

2020 年考研数学二模拟卷

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: _____

题号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总分
满分	32	24	94	150
得分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a > 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = a^x + a^{-x} - 2$ 是 x 的 ()
- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是 ()
- (A) $f(0) = 0$ (B) $f(0) \neq 0$ (C) $f'(0) = 0$ (D) $f'(0) \neq 0$

3. 设在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 令

$$M = \int_a^b f(x) dx, \quad N = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a), \quad P = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

- 则 ()
- (A) $M < N < P$ (B) $P < M < N$ (C) $P < N < M$ (D) $M < P < N$

4. 设 $0 < a \leq b \leq c$, 则反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a + x^b + x^c}$ 收敛的充要条件是 ()
- (A) $a < 1 < c$ (B) $a \leq 1 \leq c$ (C) $a < 1 < b$ (D) $b < 1 < c$

5. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()
- (A) 1, -2, 1 (B) 1, 0, $\frac{1}{2}$ (C) 2, 1, $\frac{1}{2}$ (D) -2, 1, 2

6. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则累次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{-\cos\theta} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$ 可以写为 ()

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{-y-y^2}} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
(C) $\int_{-1}^0 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ (D) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{-x-x^2}} f(x, y) dy$

7. 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为 n 维列向量, 满足 $A\alpha_1 = \beta_1, A\alpha_2 = \beta_2$, 则 ()
- (A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 一定线性无关
 (B) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 一定线性相关
 (C) 如果向量组 α_1, α_2 线性无关, 则向量组 β_1, β_2 线性无关
 (D) 如果向量组 β_1, β_2 线性无关, 则向量组 α_1, α_2 线性无关
8. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则 $Ax = 0$ 只有零解是 $A^T A$ 正定的 ()
- (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 微分方程 $y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 设 A 为三阶矩阵, $|\lambda E - A| = \lambda^3 + 2\lambda + 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)
 设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{e^x-1} f(t) dt}{x^3}$.
16. (本题满分 10 分)
 设不定积分 $\int \frac{2x^2 + ax + 1}{(x+1)(x^2+1)} dx$ 的结果中不含反正切函数, 求 a 的值并计算此不定积分.
17. (本题满分 10 分)
 设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, 求 $f(v)$ 的表达式.
18. (本题满分 10 分)
 设函数 $y = f(x) (x \geq 0)$ 连续可导, 且 $f(0) = 1$. 现已知曲线 $y = f(x)$ 、 x 轴、 y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

19. (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算积分 $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma$.

20. (本题满分 11 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$, 证明: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 证明: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

21. (本题满分 11 分)

设 m, n 为正整数, 令 $B(m, n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}$.

(1) 利用 $\int_0^1 x^{m+k} dx = \frac{1}{m+k+1}$ 证明 $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = B(n, m)$;

(2) 证明: $B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)$, 进一步证明 $B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

22. (本题满分 11 分)

设 A 为三阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;

(2) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求秩 $r(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

23. (本题满分 11 分)

已知三元二次型 $x^T A x$ 经过正交变换化为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 又知矩阵 B 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} B A^{-1} = 2AB + 4E,$$

且 $A^* \alpha = \alpha$, 其中 $\alpha = (1, 1, -1)^T$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 求二次型 $x^T B x$ 的表达式.