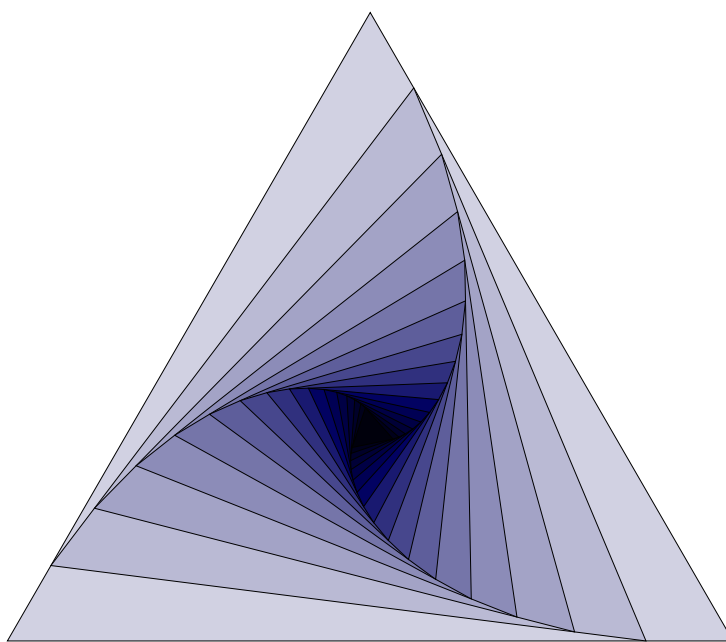


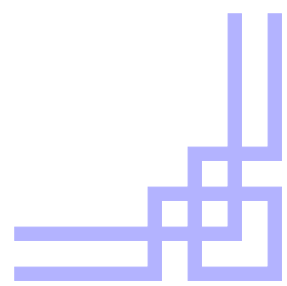
2006–2020 年考研数学一真题解答

向禹◎著

第一版



yuxtech.github.io



目 次

1 2006 年考研数学一	1 5	2010 年考研数学一	39
一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.	1	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	39
二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.	2	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	41
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	4	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	43
2 2007 年考研数学一	10 6	2011 年考研数学一	48
一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.	10	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	48
二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.	13	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	50
三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.	14	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	51
3 2008 年考研数学一	21 7	2012 年考研数学一	56
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	21	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	56
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	23	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	58
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	24	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	59
4 2009 年考研数学一	29 8	2013 年考研数学一	65
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	29	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	65
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	32	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	67
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	33	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	68

9 2014 年考研数学一	74	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	104
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	74	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	105
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	76	13 2018 年考研数学一	111
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	78	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	111
10 2015 年考研数学一	84	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	113
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	84	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	114
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	86	14 2019 年考研数学一	121
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	87	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	121
11 2016 年考研数学一	93	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	123
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	93	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	124
二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	95	15 2020 年考研数学一	131
三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	96	一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	131
12 2017 年考研数学一	102	二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.	134
一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.	102	三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.	136

1 2006 年考研数学一

一 填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 利用等价无穷小代换得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$.

2. 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 原方程变量分离得 $\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x} dx$, 解得 $\ln|y| = \ln|Cx| - \ln e^x$, 即 $y = Cx e^{-x}$ ($x \neq 0$), C 为任意常数.

3. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 设曲面 $\Sigma_1: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$), 取上侧, 则原积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} 6 dV + 0 = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz = 2\pi. \end{aligned}$$

4. 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 利用点到平面的距离公式可得所求的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 是二阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由条件可得

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2\mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{E})| = |2\mathbf{E}| \Rightarrow |\mathbf{B}| |\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 2^2 = 4,$$

因为 $|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $|\mathbf{B}| = 2$.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 =$ _____.

解 $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ()
 A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$ C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$

解 由拉格朗日中值定理知

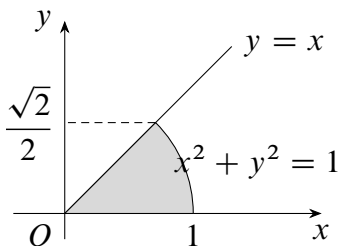
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0, \Delta x > 0$, 即 $0 < dy < \Delta y$, 选 A.

8. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 ()

- A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
 C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

解 如图, 积分区域是一个 Y 型区域, 则原式 = $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$, 选 C.



第 8 题图

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可

取反例 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

10. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ()

A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解 令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

那么当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0 \neq 0, \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

注意到 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 于是 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 选 D.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

解 注意到 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s,$$

因此 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 选 A.

