alpha_2$

解 根据题意知  $A$  的特征值为  $0, 1, 2$ , 且  $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = 2\alpha_3$ , 则  $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_2 + 2\alpha_3$ , 选 B.

8. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则 ( )

- A.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似                  B.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似  
C.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似                  D.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似

解 注意到  $A, B$  的特征值都是  $2, 2, 1$ , 要判断  $A, B$  是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值  $\lambda = 2$  的情形即可. 对矩阵  $A$  有  $r(2E - A) = 1$ , 因此  $A$  的二重特征值  $2$  有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即  $A$  与  $C$  相似. 对矩阵  $B$ , 有  $r(2E - B) = 2$ , 它是不可对角化的,  $B$  与  $C$  不相似, 选 B.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线  $y = x\left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right)$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

解 直接计算有  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right) = 1$ , 而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x\left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right) - x\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{2}{x} = 2,$$

因此斜渐近线方程为  $y = ax + b = x + 2$ .

10. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$  确定, 则  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} =$ \_\_\_\_\_.

解 由参数方程求导公式得  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{1 + e^t}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-(1 + e^t) \sin t - e^t \cos t}{(1 + e^t)^3},$$

因此  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{8}$ .

11.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
解

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= - \frac{1}{1+x} \Big|_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

12. 设函数  $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$ ,  $f(0, 0) = 0$ , 则  $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 容易知道  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy = d(xye^y)$ , 因此  $f(x, y) = xye^y + C$ , 再由  $f(0, 0) = 0$  知  $C = 0$ , 因此  $f(x, y) = xye^y$ .

13.  $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 交换二重积分次序可得

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln(\cos 1).$$

14. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  的一个特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由题意得  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 因此  $\lambda = 1, a = -1$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$ .

解 令  $u = x - t$ , 则  $\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du$ , 故原极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设函数  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数,  $y = f(e^x, \cos x)$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ ,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ .

解 由复合函数的偏导数法则可得  $\frac{dy}{dx} = e^x f'_1 + f'_2(-\sin x)$ , 故  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1)$ . 进而

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= e^x f'_1 + e^x \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \cos x \cdot f'_2 - \sin x \frac{\partial f'_2}{\partial x} \\ &= e^x f'_1 + e^x (e^x f''_{11} - \sin x \cdot f''_{12}) - \cos x \cdot f'_2 - \sin x (e^x f''_{21} - \sin x \cdot f''_{22}) \\ &= e^x f'_1 - f'_2 \cos x + e^{2x} f''_{11} - 2e^x f''_{21} \sin x - f''_{22} \sin^2 x, \end{aligned}$$

所以  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1) + f''_{11}(1, 1)$ .

17.(本题满分 10 分)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ .

解 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^2) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知函数  $y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$  确定, 求  $y(x)$  的极值.

解 将方程中的  $y$  视为  $x$  的函数, 两边求导得  $3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0$ . 令  $y' = 0$  得  $x = \pm 1$ , 且  $x = 1$  时  $y = 1$ ,  $x = -1$  时  $y = 0$ . 等式两边再对  $x$  求导得

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' + y'' = 0,$$

从而  $y'' = -\frac{2(x + yy'^2)}{1 + y^2}$ . 于是在点  $(1, 1)$  处有  $y'' = -1 < 0$ , 从而  $y(1) = 1$  是极大值; 而在点  $(-1, 0)$  处有  $y'' = 2 > 0$ , 从而  $y(-1) = 0$  是极小值.

19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ , 证明:

(1) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在一个实根;

(2) 方程  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个实根.

解 (1) 因为极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ , 所以  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . 且由极限的保号性知存在  $\eta \in (0, 1)$  使得  $\frac{f(\eta)}{\eta} < 0$ , 即  $f(\eta) < 0$ . 又  $f(1) > 0$ , 所以由零点定理知存在  $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$  使得  $f(\xi) = 0$ , 即  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  内有根.

(2) 由于  $f(0) = f(\xi) = 0$ , 所以根据罗尔定理知存在  $\zeta \in (0, \xi)$  使得  $f'(\zeta) = 0$ . 令  $F(x) = f(x)f'(x)$ , 则  $F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2$ . 那么有  $F(0) = F(\zeta) = F(\xi) = 0$ , 因此再由罗尔定理知存在  $\xi_1 \in (0, \zeta)$ ,  $\xi_2 \in (\zeta, \xi)$  使得  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ , 即方程  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个实根.

20.(本题满分 11 分)

已知平面区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , 计算二重积分  $\iint_D (x+1)^2 dx dy$ .

解 积分区域关于  $y$  轴对称, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x+1)^2 dx dy &= \iint_D x^2 dx dy + \iint_D dx dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr + \pi \\ &= \pi + 4 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta \\ &= \pi + 8 \int_0^\pi (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta \\ &= \pi + 8 \left( \frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} \right) = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

设  $y(x)$  是区间  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$  内的可导函数, 且  $y(1) = 0$ . 点  $P$  是曲线  $L: y = y(x)$  上任意一点,  $L$  在点  $P$  处的切线与  $y$  轴相交于点  $(0, Y_p)$ , 法线与  $x$  轴相交于点  $(X_p, 0)$ . 若  $X_p = Y_p$ , 求  $L$  上点的坐标  $(x, y)$  满足的方程.

解 点  $(x, y)$  处的切线方程为  $Y - y = y'(X - x)$ , 令  $X = 0$  可得  $Y_p = -xy' + y$ . 法线方程为  $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ , 令  $Y = 0$  可得  $X_p = x + yy'$ . 由条件  $X_p = Y_p$  得

$x + yy' = y - xy'$ , 即  $y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{y/x-1}{y/x+1}$ . 令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $x \frac{du}{dx} + u = \frac{u-1}{u+1}$ , 即

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

分离变量得  $\int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x}$ , 解得  $\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctan u = -\ln x + C (x > 0)$ .

