2020 年考研数学三模拟卷二

命题人:向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

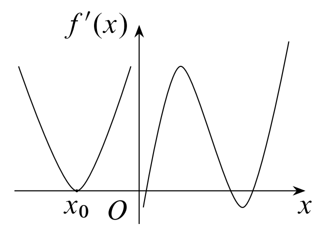
题 号	选择题 1 ～ 8	填空题 9 ～ 14	解答题 15 ～ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 分别有 ( )

   (A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点

   (C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 1 题图

解 极值点是导函数符号改变的点, 拐点则是导函数图像上单调性改变的点, 选 C.

2. 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(\alpha>1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )

   (A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

解 首先当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f_x'(x,y)=2x(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, 而因为 $\alpha>1$, 则 $\dfrac{1+\alpha}{2}>1$, 故

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x}=0.$$

且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}=0=f_x'(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 关于 x 的偏导数在 $(0,0)$ 处来连续, 同理关于 y 的偏导数也在这点连续, 选 C.

3. 设平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$, 记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D \left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\right]\mathrm{d}\sigma,$$

则有 ( )

   (A) $I_2>I_1>I_3$ (B) $I_1>I_2>I_3$ (C) $I_1>I_3>I_2$ (D) $I_2>I_3>I_1$

解 在区域 D 上, $\cos x^2 \sin y^2 \geqslant 0, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} - 1 \leqslant 0$, 且等号只在原点处成立, 因此 $I_2 > 0, I_3 < 0$. 根据被积函数的奇偶性和区域对称性可知

$$I_1 = \iint_D (x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

因此 $I_3 < I_1 < I_2$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$ 收敛的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

解 首先可取 $u_n \equiv 1$, 则 $u_n - u_{n+1} \equiv 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$ 收敛, 因此不是必要条件. 再取 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, 此时 $|u_n - u_{n+1}| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$, 对应的级数发散, 因此也不是充分条件, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 则 ( )

(A) 当 $m > n$ 时, $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, $|\boldsymbol{AB}| = 0$

(C) 当 $n > m$ 时, $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$ (D) 当 $n > m$ 时, $|\boldsymbol{AB}| = 0$

解 当 $m > n$ 时, $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) \leqslant n < m$, 而 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 m 阶矩阵, 所以它不满秩, 即 $|\boldsymbol{AB}| = 0$, 选 B.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A}) = m$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 一定有解

(B) 如果 $r(\boldsymbol{A}) = n$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 不可能有无穷多解

(C) 如果 $m = n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解

(D) 如果方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 也有非零解

解 对选项 A, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的, 增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的行数为仍 m, 于是

$$m = r(\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leqslant m \Rightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m,$$

因此 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 一定有解. 对于 B 选项, 如果 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 要么无解, 要么只有唯一解, 不可能有无穷多解. 对于 C 选项, 利用基本的矩阵秩的等式与不等式可得

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) = r[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})] \leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此不等式中的所有等号均成立, 即 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$, 所以方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解. D 选项中 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A}) < n$, 如果 $m < n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵可以是列满秩的, 此时只有零解, 选 D.

7. 设随机事件 A, B 满足 $P(A|B) > P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ( )

(A) $2P(A) > P(B)$ (B) $2P(\bar{A}) > P(B)$ (C) $2P(B) > P(A)$ (D) $2P(\bar{B}) > P(A)$

解 题目条件即等价于 $P(AB) > P(\bar{A}B)$, 而 $P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B)$, 因此

$$2P(A) \geqslant 2P(AB) > P(B),$$

选 A.

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1) = P(X=-1) = P(X=0) = \dfrac{1}{3}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $X\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - X\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的概率为 ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) 1

解 注意到 $(X\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - X\boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix}$, 则此向量组线性无关等价于

$$\begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = 1 - X^2 \neq 0,$$

即 $X \neq \pm 1$, 因此线性无关的概率为 $P(X=0) = \dfrac{1}{3}$, 选 C.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n) - \ln n} - n\right) =$________.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n) - \ln n} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$.

10. 设在一定范围内, 某商品的需求函数为 $Q = 100 - 2p$, 其中 p 为商品的价格, 则该商品的边际收益为________.

解 边际收益是收益对需求量的导数, 由 $Q = 100 - 2p$ 得 $p = 50 - \dfrac{Q}{2}$, 于是收益 $R = pQ = 50Q - \dfrac{1}{2}Q^2$, 边际收益为 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = 50 - Q$.

11. 差分方程 $y_{x+1} - 2y_x = \mathrm{e}^x$ 的通解为 $y_x =$________.

解 首先齐次方程 $y_{x+1} - 2y_x = 0$ 的通解为 $Y_x = C \cdot 2^x$, 非齐次方程 $y_{x+1} - 2y_x = \mathrm{e}^x$ 的一个特解设为 $A\mathrm{e}^x$, 代入得 $A\mathrm{e}^{x+1} - 2A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, 解得 $A = \dfrac{1}{\mathrm{e}-2}$, 于是

答案 $C \cdot 2^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-2}$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3n+2}{(2n+1)!} =$________.

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3n+2}{(2n+1)!} = \dfrac{3}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{(2n+1)!} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!} = \dfrac{3}{3}\cos 1 + \dfrac{1}{2}\sin 1$.

13. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} =$________.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$ 说明齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)x=\mathbf{0}$ 有一个特解为 $(1,3,2,1)^{\mathrm{T}}$, 且 $r(\boldsymbol{A})<4$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 3$, 故 $r(\boldsymbol{A})=3$. 显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个特解为 $(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 故它的通解为 $(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,3,2,1),k\in\mathbb{R}$.

14. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k=$________.