12. 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第

2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

A. $C = P^{-1}AP$ B. $C = PAP^{-1}$ C. $C = P^TAP$ D. $C = PAP^T$

解 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PAP^{-1},$$

因此选 B.

13. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有 ()

A. $P(A \cup B) > P(A)$ B. $P(A \cup B) > P(B)$
 C. $P(A \cup B) = P(A)$ D. $P(A \cup B) = P(B)$

解 由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$ 得 $P(AB) = P(B)$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A)$, 选 C.

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1)$, 则必有 ()

A. $\sigma_1 < \sigma_2$ B. $\sigma_1 > \sigma_2$ C. $\mu_1 < \mu_2$ D. $\mu_1 > \mu_2$

解 将 X, Y 标准化, 则 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1), \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1)$, 那么

$$P(|X - \mu_1| < 1) = P\left(\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1,$$

$$P(|Y - \mu_2| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1.$$

因此 $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1) \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1 < \sigma_2$, 选 A.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

解 区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0$, 于是

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

16.(本题满分 12 分)

设数列 x_n 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解 (1) 因为 $x_2 = \sin x_1 \in (0, 1]$, 那么归纳可知当 $n \geq 2$ 时, 均有 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在. 在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 中令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $a = \sin a$, 此方程的唯一解为 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(2) 令 $t = x_n \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{t^2} \ln \frac{\sin t}{t} \right) \\ &= \exp \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\sin t - t}{t} + 1 \right) \right] \\ &= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \right) = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{2}{3(2-x)} - \frac{1}{3(1+x)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^n} + (-1)^{n+1} \right] x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(1) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(2) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (1) 令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 由复合函数偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''(u) \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 以及 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 得 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(2) 令 $f'(u) = p$, 则 $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}$, 解得 $\ln|p| = \ln\left|\frac{C}{u}\right|$, 所以 $f'(u) = p = \frac{C}{u}$. 由 $f'(1) = 1$ 知 $C = 1$, 于是 $f(u) = \ln u + C_2, u > 0$. 再由 $f(1) = 0$ 知 $C_2 = 0$, 于是 $f(u) = \ln u, u > 0$.

19.(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D = \{(x, y) | y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$. 证明: 对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0.$$

证 等式 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ 两边对 t 求导得

$$xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y),$$

令 $t = 1$, 则

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y). \quad (*)$$

令 $P = yf(x, y), Q = -xf(x, y)$, 由 (*) 式得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -f(x, y) - xf'_x(x, y) - [f(x, y) + yf'_y(x, y)] = 0,$$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0.$$

20.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

解 (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 因此 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$. 又显然矩阵 A 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A) \geq 2$, 故 $r(A) = 2$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由题设和第一问知, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 则

$$4 - 2a = b + 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3.$$

此时 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么 $\alpha = (2, -3, 0, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以方程组的通解为

$$x = \alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

21.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 与对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

解 (1) 因为 A 的各行元素之和为 3, 即有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 A 的特征值, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, α_1, α_2 是矩阵 A 的属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 A 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$;

特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T, k_1, k_2$ 不全为零.

(2) 先对 α_1, α_2 进行斯密特正交化,

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

单位化得 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

则 $Q^T A Q = A$.

22.(本题满分 9 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维

随机变量 (X, Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

解 (1) Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$. 当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$. 当 $0 < y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X < 0) + P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1$, 因此 Y 的概率密度 $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2)

$$\begin{aligned}
 F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right) \\
 &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2\right) = P\left(-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) \\
 &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

23.(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \text{ 其中 } \theta \text{ 是未知参数 } (0 < \theta < 1), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

解 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N},$$

取对数得 $\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta)$, 令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

2 2007 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

解 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln \left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}, \\ \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 &\sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &\sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

因此选 B.

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y = x$, 选 D.

3. 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是 ()

- A. $f_X(x)$ B. $f_Y(y)$ C. $f_X(x)f_Y(y)$ D. $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

解 因为 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 故 X 与 Y 相互独立, 于是 $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, 因此选 A.

二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = (t-1)e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

12. 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f(x^y, y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由复合函数的偏导数公式得 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y$.

13. 二阶常系数非齐次线性方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, 因此齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 设非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的特解为 $y^* = k e^{2x}$, 代入可得 $k = -2$, 因此原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.

14. 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 曲面关于 yOz 面对称, 因此 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$. 曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ 满足轮换对称性, 于是

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS &= \oiint_{\Sigma} |y| dS = \oiint_{\Sigma} |z| dS = \oiint_{\Sigma} |z| dS \\ &= \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} dS = \frac{1}{3} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

15. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 直接计算可得 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(A^3) = 1$.

16. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

解 这是一个几何概型, 设 x, y 为所取的两个数, 则样本空间 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$, 记

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2} \right\}.$$

于是所求概率为 $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3}{4}$, 其中 S_A, S_Ω 分别表示 A 与 Ω 的面积.

三 解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17. (本题满分 11 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

解 在区域 D 内, 令 $\begin{cases} f'_x = 2x - 2x^2y = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$, 得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2}, 1)$,

其对应的函数值为 $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$.

当 $y = 0$ 时, $f(x, y) = x^2$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最大值为 4, 最小值为 0.

当 $x^2 + y^2 = 4, y > 0, -2 < x < 2$ 时, 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

得可能的极值点为 $(0, 2), \left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, 其对应函数的值为 $f(0, 2) = 8, f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$

$\frac{7}{4}$. 比较以上各个函数值, 可知 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值为 8, 最小值为 0.

18. (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz \, dy \, dz + 2zy \, dz \, dx + 3xy \, dx \, dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 -$

$\frac{y^2}{4}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

解 补充曲面 $\Sigma_1: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xz \, dy \, dz + 2zy \, dz \, dx + 3xy \, dx \, dy - \iint_{\Sigma_1} xz \, dy \, dz + 2zy \, dz \, dx + 3xy \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} (z + 2z) \, dx \, dy \, dz - \iint_{\Sigma_1} 3xy \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} 3z \, dx \, dy \, dz + \iint_D 3xy \, dx \, dy. \end{aligned}$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, D 为平面区域 $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$. 由于区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\iint_D 3xy \, dx \, dy = 0$. 于是

$$I = 3 \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = 3 \int_0^1 z \, dz \iint_{D_z} dx \, dy = 3 \int_0^1 z \cdot 2\pi(1-z) \, dz = \pi.$$

其中 $D_z: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 - z$.

19.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

证 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 由题意有 $F(a) = F(b) = 0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a, b]}, g(x_2) = M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

若 $x_1 = x_2$, 令 $c = x_1$, 则 $F(c) = 0$.

若 $x_1 < x_2$, 因 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$, 从而存在 $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$, 使得 $F(c) = 0$.

在区间 $[a, c], [c, b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 有 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

20.(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(1) 证明: $a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n, n = 1, 2, \dots$;

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

解 (1) 记 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

代入 $y'' - 2xy' - 4y = 0$ 得

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' - 4y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n+4) a_n] x^n = 0. \end{aligned}$$

因此 $(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n+4) a_n = 0$, 即 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$.

(2) 由初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 知 $a_0 = 0, a_1 = 1$, 那么由递推关系可得

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \frac{1}{n} a_{2n-1} = \dots = \frac{1}{n!} a_1 = \frac{1}{n!}.$$

因此

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = x e^{x^2}.$$

21.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解 因为方程组 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 \bar{A} 进行初等行变换得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是当 $a = 1$ 时, 有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组 (3) 有解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1, 0, 1)^T$, 所以 (1)、(2) 的公共解为 $k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.

当 $a = 2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为 $(0, 1, -1)^T$, 即 (1)、(2) 的公共解为 $(0, 1, -1)^T$.

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 B .

解 (1) 由 $A\alpha_1 = \alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = \alpha_1, A^5\alpha_1 = \alpha_1$, 故

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 \\ &= A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1. \end{aligned}$$

因此 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $B = A^5 - 4A^4 + E$, 及 A 的三个特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 得 B 的 3 个特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$.

设 α_2, α_3 为 B 的属于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵, 因此 α_1 与 α_2, α_3 正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0.$$

所以 α_2, α_3 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

其基础解系为 $(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$, 故可取 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 即 B 的全部特征向量为 $k_1(1, -1, 1)^T, k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 $k_1 \neq 0, k_2, k_3$ 不全为零.

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求 $P(X > 2Y)$;

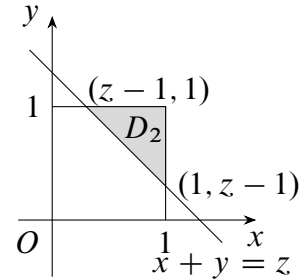
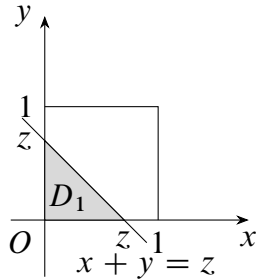
(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 (1) $P(X > 2Y) = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2 - x - y) dx = \frac{7}{24}.$

