2020 年考研数学二模拟卷

命题人　向禹

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分　姓名: ________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a>1$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)=a^x+a^{-x}-2$ 是 x 的　　(　　)

(A) 低阶无穷小　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　(D) 同阶但非等价的无穷小

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是　　(　　)

(A) $f(0)=0$　(B) $f(0)\neq 0$　(C) $f'(0)=0$　(D) $f'(0)\neq 0$

3. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, 令

$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

则　　(　　)

(A) $M<N<P$　(B) $P<M<N$　(C) $P<N<M$　(D) $M<P<N$

4. 设 $0<a\leqslant b\leqslant c$, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^a+x^b+x^c}$ 收敛的充要条件是　　(　　)

(A) $a<1<c$　(B) $a\leqslant 1\leqslant c$　(C) $a<1<b$　(D) $b<1<c$

5. 已知微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x+x^2)\mathrm{e}^x$, 则 a,b,c 依次为　　(　　)

(A) $1,-2,1$　(B) $1,0,\dfrac{1}{2}$　(C) $2,1,\dfrac{1}{2}$　(D) $-2,1,2$

6. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则累次积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 可以写为　　(　　)

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{-y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　(D) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{-x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为 n 维列向量, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$, 则 ( )
(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性无关
(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性相关
(C) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关
(D) 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的 ( )
(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要而非充分条件
(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

答案　BCBADDDC

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x^2}=$________.

答案　$\dfrac{\pi}{4}$.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-2x^2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$________.

答案　$\ln x-\mathrm{e}^{-2}x^2$.

11. $\displaystyle\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

答案　$-\dfrac{\ln x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

12. 微分方程 $y''-\dfrac{1}{x}y'=x\mathrm{e}^x$ 的通解为________.

答案　$y=(x-1)\mathrm{e}^x+C_1x^2+C_2$.

13. $\displaystyle\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x=$________.

答案　$\dfrac{3}{8}\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+2\lambda+1$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_3&\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_2&\lambda_3&\lambda_1\end{vmatrix}=$________.

答案　0.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{\mathrm{e}^x-1}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

解 利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{e^x-1}f(t)\,dt}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)(e^x-1-x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中在使用积分中值定理时,ξ 是介于 x 与 e^x-1 之间的量, 因此 $x\to 0$ 时, $x\sim\xi\sim e^x-1$.

16.（本题满分 10 分）

设不定积分 $\int\frac{2x^2+ax+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ 的结果中不含反正切函数, 求 a 的值并计算此不定积分.

解 将被积函数化为部分分式的和 $\frac{2x^2+ax+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$, 通分可得

$$2x^2+ax+1=(A+M)x^2+(M+N)x+(A+N).$$

要使得积分中不含有反正为函数, 必有 $N=0$, 因此

$$A+M=2,M=a,A=1\Rightarrow A=M=a=1.$$

那么原不定积分为

$$\int\frac{2x^2+ax+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

17.（本题满分 10 分）

设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

解 记 $v=\ln r,r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\frac{dv}{dr}=\frac{1}{r},\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dv}\cdot\frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r^2}\cdot f'(v),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dv}\cdot\frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r^2}\cdot f'(v).$$

进一步计算二阶偏导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}&=\frac{x^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2x^2}{r^4}\cdot f'(v),\\\frac{\partial^2u}{\partial y^2}&=\frac{y^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2y^2}{r^4}\cdot f'(v).\end{aligned}$$

代入条件 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 并化简得微分方程 $f''(v)=e^{5v}$, 结合初值条件 $f(0)=f'(0)=0$ 解得 $f(v)=\frac{1}{25}e^{5v}-\frac{1}{5}v-\frac{1}{25}$.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)\,(x\geqslant 0)$ 连续可导, 且 $f(0)=1$. 现已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

解 由题意可得方程

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

又 $f(0)=1$, 故所求函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases} y = \sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0} = 1 \end{cases}.$$

由 $y=\sqrt{1+y'^2}$ 得 $y^2 = 1+y'^2$, 故 $y' = \pm\sqrt{y^2-1}$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} = \pm\mathrm{d}x.$$

于是方程的通解为

$$\ln C\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right) = x.$$

将 $y\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=1$, 故所求的解为

$$y \pm \sqrt{y^2-1} = \mathrm{e}^x.$$

解得 $f(x) = y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

19.（本题满分 10 分）

设区域 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$.

解 直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, 则

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \cos\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{1}{2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\sin\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin 1.
\end{aligned}$$

20.（本题满分 11 分）

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$, 证明: 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

证明 (1) 令 $F(t)=\begin{cases} f(\tan t), & 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2} \\ f(0), & t=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, 则函数 $F(t)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导, 且有 $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 由罗尔定理知存在 $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$F'(\eta)=f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0\Rightarrow f'(\tan\eta)=0.$$

令 $\xi=\tan\eta\in(0,+\infty)$, 则 $f'(\xi)=0$.

(2) 显然由条件可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$, 则 $F(x)$ 满足 (1) 中的条件, 因此存在 $\xi\in(),+\infty)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}=0$.

21.（本题满分 11 分）

设 m,n 为正整数, 令 $B(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\dfrac{(-1)^k}{m+k+1}$.

(1) 利用 $\displaystyle\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m+k+1}$ 证明 $B(m,n)=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=B(n,m)$;

(2) 证明: $B(m,n)=\dfrac{n}{m+1}B(m+1,n-1)$, 进一步证明 $B(m,n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

证明 (1) 利用积分以及二项式定理可得

$$\begin{aligned} B(m,n)&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{(-1)^k}{m+k+1}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(-1)^k\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k x^{m+k}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(-x)^k\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=1-t} \int_0^1 t^n(1-t)^m\,\mathrm{d}t=B(n,m). \end{aligned}$$

(2) 利用分部积分可得

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}(x^{m+1}) \\
&= \frac{1}{m+1}\left[(1-x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{m+1} n(1-x)^{n-1}(-\mathrm{d}x)\right] \\
&= \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{m+1}B(m+1,n-1) \\
&= \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}B(m+2,n-2) = \cdots \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}B(m+n,0) \\
&= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
\end{aligned}
$$

22.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明: $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解 (1) 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}, \tag{$*$}$$

由题设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$, 于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3, \\
\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} &= \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3,
\end{aligned}
$$

代入 ($*$) 式整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$
\begin{cases}
k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0 \\
k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0, \\
k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0
\end{cases}
$$

其系数行列式非零, 因此必有 $k_1=k_2=k_3=0$, 故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})$$
$$= (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

从而有

$$r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = r(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}) = r\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

23.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

解 由条件知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, -1, -1$, 则 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 因为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}|/\lambda$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $1, -2, -2$. 由已知, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量, 也就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量. 由

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^* = \left(\frac{1}{2}\right)^2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$$

得

$$2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B} = 2(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-2, 1, 1$, 且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} = -2\boldsymbol{\alpha}$. 设 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 又 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 故 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 解出 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.