当  $x = 1$  时  $u = 0$ , 于是  $C = 0$ , 故

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) + \arctan \frac{y}{x} = -\ln x,$$

即  $\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = 0$ .

22.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有三个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ .

(1) 证明:  $r(A) = 2$ ;

(2) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程  $Ax = \beta$  的通解.

解 (1) 由于矩阵  $A$  有三个不同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 因此  $A$  与对角阵  $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以  $r(A) \geq 2$ . 又  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$  说明  $A$  的列向量组线性相关, 故  $r(A) \leq 2$ , 因此  $r(A) = 2$ .

(2) 因为  $r(A) = 2$ , 所以  $Ax = 0$  的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$  可知  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ , 即方程组  $Ax = 0$  的一个解就是  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . 而

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 则方程组  $Ax = \beta$  的一个特解为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 进而方程组  $Ax = \beta$  的通

解为  $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$ .

23.(本题满分 11 分)

设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$ .

解 首先二次型的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$ . 由于二次型在正交变换下的标准形为

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 故  $A$  一定有零特征值, 所以  $|A| = 0$ , 解得  $a = 2$ .

由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$  可知  $A$  的三个特征值为  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$ .

解方程组  $(-3E - A)x = 0$  得特征值  $\lambda_1 = -3$  的一个单位特征向量  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

解方程组  $(6\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  得特征值  $\lambda_2 = 6$  的一个单位特征向量  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

解方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  得特征值  $\lambda_3 = 0$  的一个单位特征向量  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

因此  $\mathbf{Q} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$  即为所求正交矩阵.

## 13 2018 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ , 则 ( )

A.  $a = \frac{1}{2}, b = -1$     B.  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$     C.  $a = \frac{1}{2}, b = 1$     D.  $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

解 由条件得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + ax^2 + bx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1 + ax^2 + bx)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + ax^2 + bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + ax^2 + bx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b)x + (\frac{1}{2} + a)x^2 + o(x^2)}{x^2}, \end{aligned}$$

因此  $b = -1, a = -\frac{1}{2}$ .

2. 下列函数中, 在  $x = 0$  处不可导的是 ( )

A.  $f(x) = |x| \sin|x|$

B.  $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C.  $f(x) = \cos|x|$

D.  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

解 A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得  $f'_+(0) = -\frac{1}{2}, f'_-(0) = \frac{1}{2}$ , 选 D.

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x - b, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若  $f(x) + g(x)$  在  $\mathbb{R}$

上连续, 则 ( )

A.  $a = 3, b = 1$

B.  $a = 3, b = 2$

C.  $a = -3, b = 1$

D.  $a = -3, b = 2$

解 即  $f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 - ax, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 < x < 0 \\ x - b + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  连续, 可得  $a = -3, b = 2$ .

4. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 则 ( )



- A. 当  $f'(x) < 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$       B. 当  $f''(x) < 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$   
 C. 当  $f'(x) > 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$       D. 当  $f''(x) > 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

解 考虑  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处的泰勒展开式:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当  $f''(x) > 0$  时,  $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 不等式两边在  $[0, 1]$  上进行积分可得  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ , 选 D.

5. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$ ,  $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$ ,  $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$ , 则 ( )

- A.  $M > N > K$       B.  $M > K > N$       C.  $K > M > N$       D.  $N > M > K$

解 利用对称性可以计算  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$ , 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见  $K > \pi = M > N$ .

6.  $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy =$  ( )

- A.  $\frac{5}{3}$       B.  $\frac{5}{6}$       C.  $\frac{7}{3}$       D.  $\frac{7}{6}$

解 注意到积分区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 由对称性可得

$$I = \iint_D (1-xy) dx dy = \iint_D dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy = 2 \int_0^1 (2-x^2-x) dx = \frac{7}{3}.$$

7. 下列矩阵中, 与矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  相似的为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵  $\lambda E - A$  的秩相等, 即  $E - A$  的秩相等, 选 A.

8. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 记  $r(X)$  为矩阵  $X$  的秩,  $(X Y)$  表示分块矩阵, 则 ( )

- A.  $r(A \ AB) = r(A)$       B.  $r(A \ BA) = r(A)$   
 C.  $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$       D.  $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

解 对于 A, 有  $(A \ AB) = A(E \ B)$ , 且  $(E \ B)$  为行满秩的矩阵, 则  $r(A \ AB) = r(A)$ ,

即选 A. B 错误, 反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . C 错误,  $r(A \ B) \geq \max\{r(A), r(B)\}$ ,  
反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D 错误, 反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由拉格朗日中值定理知  $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \frac{1}{1+\xi^2}$ ,  $x < \xi < x+1$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+\xi^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

10. 曲线  $y = x^2 + 2 \ln x$  在其拐点处的切线方程是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 计算可得  $y' = 2x + \frac{2}{x}$ ,  $y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$ , 由此得曲线的拐点坐标为  $(1, 1)$ . 曲线在拐点处切线的斜率为  $y'|_{x=1} = 4$ , 故切线方程为  $y = 4x - 3$ .

11.  $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = -\frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x-3)] \Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

12. 曲线  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的曲率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 直接由参数方程曲率计算公式得  $K = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{3/2}} = \frac{2}{3}$ .

13. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $\ln z + e^{z-1} = xy$  确定, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 原方程两边对  $x$  求偏导数得  $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + e^{z-1} \frac{\partial z}{\partial x} = y$ , 于是  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\frac{1}{z} + e^{z-1}}$ , 当  $x = 2, y = \frac{1}{2}$

时,  $z = 1$ , 于是  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ .

14. 设  $A$  为三阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的向量组. 若  $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$ , 则  $A$  的实特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由题意得  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . 由于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 记  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P$  是可逆矩阵, 因此矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 它们有相同的特征值, 易求得  $B$  的实特征值为 2, 即  $A$  的实特征值为 2.

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求不定积分  $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$ .