(2) 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;



$$0 \leq z < 1$$

$$1 \leq z < 2$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^z dy \int_0^{z-y} (2-x-y) dx = z^2 - \frac{1}{3}z^3;$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (2-x-y) dx = 1 - \frac{1}{3}(2-z)^3;$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$. 故 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

24.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 θ ($0 < \theta < 1$) 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

解 (1) 总体均值

$$E(X) = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}(1+\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}.$$

样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 令 $\bar{X} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$, 解得 $\theta = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$, 即 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

(2) $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2] = 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right]$, 而

$$E(X^2) = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6},$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\theta^2 - \frac{1}{12}\theta + \frac{5}{48}.$$

故 $E(4\bar{X}^2) = 4\left(\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right) = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+5}{12n} \neq \theta^2$, 所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

3 2008 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 求导可得 $f'(x) = 2x \ln(2+x^2)$, 则 $f'(x)$ 的零点只有一个 $x=0$, 选 B.

2. 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于 ()
A. i B. $-i$ C. j D. $-j$

解 直接计算偏导数可得 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$,

于是 $\text{grad } f(x, y)|_{(0,1)} = f'_x(0, 1)i + f'_y(0, 1)j = 1 \cdot i + 0 \cdot j = i$, 选 A.

3. 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ()
A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解 从通解形式可知微分方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$. 因此对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda^2+4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$, 故对应的微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 选 D.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()
A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

解 对 B 选项, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. A 选项可取反例

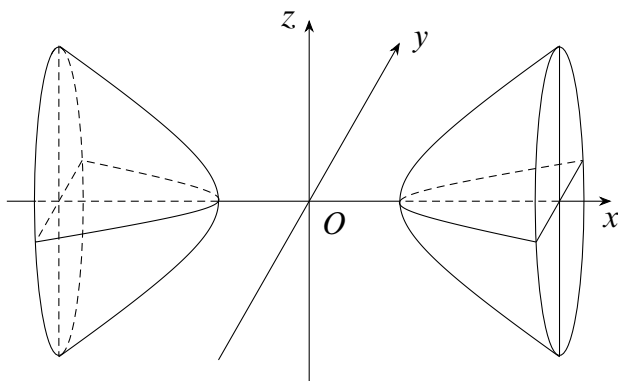
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2+x^2}, & x \geq 0 \\ -1 - \frac{1}{2+x^2}, & x < 0 \end{cases}, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

C 和 D 选项可取反例 $f(x) = \arctan x, x_n = n$, 选 B.

5. 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则 ()
- A. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆 B. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆
 C. $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆 D. $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

解 因为 $A^3 = O$, 所以 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3 = 0$, 即 $\lambda = 0$. 因此 $E - A$ 和 $E + A$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 A 的正特征值个数为 ()



第 6 题图

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 所给曲面是双叶双曲面, 其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, 因此二次型的标准形中, 正的平方项有 1 个, 负的平方项有 2 个, 即正特征值只有 1 个, 选 B.

7. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()
- A. $F^2(x)$ B. $F(x)F(y)$
 C. $1 - [1 - F(x)]^2$ D. $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

解 由分布函数的定义可得 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(\max\{X, Y\} \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq x) = F(x)F(x) = F^2(x), \end{aligned}$$

选 A.

8. 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()
- A. $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ B. $P\{Y = 2X - 1\} = 1$
 C. $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ D. $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

解 由于 X, Y 都服从正态分布, 且 $\rho_{XY} = 1$, 所以一定存在常数 a, b 使得 $P(Y = aX + b) = 1$, 且 $a > 0$. 那么有 $E(Y) = aE(X) + b$, 即 $1 = 0 + b, b = 1$. 再由 $4 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2$ 可知 $a = 2$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

解 由 $xy' + y = (xy)' = 0$ 知 $xy = C$, 代入 $y(1) = 1$ 知 $C = 1$, 所以方程的解为 $y = \frac{1}{x}$.

10. 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

解 原方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)(y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = 1$, 因此曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$.

11. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x + 2)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 在 $x = -4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 3)^n$ 的收敛域为_____.

解 由条件知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 处收敛, 在 $x = -2$ 处发散, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2, 2]$, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 3)^n$ 的收敛域为 $(1, 5]$.

12. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$ _____.