解 首先 $X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N(0,9\sigma^2)$, 于是 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{3\sigma}\sim N(0,1)$, 而 $\dfrac{Y_i}{\sigma}\sim N(0,1)$, 于是 $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$, 进一步有 $\dfrac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$, 那么

$$\frac{\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{3\sigma}\right)^2/1}{\frac{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}{\sigma^2}/9}=\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}\sim F(1,9),$$

因此 $k=1$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求其导数.

解 直接计算可知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-(x+b)}, & x>0\end{cases}.$$

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\mathrm{e}^{-b}=f(0)=\dfrac{1}{2}, b=\ln 2$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}=f'_+(0)=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=-1,$$

因此 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

解 由复合函数偏导法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{a}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{a}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

于是有 $1-\frac{a^2}{4}=0, 2-a\neq 0$, 所以 $a=-2$.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}&=\exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h}\right)\\&=\exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h\cos^2 x}\cos^2 x\right)\\&=\exp\left([\ln f(x)]'\cos^2 x\right)=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x}.\end{aligned}$$

由条件得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x=x\cos^2 x+\tan x,\ \frac{f'(x)}{f(x)}=x+\tan x\sec^2 x.$$

积分可得 $\ln|f(x)|=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|C|$, 即 $f(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0)=1$ 得 $C=1$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x)=(x+\tan x\sec^2 x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$.

18.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

解 利用极坐标可得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r\\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\left(\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}-\sqrt{4a^2-r^2}\right)\mathrm{d}r\\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\left(\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+2a^2\arcsin\frac{r}{2a}\right)\right]\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}\right)\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&= a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

19.（本题满分 10 分）

设定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)>0$ 且 $f(a)>0, f(b)<0$.

(1) 证明: 存在唯一的 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$;

(2) 设 $x_0\in(a,b), f(x_0)>0$, 定义数列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,(n=0,1,2,\cdots)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证明 (1) 首先由 $f(a)>0, f(b)<0$, 根据零点定理可知存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$. 如果还存在点 $c'\in(a,b)$ 使得 $f(c')=0$. 不妨设 $c'>c$, 那么存在 $\xi_1\in(c,c'),\xi_2\in(c',b)$, 使得

$$
f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c')}{b-c'}=\frac{f(b)}{b-c'}<0,
$$

这与 $f''(x)>0$ 矛盾, 因此必存在唯一的 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $a<x<c$ 时, $f(x)>0$, 当 $c<x<b$ 时, $f(x)<0$. 由于 $f(x_0)>0$, 所以 $x_0\in(a,c)$. 存在 $\xi\in(c,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$, 又 $f''(x)>0$, 说明 $f'(x)$ 单调递减, 因此当 $x\in(a,c)$ 时, $f'(x)<f'(\xi)<0$. 下面归纳证明 $x_n<x_{n+1}<c$.

- $n=0$ 时, $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}>x_0$ 成立, 而由拉格朗日中值定理可得

$$
x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{f(x_0)-f(c)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{(x_0-c)f'(\eta)}{f'(x_0)}<x_0-(x_0-c)=c,
$$

  其中 $\eta\in(x_0,c)$, $f'(x_0)<f'(\eta)<0$.

- 假定 $n=k-1$ 时, $x_{k-1}<x_k<c$ 成立, 那么 $n=k$ 时, $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}>x_k$, 与 $n=0$ 的情况类似, 由拉格朗日中值定理可知

$$
x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-c)f'(\eta_k)}{f'(x_k)}<x_k-(x_k-c)=c.
$$

因此由数学归纳法知 $x_n < x_{n+1} < c$ 对所有 n 都成立, 即 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\{x_n\}$ 的极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 在 $x_{n+1} == x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 中令 $n \to \infty$ 可得 $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, 因此 $f(a) = 0$, 即 $a = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

20.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a, b, c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

解 (1) 由题意首先有 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 2$, 且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2, 于是

$$|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = 3c = 0, c = 0.$$

同理, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2| = 3a + 3 = 0$ 得 $a = -1$, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2| = 3b - 3 = 0$ 得 $b = 1$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此所求的矩阵 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

解 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -8a = 0, a = 0$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$. 对特征值 $\lambda_1=0$, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下, 二次型化为标准形 $2y_2^2+2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$ 即为方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases},$$

此方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)=(k,-k,0),k\in\mathbb{R}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y=\min\{X_2,X_3\}$, 求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P\big(X_1=\min\{X_1,X_2,X_3\}\big)$.

解 (1) 参数为 1 的指数分布的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases}$, Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P\big(\min\{X_2,X_3\}\leqslant y\big)=1-P\big(\min\{X_2,X_3\}\geqslant y\big)\\&=1-P(X_2\geqslant y,X_3\geqslant y)=1-P(X_2\geqslant y)P(X_3\geqslant y)\\&=1-[1-F(y)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\0, & y\leqslant 0\end{cases}.\end{aligned}$$

因此 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\0, & y\leqslant 0\end{cases}$.

(2) $\min\{X_1,X_2,X_3\}=\min\{X_1,Y\}$, X_1 与 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x-2y}, & x>0,y>0\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned}P\big(X_1=\min\{X_1,Y\}\big)=P(X_1\leqslant Y)&=\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

23. 设总体 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

其中参数 $\sigma>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.

解 (1) 样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 总体均值为

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.$$

令 $\bar{X}=E(X)$, 解得 $\sigma^2=\dfrac{2}{\pi}\bar{X}^2$, 即 σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{2}{\pi}\bar{X}^2$.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{\sigma^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\ln L(\sigma^2)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-n\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,$$

解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$, 即 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$, 且

$$E(\hat{\sigma}_2^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma^2.$$