解 利用分部积分法

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{e^x - 1} d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x - 1} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) &= \int \frac{t}{\sqrt{t - 1}} dt = \int \frac{t - 1 + 1}{\sqrt{t - 1}} dt \\ &= \int \sqrt{t - 1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t - 1}} \\ &= \frac{2}{3} (t - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t - 1} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} + C_1.$$

16.(本题满分 10 分)

已知连续函数  $f(x)$  满足  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x - t) dt = ax^2$ .

(1) 求  $f(x)$ ;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的平均值为 1, 求  $a$  的值.

解 (1) 首先  $\int_0^x t f(x-t) dt = \int_0^x (x-u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$ , 因此在此方程  $\int_0^x f(t) dt + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = ax^2$  两边求导得

$$f(x) + xf(x) + \int_0^x f(u) du - xf(x) = f(x) + \int_0^x f(u) du = 2ax.$$

可知  $f(0) = 0$ . 注意到等式两边是可导的, 继续求导得  $f'(x) + f(x) = 2a$ , 等式两边乘以  $e^x$  可得  $(e^x f(x))' = 2ae^x$ , 因此  $e^x f(x) = 2ae^x + C$ . 由  $f(0) = 0$  知  $C = -2a$ , 因此  $f(x) = 2a - 2ae^{-x}$ .

(2) 根据条件可得  $\int_0^1 f(x) dx = 2a \int_0^1 (1 - e^{-x}) dx = 2ae^{-1} = 1, a = \frac{e}{2}$ .

17.(本题满分 10 分)

设平面区域  $D$  由曲线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  与  $x$  轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D (x + 2y) dx dy.$$

解 积分区域看成为  $X$  型区域:  $\begin{cases} 0 \leq y \leq \varphi(x) \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ , 化成累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\varphi(x)} (x + 2y) dy = \int_0^{2\pi} (x\varphi(x) + 2\varphi^2(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} ((t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2) d(t - \sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} ((t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2)(1 - \cos t) dt \\ &= 5\pi + 3\pi^2. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知常数  $k \geq 2 \ln 2 - 1$ , 证明:  $(x - 1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$ .

解 原不等式等价于  $\begin{cases} x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \geq 0, & x \geq 1 \\ x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \leq 0, & x < 1 \end{cases}$ .

令  $f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1$ , 则  $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x}$ .

令  $g(x) = x - 2 \ln x + 2k$ , 则  $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} \begin{cases} > 0, & x > 2 \\ = 0, & x = 2 \\ < 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$ , 因此  $g(x)$  在  $(0, 2)$  内单

调递减, 在  $(2, +\infty)$  内单调递增,  $g_{\min}(x) = g(2) \geq 2 \ln 2 > 0$ . 这就说明  $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$ , 因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 且  $f(1) = 0$ , 所以

$$\begin{cases} x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \geq 0, & x \geq 1 \\ x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \leq 0, & x < 1 \end{cases}$$

成立, 原不等式得证.

19.(本题满分 10 分)

<sup>1</sup>将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 设分成的三段依次为  $x, y, z$ , 则  $x + y + z = 2$ , 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为  $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$ , 因此三个面积的和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{z}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令  $f(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$ , 首先求驻点. 由

$$\text{方程} \begin{cases} f'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ f'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \\ f'_z = \frac{\sqrt{3}}{18}z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ 并且黑塞矩阵 } Hf = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18} \right\}$$

正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为  $S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2$ .

方法二 由柯西不等式  $\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right) \left(4\pi + 16 + \frac{36}{\sqrt{3}}\right) \geq (x + y + z)^2 = 4$ ,

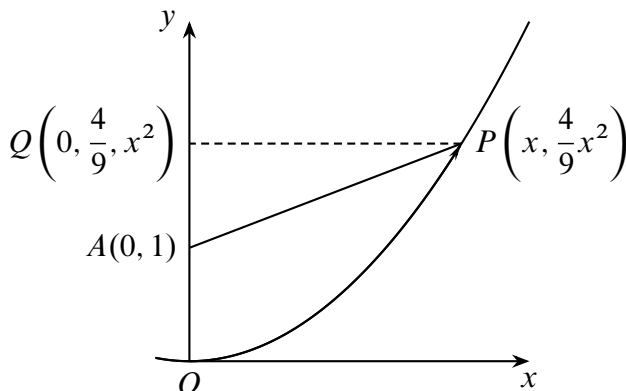
$$\text{因此当 } \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{16} = \frac{z}{12\sqrt{3}} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2.$$

20.(本题满分 11 分)

已知曲线  $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$ , 点  $O(0, 0)$ , 点  $A(0, 1)$ . 设  $P$  是  $L$  上的动点,  $S$  是直线  $OA$  与直线  $AP$  及曲线  $L$  所围成的图形的面积. 若  $P$  运动到点  $(3, 4)$  时沿  $x$  轴正向的速度是 4, 求此时  $S$  关于时间  $t$  的变化率.

<sup>1</sup>此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

解 如图所示, 其中  $PQ \perp y$  轴. 在时刻  $t$  时,  $P$  运动到  $(x, \frac{4}{9}x^2)$  处的速度  $v_t$  沿着曲



第 20 题图

线  $L$  在这一点切线方向. 此时由直线  $OA$  与直线  $AP$  及曲线  $L$  围成的图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{曲边}\triangle POQ} - S_{\triangle PAQ} = \int_0^{\frac{4}{9}x^2} \frac{3}{2}\sqrt{y}dy - \frac{1}{2}AQ \cdot QP \\ &= y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{4}{9}x^2} - \frac{1}{2}x \left( \frac{4}{9}x^2 - 1 \right) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

$P$  运动到点  $(3, 4)$  时沿  $x$  轴正向的速度是 4, 所以此时  $S$  关于时间  $t$  的变化率为

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{x=3} = \left. \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right|_{x=3} = 4 \left( \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{2} \right) \Big|_{x=3} = 10.$$

21.(本题满分 10 分)

设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$ . 证明  $\{x_n\}$  收敛并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

解 首先由  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$  归纳可知所有  $x_n > 0$ . 考虑函数  $f(x) = e^x$ , 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明  $x_n > x_{n+1} > 0$ , 因此  $\{x_n\}$  单调递减有下界, 故收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \geq 0$ , 在等式  $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  两边取极限得  $x e^x = e^x - 1$ . 如果  $x > 0$ , 则  $e^x = \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ , 矛盾, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$ .