解 补充曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$, 取下侧, 记 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 由 Σ 与 Σ_1 包围的有界区域为 Ω , 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy - \iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} ydxdydz + \iint_D x^2dxdy = 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi. \end{aligned}$$

13. 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = \mathbf{0}, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

解 由题意得 $A(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{0}, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2)$, 则

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此 A 与 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, A 的非零特征值为 1.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为 $X \sim P(1)$, 所以 $EX = DX = 1$, 于是 $EX^2 = (EX)^2 + DX = 2$, $P(X = EX^2) = P(X = 2) = \frac{1}{2e}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

解 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x \cdot \sin x}{\sin^4 x} = \frac{1}{6}.$$

16. (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

解 由条件可得

$$\begin{aligned} \int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy &= \int_0^\pi [\sin 2x + 2(x^2 - 1) \sin x \cos x] dx \\ &= \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx = -\frac{x^2}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \cos 2x dx \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \\ &= -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

17. (本题满分 11 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解 设 $P(x, y, z)$ 为曲线 C 上任意一点, 则点 P 到 xOy 面的距离为 $|z|$, 即原题化为求 z^2 在条件 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, x + y + 3z = 5$ 下的最值点. 令

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5),$$

解方程

$$\begin{cases} F'_x = 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ F'_\mu = x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

可得 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 或 $(-5, -5, 5)$. 因此曲线 C 上距离 xOy 面最远的点是 $(-5, -5, 5)$, 最近的点是 $(1, 1, 1)$.

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

证 (1) 对任意的 x , 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x). \end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 令 $g(x) = G(x + 2) - G(x) = 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^x f(t) dt$, 则

$$g'(x) = 2f(x + 2) - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0,$$

因此 $g(x)$ 为常函数, $g(x) = g(0) = 2 \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0$, 即 $G(x + 2) = G(x)$, 这说明 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 11 分)

将函数 $f(x) = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

解 把 $f(x)$ 作偶延拓以后再作周期为 2π 的周期延拓得到的函数是连续的偶函数, 其余弦级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. 对 $n = 1, 2, \dots$ 有

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) d(\sin nx)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{n\pi} \left[(1-x^2) \sin nx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = -\frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi x d(\cos nx) \\
 &= -\frac{4}{n^2\pi} \left(x \cos nx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx dx \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
 \end{aligned}$$

而 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) dx = 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \right)$, 所以 $f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$.

令 $x=0$ 得 $f(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2} = 1$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

20.(本题满分 10 分)

设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T, β^T 为 α, β 的转置. 证明:

(1) 秩 $r(A) \leq 2$.

(2) 若 α, β 线性相关, 则秩 $r(A) < 2$.

证 (1) 因为 α, β 均为 3 维列向量, 所以 $\alpha\alpha^T, \beta\beta^T$ 都是 3 阶矩阵, 且 $r(\alpha\alpha^T) \leq 1, r(\beta\beta^T) \leq 1$, 因此 $r(A) = r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2$.

(2) 如果 α, β 线性相关, 不妨设 $\alpha = k\beta$, 则 $r(A) = r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) = r((1+k^2)\beta\beta^T) = r(\beta\beta^T) \leq 1 < 2$.

21.(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}[P(Y \leq z-1) + P(y \leq z) + P(Y \leq z-1)] \\
&= \frac{1}{3}[F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)],
\end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] =$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(S^2) \\
&= (E\bar{X})^2 + D(\bar{X}) - \frac{1}{n} E(S^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2,
\end{aligned}$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 由于 \bar{X} 与 S^2 独立, 则有

$$\begin{aligned}
DT &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2) \\
&= \frac{1}{n^2} D(\sqrt{n}\bar{X})^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} D[(n-1)S^2] \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

4 2009 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()
 A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$ C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

解 首先当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) = x^2 \ln(1 - bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

$$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3) \right) = (1 - a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3),$$

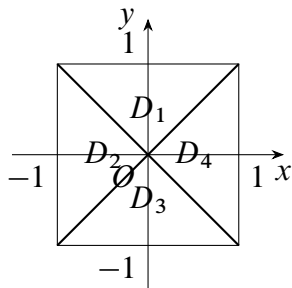
由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $\begin{cases} 1 - a = 0 \\ \frac{a^3}{6} = -b \end{cases}$, 因此 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$, 选 A.

2. 如图所示, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$,

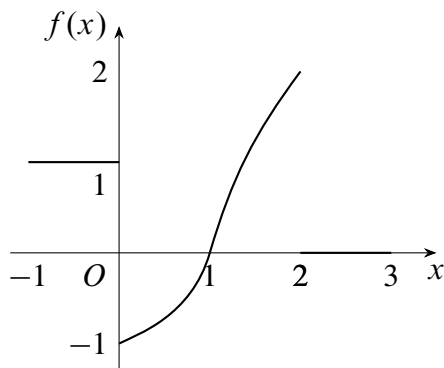
$$I_k = \iint_D y \cos x \, dx dy, \text{ 则 } \max_{1 \leq k \leq 4} I_k = \quad ()$$

- A. I_1 B. I_2 C. I_3 D. I_4

解 被积函数关于 y 为奇函数, 而 D_2, D_4 关于 x 轴对称, 因此 $I_2 = I_4 = 0$. 当 $(x, y) \in D_1$ 时, $y \cos x > 0$, 当 $(x, y) \in D_3$ 时, $y \cos x < 0$, 因此 $I_1 > 0 > I_3$, 最大的是 I_1 , 选 A.