22.(本题满分 11 分)

设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$ , 其中  $a$  是参数.

- (1) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解;  
 (2) 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  的规范形.

解 (1) 由  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  可得方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
. 对其系数矩阵进行初等

行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果  $a = 2$ , 则方程组的通解为  $(x_1, x_2, x_3)^T = c(-2, -1, 1)^T$ . 如果  $a \neq 2$ , 则方程组只有零解  $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$ .

(2) 如果  $a \neq 2$ , 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

其中  $\mathbf{Q}$  是可逆矩阵, 所以此时的规范形为  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

如果  $a = 2$ , 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$ .

23.(本题满分 11 分)

已知  $a$  是常数, 且矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$  可经初等列变换化为矩阵  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (1) 求  $a$ ;  
 (2) 求满足  $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$  的可逆矩阵  $\mathbf{P}$ .

解 (1) 由于矩阵  $\mathbf{A}$  可经过初等列变换化为矩阵  $\mathbf{B}$ , 因此  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此  $a = 2$ .

(2) 问题等价于解矩阵方程  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ ,  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数. 注意到  $\mathbf{P}$  是可逆矩阵, 因此  $|\mathbf{P}| \neq 0$ , 这要求  $k_2 \neq k_3$ .



## 14 2019 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \tan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k =$  ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$ , 因此选 C.

2. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x$   $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$  的拐点坐标为 ( )

- A.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$               B.  $(0, 2)$               C.  $(\pi, -2)$               D.  $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$

解 先求二阶导数

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

令  $y'' = 0$  可得  $x = 0$  或  $x = \pi$ . 当  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  或  $0 < x < \pi$  时  $y'' < 0$ , 当  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  时  $y'' > 0$ . 因此  $(0, 2)$  不是拐点,  $(\pi, -2)$  是拐点, 选 C.

3. 下列反常积分发散的是 ( )

- A.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$       B.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$       C.  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$       D.  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

解 因为  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$ , D 选项是发散的, 其他的都收敛.

4. 已知微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$ , 则  $a, b, c$  依次为 ( )

- A. 1, 0, 1              B. 1, 0, 2              C. 2, 1, 3              D. 2, 1, 4

解 从通解的结构可知,  $Y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$  是对应齐次方程的通解, 因此  $\lambda = -1$  是特征方程的二重特征根, 所以  $a = 2, b = 1$ . 而  $y^* = e^x$  是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程  $y'' + 2y' + y = ce^x$  可得  $c = 4$ , 选 D.

5. 已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 记

$$I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

则  $I_1, I_2, I_3$  的大小关系为 ( )

A.  $I_3 < I_2 < I_1$       B.  $I_2 < I_1 < I_3$       C.  $I_1 < I_2 < I_3$       D.  $I_2 < I_3 < I_1$

解 在区域  $\{(x, y) \mid |x| + |y| < \frac{\pi}{2}\}$  内有  $x^2 + y^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ , 则

$$\sin \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy < \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

故  $I_1 < I_2$ . 令  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , 于是

$$1 - \cos u - \sin u = 1 - \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0,$$

等号只在  $u = 0$  和  $u = \frac{\pi}{2}$  成立, 因此

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy > \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

即  $I_2 > I_3$ , 选 A.

6. 已知  $f(x), g(x)$  的二阶导函数在  $x = a$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0$  是两条曲线  $y = f(x), y = g(x)$  在  $x = a$  对应的点处相切且曲率相等的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

解 如果  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0$ , 则当  $x \rightarrow a$  时,  $f(x) - g(x) = o((x - a)^2)$ , 利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k - \sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^k) \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(x - a)^2, \end{aligned}$$

于是有  $f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2$ . 因此曲线  $y = f(x), y = g(x)$  在  $x = a$  对应的点处相切, 且由曲率公式  $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$  可知对应的曲率也相等, 充分性成立.

反之, 如果两曲线在  $x = a$  对应的点处有相同的切线, 则  $f(a) = g(a), f'(a) = g'(a)$ . 再由两者在这一点曲率相等有  $\frac{|f''(a)|}{(1+f'^2(a))^{3/2}} = \frac{|g''(a)|}{(1+g'^2(a))^{3/2}}$ , 因此  $f''(a) = \pm g''(a)$ . 当  $f''(a) = -g''(a) \neq 0$  时, 由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - g'(x)}{2(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - g''(x)}{2} = f''(a) \neq 0.$$

因此必要性不成立, 选 A.



**提示:** 本题还是有一定难度的, 且在此题中有几个值得注意的地方:

- 本题中只需要  $f(x), g(x)$  在  $x = a$  处二阶可导即可, 并不需要二阶导数连续.
- 对于必要性的否定, 可以直接举反例  $a = 0, f(x) = x^2, g(x) = -x^2$  即可.
- 在充分性的推导中, 切勿乱用洛必达法则. 如果要用, 应当这么使用: 为方便, 我们记  $h(x) = f(x) - g(x)$ . 由  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x - a)^2} = 0$  可知  $h(a) = 0$ , 且

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x - a)^2} (x - a) = 0.$$

由于  $h''(a)$  是存在的, 因此

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(x)}{2(x - a)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(x) - h'(a)}{x - a} = \frac{h''(a)}{2} = 0.$$

这里必须先定义求出  $h'(a) = 0$ , 再用洛必达法则求出  $h''(a) = 0$  (为什么?).