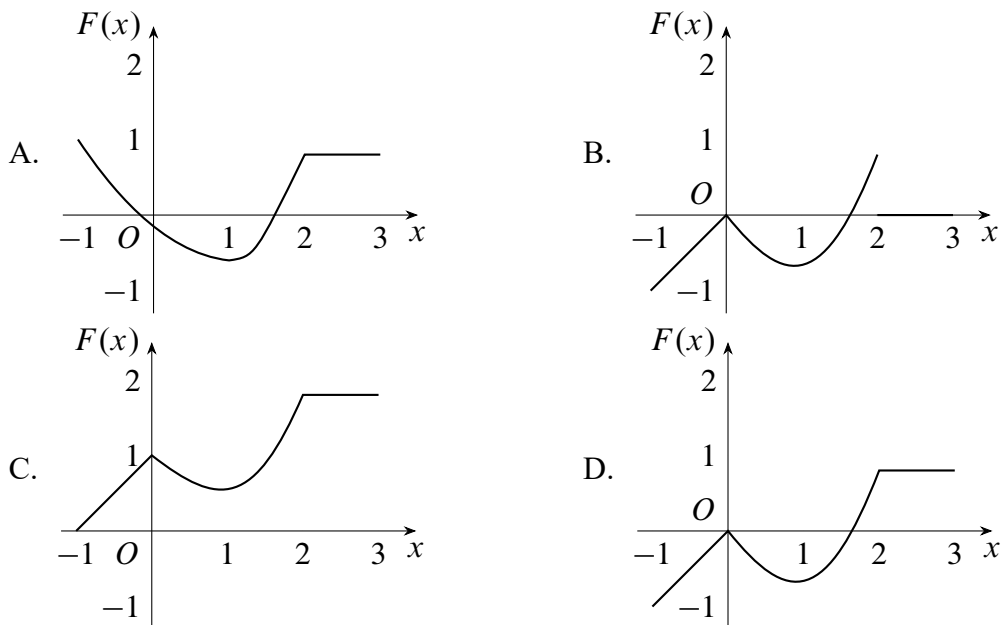


第 2 题图



第 3 题图

3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为 ()



解 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$, 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

4. 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

- A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛
 B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散
 C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛
 D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

解 A 选项不对, 反例可取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; B 选项和 D 选项不对, 反例可取

$a_n = 0, b_n = 1$; C 选项是对的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

于是当 n 充分大时 $|a_n| < 1, |b_n| < 1$, 此时 $a_n^2 b_n^2 \leq |b_n|$, 由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 选 C.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 ()

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

解 直接观察可得 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 因此选

A.

6. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

A. $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

解 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$ ()

A. 0

B. 0.3

C. 0.7

D. 1

解 X 的概率密度为 $f(x) = F'(x) = 0.3\varphi(x) + 0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$, 其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \frac{0.7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \\ &= 0 + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\varphi(t)dt = 0.7, \end{aligned}$$

选 C.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(Y = 0)P(XY \leq z|Y = 0) + P(Y = 1)P(XY \leq z|Y = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(0 \leq z|Y = 0) + \frac{1}{2}P(X \leq z|Y = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(0 \leq z) + \frac{1}{2}P(X \leq z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), & z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $F_Z(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个跳跃间断点, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x, xy) + yf'_2(x, xy), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12}(x, xy) + f'_2(x, xy) + xyf''_{22}(x, xy)$.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

解 由齐次方程的通解形式可知 $\lambda = 1$ 是特征方程的二重特征根, 因此齐次方程为 $y'' - 2y' + y = 0$. 设非齐次方程 $y'' - 2y' + y = x$ 的一个特解为 $y^* = Ax + B$, 代入方程可得 $A = 1, B = 2$, 于是 $y^* = x + 2$, 非齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$. 由条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$, 故所求的特解为 $y = -xe^x + x + 2$.

11. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

解 利用一型曲线积分公式得

$$\int_L x ds = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

12. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

解 记 D_z 表示平面 $z = z$ 与区域 Ω 相交所得平面区域, 利用切片法可得原积分

$$I = \int_{-1}^1 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-1}^1 \pi z^2 (1 - z^2) dz = \frac{4}{15} \pi.$$

13. 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 是 α 的转置矩阵, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

解 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 $\text{tr}(\beta^T\alpha) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = 2$.

提示: 当矩阵 A 与 B 可以互乘时, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 矩阵 AB 与 BA 的所有非零特征值及其重数都相同.

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

解 由条件得 $E(\bar{X}) = np, E(S^2) = np(1-p)$, 所以 $E(\bar{X} + kS^2) = np^2$ 可得 $np + knp(1-p) = np^2, k = -1$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点为 $(0, \frac{1}{e})$. 由于

$$A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right),$$

$$B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0,$$

$$C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e,$$

所以 $AC - B^2 = -2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) < 0$, 且 $A > 0$, 所以 $f(x, y)$ 的唯一极小值为

$$f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

16. (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

解 曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 所围区域的面积

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

于是

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

17.(本题满分 11 分)

设椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(2) 求 S_1 与 S_2 之间立体的体积.

解 (1) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2+z^2}{3} = 1$. 过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线方程为 $y = \pm \left(\frac{1}{2}x - 2 \right)$, 所以 S_2 的方程为 $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}x - 2 \right)^2$.

(2) 记 $y_1 = \frac{1}{2}x - 2$, 由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 记 $y_2 = \sqrt{3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)}$, 则 S_1 与 S_2 之间立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi y_1^2 dx - \int_1^2 \pi y_2^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \right) dx - \pi \int_1^2 \left(3 - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \pi. \end{aligned}$$

18.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.


证 (1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \right) - \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \right) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \end{aligned}$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf'(\xi)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = A.$$

 **提示:** 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$

的外侧.

解 记 $P = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $Q = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $R = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 则原

积分为 $I = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$. 因为 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$, 那么利用

对称性得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2 + x^2 + z^2 - 2y^2 + x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0.$$

记曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, r 充分小使得 Σ_1 包含在 Σ 内, 方向取外侧. 那么由高斯公式可知

$$\oiint_{\Sigma + \Sigma_1^-} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = 0.$$

记 Σ_1 包围的有界闭区域为 Ω , 则

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \oiint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \frac{1}{r^3} \oiint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \frac{1}{r^3} \iiint_{\Omega} 3 dV = \frac{3}{r^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = 4\pi. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解 (1) 对增广矩阵 (A, ξ_1) 作初等行变换得

$$(A \ \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $x = (0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1-2k)^T$, k 为任意常数.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 对增广矩阵 (A^2, ξ_1) 作初等行变换得

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是方程组 $A^2x = \xi_1$ 的通解为 $x_1 = -\frac{1}{2}u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2}u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k, u, v 有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2}u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a + 1))(\lambda - (a - 2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 A 的特征值为两正一零, 显然 $a - 2 < a < a + 1$, 因此必有 $a = 2$.

22.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X = 1|Z = 0)$;

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

解 (1) $P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{C_{2\frac{1}{6}}^1 \times \frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9}$.

(2) 由题意知 X, Y 的所有可能取值均为 $0, 1, 2$.

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}, \quad P(X = 0, Y = 1) = 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(X = 1, Y = 0) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2, Y = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 0.$$

因此 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量;

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

解 (1) 总体均值 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}$, 令 $\bar{X} = E(X)$,

即 $\bar{X} = \frac{2}{\lambda}$, 得 $\lambda = \frac{2}{\bar{X}}$, 即 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1 = \frac{2}{\bar{X}}$.

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, 取对数得 $\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 由 $\frac{d(\ln L)}{d\lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$ 得 $\lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{X}}$, 即 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2 = \frac{2}{\bar{X}}$.

5 2010 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x =$ ()
- A. 1 B. e C. e^{a-b} D. e^{b-a}

解 先取倒数和对数得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{(x-a)(x+b)}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x^2 + (b-a)x - ab}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{(b-a)x - ab}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(b-a)x - ab}{x^2} \\ &= b - a, \end{aligned}$$

因此原极限为 e^{a-b} , 选 C.

2. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
- A. x B. z C. $-x$ D. $-z$

解 方程两边分别关于 x 和 y 求偏导得 $\begin{cases} F'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \\ F'_1 \cdot \frac{1}{x} + F'_2 \cdot \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$, 于

是解得 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF'_1}{xF'_2} + \frac{z}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2} \end{cases}$, 因此 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 选 B.