7. 设  $A$  是四阶矩阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有两个向量, 则  $r(A^*) =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

**解** 由于方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有两个向量, 故  $r(A) = 2$ , 因此  $r(A^*) = 0$

8. 设  $A$  是 3 阶实对称矩阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵, 若  $A^2 + A = 2E$ , 且  $|A| = 4$ , 则二次型  $x^T Ax$  的规范形为 ( )

- A.  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$     B.  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$     C.  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$     D.  $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

**解** 由  $A^2 + A = 2E$  可知矩阵  $A$  的特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^2 + \lambda = 2$ , 因此  $\lambda = 1$  或  $-2$ . 再由  $|A| = 4$  可知  $A$  的特征值为  $-2, -2, 1$ . 因此二次型  $x^T Ax$  的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

**解** 先取对数用洛必达法则得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x + 2^x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^x \ln 2}{x + 2^x} = 2 + 2 \ln 2$ , 故原极限为  $4e^2$ .

10. 曲线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  在  $t = \frac{3}{2}\pi$  对应点处的切线在  $y$  轴的截距为\_\_\_\_\_.

解  $t = \frac{3}{2}\pi$  所对应的点是  $(\frac{3}{2}\pi + 1, 1)$ , 该点处切线的斜率为  $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = -1$ . 该点处切线方程为  $y = -x + \frac{3}{2}\pi + 2$ , 它在  $y$  轴上的截距为  $\frac{3}{2}\pi + 2$ .

11. 设函数  $f(u)$  可导,  $z = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$ , 则  $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$ \_\_\_\_\_.

解 直接计算得  $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{y^2}{x}\right) + yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2y}{x}$ .  
因此  $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x\left(-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)\right) + y\left(f\left(\frac{y^2}{x}\right) + yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2y}{x}\right) = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$ .

12. 曲线  $y = \ln \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6})$  的弧长为\_\_\_\_\_.

解 由  $y = \ln \cos x$  得  $y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ , 于是曲线的弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\ln 3}{2}.$$

13. 已知函数  $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx =$ \_\_\_\_\_.

解 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 x dx \int_x^1 \frac{\sin t^2}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\sin t^2}{t} dt \int_0^t x dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \frac{\sin t^2}{t} dt = - \frac{1}{2} \int_0^1 t \sin t^2 dt = \frac{\cos 1 - 1}{4}. \end{aligned}$$

14. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A_{ij}$  表示  $|A|$  中  $(i, j)$  元的代数余子式, 则  $A_{11} -$

$A_{12} =$ \_\_\_\_\_.

解 直接计算可得  $A_{11} - A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$ .

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 求  $f'(x)$ , 并求  $f(x)$  的极值.

解 首先有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 1)$ , 因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续. 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2)$ ; 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = (x + 1)e^x$ . 而在  $x = 0$  处,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty,$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导, 于是  $f'(x) = \begin{cases} x^{2x}(2 + 2 \ln x), & x > 0 \\ \text{不存在}, & x = 0. \text{ 当 } x < -1 \text{ 或} \\ (x + 1)e^x, & x < 0 \end{cases}$

$0 < x < \frac{1}{e}$  时  $f'(x) < 0$ , 而当  $-1 < x < 0$  或  $x > \frac{1}{e}$  时,  $f'(x) > 0$ . 于是结合单调性

可知  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$  和  $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$  是极小值,  $f(0) = 1$  是极大值.

16.(本题满分 10 分)

求不定积分  $\int \frac{3x + 6}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} dx$ .

解 利用待定系数法可得

$$\frac{3x + 6}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = -\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 6}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} dx &= -2 \int \frac{1}{x - 1} dx + 3 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= -2 \ln|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + \int \frac{1}{x^2 + x + 1} d(x^2 + x + 1) \\ &= -2 \ln|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + \ln(x^2 + x + 1) + C. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设  $y(x)$  是微分方程  $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$  满足条件  $y(1) = \sqrt{e}$  的特解.

(1) 求  $y(x)$ ;

(2) 设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$ , 求  $D$  绕  $x$  旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 由条件可得  $(e^{-\frac{x^2}{2}}y)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(y' - xy) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , 于是  $e^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x} + C$ . 再由  $y(1) = \sqrt{e}$  可知  $C = 0$ , 因此  $y = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$ .

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

18.(本题满分 10 分)

已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$ , 计算二重积分  $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ .

解 区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 把它化为极坐标形式,  $|x| \leq y$  即  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ .  $(x^2 + y^2)^3 \leq y^4$  就是  $r^6 \leq r^4 \sin^4 \theta, r \leq \sin^2 \theta$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} \frac{r \sin \theta}{r} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d(\cos \theta) \\ &= - \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{5} \cos^5 \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{43}{120} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

<sup>1</sup> 设  $n$  是正整数, 记  $S_n$  为曲线  $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq n\pi)$  与  $x$  轴所围图形的面积, 求  $S_n$ , 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

解 利用直角坐标系下的面积公式可得

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} e^{-(k\pi+t)} |\sin(k\pi+t)| dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)} (1 - e^{-n\pi}). \end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得  $\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$ , 最后极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$ .

<sup>1</sup> 此题源自 2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

## 20.(本题满分 11 分)

已知函数  $u(x, y)$  满足  $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , 求  $a, b$  的值, 使得在变换  $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$  之下, 上述等式可化为  $v(x, y)$  不含一阶偏导数的等式.

解 由  $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$  得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by} + av(x, y)e^{ax+by}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by} + bv(x, y)e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by} + a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by} + a\left(\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by} + av(x, y)e^{ax+by}\right) \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by} + 2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by} + a^2v(x, y)e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by} + 2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by} + b^2v(x, y)e^{ax+by}.\end{aligned}$$

将上述式子代入  $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , 整理可得

$$e^{ax+by}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (4a+3)\frac{\partial v}{\partial x} + (3-4b)\frac{\partial v}{\partial y} + (2a^2 - 2b^2 + 3a + 3b)v\right) = 0.$$

依题意有  $\begin{cases} 4a+3=0 \\ 3-4b=0 \end{cases}$ , 因此  $\begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$ .

## 21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$ , 证明:


- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ;
- (2) 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ .

解 (1) 由积分中值定理知存在  $\zeta \in (0, 1)$  使得  $\int_0^1 f(x)dx = f(\zeta) = 1 = f(1)$ , 于是由罗尔定理知存在  $\xi \in (\zeta, 1) \subset (0, 1)$  使得  $f'(\xi) = 0$ .

(2) 考虑函数  $F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$ , 首先有  $F(0) = F(1) = 0$  且

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 [f(x) + 3x^2 - 4x]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (3x^2 - 4x)dx = 0.$$

由积分中值定理可知存在  $\eta_1 \in (0, 1)$  使得  $F(\eta_1) = 0$ . 因此由罗尔定理知存在  $\eta_2 \in (0, \eta_1), \eta_3 \in (\eta_1, 1)$  使得  $F'(\eta_2) = F'(\eta_3) = 0$ . 再由罗尔定理知存在  $\eta \in (\eta_2, \eta_3) \subset (0, 1)$  使得  $F''(\eta) = f''(\eta) + 6 = 0$ , 从而  $f''(\eta) = -6 < -2$ , 证毕.

 提示: 这个证法恰到好处的地方在于当我们取  $f(x) = 4x - 3x^2$  时,  $f(x)$  刚好满足条件, 且  $f''(x) \equiv -6$ , 这个例子说明  $f''(x)$  能够保证取到的最小值就是  $-6$ . 至于如

何构造出这个例子, 只需要待定一组系数  $a, b, c$  使得  $f(x) = ax^2 + bx + c$  满足条件  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$  即可.

22.(本题满分 11 分)

已知向量组 (I)  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$ , (II)  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a + 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 - a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$ . 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求  $a$  的取值, 并将  $\beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

解 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 由于向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以  $r(A) = r(B) = r(A, B)$ . 对矩阵  $(A, B)$  作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2 + 3 & a + 3 & 1 - a & a^2 + 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2 - 5 & a - 1 & -7 - a & a^2 - 9 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 & 1 - a & a^2 - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此当  $a = 1$  时,  $r(A) = r(B) = r(A, B) = 2$ , 两个向量组等价. 当  $a = -1$  时,  $r(A) = 2 \neq r(A, B) = 3$ , 此时两个向量组不等价. 当  $a \neq \pm 1$  时,  $r(A) = r(B) = 3$ , 两个向量组等价. 因此, 当且仅当  $a \neq -1$  时, 两个向量组等价.

令  $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ , 当  $a = 1$  时, 由初等行变换得  $(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

解得  $\beta_3 = (3 - 2k)\alpha_1 + (-2 + k)\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}$ .

当  $a \neq \pm 1$  时,  $(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 此时有  $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ .



23.(本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似.

(1) 求  $x, y$ ;

(2) 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ .

解 (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases},$$

解得  $x = 3, y = -2$ .

(2)  $B$  是上三角矩阵, 因此  $A, B$  的特征值均为  $2, -1, -2$ .

对矩阵  $B$ , 当  $\lambda_1 = 2$  时, 由方程  $(2E - B)x = \mathbf{0}$  可得  $\lambda_1$  的一个特征向量  $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$ ;

当  $\lambda_2 = -1$  时, 由方程  $(-E - B)x = \mathbf{0}$  可得  $\lambda_2$  的一个特征向量  $\xi_2 = (-1, 3, 0)^T$ ;

当  $\lambda_3 = -2$  时, 由方程  $(-2E - B)x = \mathbf{0}$  可得  $\lambda_3$  的一个特征向量  $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$ .

取  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$ .

同理对矩阵  $A$ , 也可求出一组线性无关特征向量, 取  $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , 则  $P_2^{-1}AP_2 =$

$\text{diag}\{2, -1, -2\}$ . 故

$$P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B,$$

因此当取

$$P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

时, 则有  $P^{-1}AP = B$ .

## 15 2020 年考研数学二

### 一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1.  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

- A.  $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$                       B.  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$   
 C.  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$                       D.  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解 首先我们有基本结论: 如果  $f(x), g(x)$  均为连续函数, 且  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当  $x \rightarrow 0^+$  时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt &\sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt &\sim \int_0^x \sqrt{t^3} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}, \\ \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt &\sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} \sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt &\sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}(1 - \cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5, \end{aligned}$$

正确答案选 D.

2. 函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$  的第二类间断点的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

解 显然, 所有的间断点为  $x = -1, 0, 1, 2$ , 其中  $x = -1, 1, 2$  都是无穷间断点, 而  $x = 0$  则是可去间断点, 选 C.

3.  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$  ( )

- A.  $\frac{\pi^2}{4}$                       B.  $\frac{\pi^2}{8}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{8}$

解 令  $t = \arcsin \sqrt{x}$ , 则  $x = \sin^2 t$ ,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t \cos t} 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{\pi^2}{4},$$

选 A.

4. 已知函数  $f(x) = x^2 \ln(1-x)$ , 则当  $n \geq 3$  时,  $f^{(n)}(0) =$  ( )
- A.  $-\frac{n!}{n-2}$       B.  $\frac{n!}{n-2}$       C.  $-\frac{(n-2)!}{n}$       D.  $\frac{(n-2)!}{n}$

解 方法一 由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(n-k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^2 C_n^k (x^2)^{(k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} \\ &= x^2 \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} + C_n^1 x \frac{-(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} + 2C_n^2 \frac{-(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}, \end{aligned}$$

代入  $x=0$  得  $f^{(n)}(0) = -2C_n^2(n-3)! = -n(n-1)(n-3)! = -\frac{n!}{n-2}$ , 选 A.

方法二 利用函数  $f(x)$  的麦克劳林展开式系数的唯一性, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \ln(1-x) = x^2 \left( -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right) \\ &= -x^3 - \frac{x^4}{2} - \dots - \frac{x^n}{n-2} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \end{aligned}$$

那么由对应项系数相等可得  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}$ , 所以  $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}$ , 选 A.

5. 关于函数  $f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$ , 给出下列结论:

- (1)  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 1$ ;      (2)  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1$ ;
- (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ;      (4)  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ .

其中正确的个数为 ( )

- A. 4      B. 3      C. 2      D. 1

解 直接计算可得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

所以 (1) 正确. 当  $xy \neq 0$  时,  $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ , 那么

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 1}{y} = \infty,$$

因此  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)}$  不存在, (2) 错误. 当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时,  $f(x, y)$  不论取  $x, y$ , 或者  $xy$ , 都是无穷小量, 因此  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , (3) 正确. 又

$$^1 \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} xy = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

因此 (4) 正确, 选 B.

6. 设函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 2]$  上可导, 且  $f'(x) > f(x) > 0$ , 则 ( )
- A.  $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$       B.  $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$       C.  $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$       D.  $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解 由  $f'(x) > f(x) > 0$  可知  $f'(x) - f(x) > 0$ , 且  $f(x)$  单调递增. 令  $F(x) = e^{-x} f(x)$ , 则  $F'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)] > 0$ , 因此  $F(x)$  单调递增且为正, 于是  $F(0) > F(-1)$ , 选 B.

7. 设四阶矩阵  $A = (a_{ij})$  不可逆,  $a_{12}$  的代数余子式  $A_{12} \neq 0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为矩阵  $A$  的列向量组,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 则  $A^*x = 0$  的通解为 ( )
- A.  $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$       B.  $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$   
 C.  $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$       D.  $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

解 因为  $A$  不可逆, 所以  $A^*A = |A|E = O$ , 因此  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  都是  $A^*x = 0$  的解, 且  $r(A^*) \leq 1$ . 而  $A_{12} \neq 0$  说明  $A^* \neq O$ . 且  $A$  中对应的三列  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  是线性无关的, 即  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  是  $A^*x = 0$  的基础解系, 因此正确答案选 C.

8. 设  $A$  为三阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $A$  的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,  $\alpha_3$  为  $A$  的属于特征值  $-1$  的特征向量, 则满足  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的可逆矩阵  $P$  为 ( )

- A.  $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$       B.  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$   
 C.  $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$       D.  $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

解 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

<sup>1</sup>注意这是个累次极限,  $x$  和  $y$  都是趋于 0 而不等于 0.

## 二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ , 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 由参数方程求导公式可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} / \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入  $t = 1$  可得  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}$ .

10.  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^3 + 1} dy = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} d(x^3 + 1) = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

11. 设  $z = \arctan[xy + \sin(x + y)]$ , 则  $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

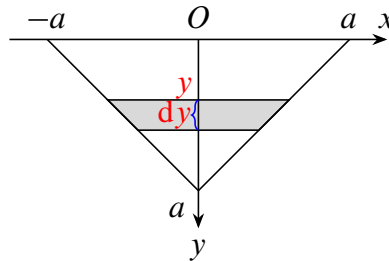
解 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \cos(x + y)}{1 + [xy + \sin(x + y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \cos(x + y)}{1 + [xy + \sin(x + y)]^2},$$

于是  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,\pi)} = \pi - 1$ ,  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,\pi)} = -1$ , 因此  $dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1) dx - dy$ .

12. 斜边长为  $2a$  的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为  $g$ , 水的密度为  $\rho$ , 则三角形平板的一侧受到的水压力为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

解 如图, 以斜边所在的直线为  $x$  轴, 斜边中点为原点, 垂直于  $x$  轴向下的方向为  $y$  轴, 考虑在深度为  $y$  处, 宽度为  $dy$  的窄条, 压强为  $\rho gy$ , 那么窄条一侧承受的压力为  $\rho gy \cdot 2(a - y) dy$ , 因此整个平面一侧承受的压力为



第 12 题图

$$F = \int_0^a \rho gy \cdot 2(a - y) dy = \frac{1}{3} \rho g a^3.$$

13. 设  $y = y(x)$  满足  $y'' + 2y' + y = 0$ , 且  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 则  $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 方程  $y'' + 2y' + y = 0$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ , 再由  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  可得  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , 因此  $y(x) = xe^{-x}$ ,  $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1$ .

14. 行列式 
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 利用行列式的行列变换得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2. \end{aligned}$$

### 三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求曲线  $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} (x > 0)$  的斜渐近线.

解 设所求斜渐近线为  $y = ax + b$ , 则

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{1}{e}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e^{-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[ e^{1-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[ 1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[ 1 - x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

因此所求的斜渐近线为  $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$ .

16. (本题满分 10 分)

已知函数  $f(x)$  连续且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 求  $g'(x)$  且证明  $g'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

解 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 且  $f(x)$  连续, 则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

显然  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x = 0 \end{cases}$ . 当  $x \neq 0$  时,  $g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du$ .

当  $x = 0$  时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

因此  $g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = g'(0),$$

因此  $g'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

17.(本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$  的极值.

解 由  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$  得  $(x, y) = (0, 0)$  或  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ . 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当  $(x, y) = (0, 0)$  时,  $A = 0, B = -1, C = 0$ , 那么  $AC - B^2 = -1 < 0$ , 所以  $(0, 0)$  不是极值点; 当  $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  时,  $A = 1, B = -1, C = 4$ , 则  $AC - B^2 = 3 > 0$

且  $A > 0$ , 所以  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  为极小值点, 且极小值  $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$ .

18.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 且满足  $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$ . 求  $f(x)$ ,

并求曲线  $y = f(x), y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  及  $y$  轴所围成的图形绕  $x$  轴旋转所成旋转体的体积.

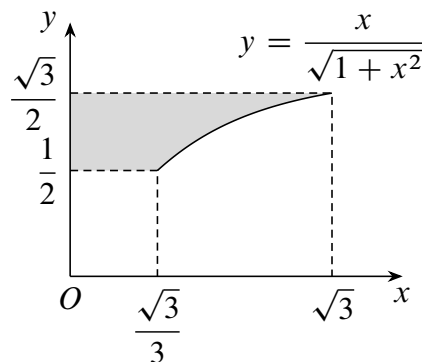
解 (1) 把已知等式中的  $x$  换成  $\frac{1}{x}$  得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

与原式联立消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  解得  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

(2) 如图, 由  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  得  $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ , 因此所求旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{6}.$$



第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma$ , 其中区域  $D$  由  $x=1, x=2, y=x$  及  $x$  轴围成.

解 直接化为极坐标计算得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} \frac{r}{r \cos\theta} r dr = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ , 证明

(1) 存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$ ;

(2) 存在  $\eta \in (1, 2)$ , 使得  $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$ .

证 (1) 令  $F(x) = f(x) - (2 - x)e^{x^2}$ , 则

$$F(1) = f(1) - e = -e < 0, \quad F(2) = f(2) - 0 = f(2) > 0,$$

因此由零点定理知存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$ .

(2) 令  $g(x) = \ln x$ , 则  $f(x), g(x)$  都在  $[1, 2]$  上可导, 且  $g'(x) \neq 0$ , 由柯西中值定理知存在  $\eta \in (1, 2)$ , 使得  $\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$ , 即  $\frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{e^{\eta^2}}{1/\eta}$ , 也就是  $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$ .

21.(本题满分 11 分)

已知函数  $f(x)$  可导, 且  $f'(x) > 0 (x > 0)$ . 曲线  $y = f(x)$  过原点, 点  $M$  为曲线  $y = f(x)$  上任意一点, 过点  $M$  的切线与  $x$  轴相交于点  $T$ , 过点  $M$  作  $MP$  垂直  $x$  轴



于点  $P$ , 且曲线  $y = f(x)$  与直线  $MP$  以及  $x$  轴所围成图形的面积与三角形  $MTP$  的面积比恒为  $3:2$ , 求曲线满足的方程.

解 设  $M$  的坐标为  $(x, f(x))$ , 则  $M$  处的切线方程为

$$Y = f'(x)(X - x) + f(x).$$

当  $Y = 0$  时,  $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 且

$$S_{\triangle MTP} = \frac{1}{2} f(x) \left[ x - \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right] = \frac{f^2(x)}{2f'(x)}.$$

由题意有  $\int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{f^2(x)}{2f'(x)}$ ,  $f(0) = 0$ . 等式两边求导得

$$f(x) = \frac{3[2f(x)f'(x) - f^2(x)f''(x)]}{4f'^2(x)},$$

整理即得  $f(x)f''(x) - \frac{2}{3}f'^2(x) = 0$ , 于是  $f'(0) = 0$ . 且

$$\left( \frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} \right)' = \frac{y''y^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'^2}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{y''y - \frac{2}{3}y'^2}{y'y^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

因此  $y' = Cy^{\frac{2}{3}}$ . 再分离变量解得  $3y^{\frac{1}{3}} = Cx + C_1$ , 即  $y = (C_2x + C_3)^3$ . 再由  $y(0) = y'(0) = 0$  知  $C_3 = 0$ , 因此  $y = kx^3$ ,  $k$  为任意正数, 此即为所求曲线的方程.

22.(本题满分 11 分)

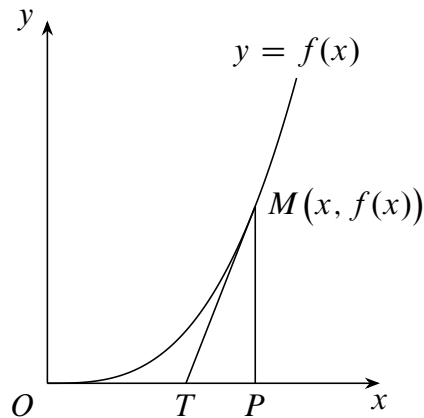
设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$  经可逆线性变

换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  化为  $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$ .

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 求可逆矩阵  $P$ .

解 (1) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3), g(y_1, y_2, y_3)$  的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



第 21 题图

由于  $A, B$  合同, 所以  $r(A) = r(B) = 2$ , 因此

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a)(1-a)^2 = 0,$$

于是  $a = 1$  或  $-\frac{1}{2}$ . 当  $a = 1$  时,  $r(A) = 1$  舍去, 于是  $a = -\frac{1}{2}$ .

$$(2) f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2, \text{ 令}$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则在可逆线性变换  $z = P_1x$ , 即  $x = P_1^{-1}z$  下,  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为规范形  $z_1^2 + z_2^2$ . 同理,  $g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$ , 令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 2y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则在可逆线性变换  $z = P_2y$ , 即  $y = P_2^{-1}z$  下,  $g(y_1, y_2, y_3)$  化为标准形  $z_1^2 + z_2^2$ . 因此  $P_1x = P_2y$ , 即  $x = P_1^{-1}P_2y$ , 所以

$$P = P_1^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 23.(本题满分 11 分)

设  $A$  为二阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是非零向量, 且不是  $A$  的特征向量.

(1) 证明:  $P$  是可逆矩阵;

(2) 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵.

解 (1) 由题意  $\alpha$  是非零向量,  $A\alpha \neq k\alpha$ , 所以  $A\alpha, \alpha$  线性无关, 即  $P = (A\alpha, \alpha)$  为可逆矩阵.

$$(2) \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 即  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  相似. 不难知  $\mathbf{B}$  有两个不同的特征值  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$ , 因此  $\mathbf{A}$  的特征值也是  $2, -3$ , 所以  $\mathbf{A}$  可以相似对角化.