3. 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性 ()
- A. 仅与 m 的取值有关 B. 仅与 n 的取值有关
- C. 与 m, n 的取值都有关 D. 与 m, n 的取值都无关

解 任取 $c \in (0, 1)$, 原反常积分 $I = \int_0^c \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_c^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = I_1 + I_2$. 对 I_1 而言, $x = 0$ 是瑕点, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 而 $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$, 所以 $\int_0^c \frac{dx}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 由比较判别法知 I_1 收敛.

对 I_2 而言, $x = 1$ 是瑕点, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = 0$, 积分 $\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 于是 I_2 收敛, 所以原积分 I 收敛, 与 m, n 的取值都无关, 选 D.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ()

A. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

B. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

D. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

解

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{j}{n})^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \right) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy, \end{aligned}$$

选 D.

5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ()

A. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$

B. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$

C. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$

D. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$

解 由题意有 $m = r(E) = r(AB) \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$, 因此 $r(A) = m \leq n$, 同理 $r(B) = m \leq n$, 选 A.

6. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解 由 $A^2 + A = O$ 知 A 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 -1 . 又 $r(A) = 3$, 所以 A 的特征值为 $-1, -1, -1, 0$, 且 A 为实对称矩阵, 则它相似于 $\text{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$, 选 D.

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P(X = 1) =$ ()

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} - e^{-1}$ D. $1 - e^{-1}$

解 $P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$, 选 C.

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足 ()

A. $2a + 3b = 4$ B. $3a + 2b = 4$ C. $a + b = 1$ D. $a + b = 2$

解 $f(x)$ 需要满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x)dx + b \int_0^3 f_2(x)dx = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1$, 即 $2a + 3b = 4$, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1 + u^2)du \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

解 利用参数方程求导公式得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\ln(1 + t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1 + t^2)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \left(e^t \frac{2t}{1 + t^2} + e^t \ln(1 + t^2) \right) e^t,$$

于是 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

10. $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx =$ _____.

解

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &= 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 d(\sin t) \\ &= -2 \int_0^{\pi} t \sin t dt = -\pi \int_0^{\pi} \sin t dt = -4\pi. \end{aligned}$$

11. 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____.

解 L 可分为两段 l_1 和 l_2 , 其中 $l_1: y = 1 + x, x: -1 \rightarrow 0, l_2: y = 1 - x, x: 0 \rightarrow 1$, 故

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{l_1} + \int_{l_2} xy dx + x^2 dy \right) \\ &= \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - 2x^2) dx = 0. \end{aligned}$$

12. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$ _____.

解 利用切片法可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}, \\ \iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

所以 $\bar{z} = \frac{2}{3}$.

13. 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

解 由条件知 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 作初等行变换得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $a = 6$.

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = k) = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $E(X^2) =$ _____.

解 根据概率分布的归一性得 $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = Ce = 1$, 所以 $C = e^{-1}$, 则

$$X \sim P(1), E(X^2) = (EX)^2 + D(X) = 2.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

解 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 齐次方程的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. 非齐次项 $2xe^x$ 的特解形式可设为 $y^* = x(ax + b)e^x$, 于是 $(y^*)' = [ax^2 + (2a + b)x + b]e^x, (y^*)'' = [ax^2 + (4a + b)x + 2(a + b)]e^x$, 代入原方程并约去 e^x 可得

$$[ax^2 + (4a + b)x + 2(a + b)] - 3[ax^2 + (2a + b)x + b] + 2(ax^2 + bx) = 2x,$$

即 $-2ax + 2a - b = 2x$, 故 $a = -1, b = -2$, 所以 $y^* = -(x^2 + 2x)e^x$, 原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - (x^2 + 2x)e^x$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

解 $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt, f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$. 分析 $f'(x)$ 的零点及正负可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$, 极小值为 $f(-1) = f(1) = 0$, 极大值为 $f(0) = \int_1^0 (0 - t)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

17.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n = 1, 2, \dots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

解 (1) 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \ln(1 + t) < t$, 所以 $|\ln t| [\ln(1 + t)]^n < t^n |\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1 + t) dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt$. 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = - \int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 令 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n-1)x^2}{2n+1} \right| = x^2 < 1$ 得 $-1 < x <$

1, 因此幂级数收敛半径为 1. 当 $x = \pm 1$ 时, 根据莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛, 因此收敛域为 $[-1, 1]$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 和函数

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right) \\ &= x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} dt = x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= x \cdot \arctan x. \end{aligned}$$

由幂级数在收敛域内的连续性知 $S(-1) = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x)$, 因此 $S(x) = x \arctan x, x \in [-1, 1]$.

19.(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解 $P(x, y, z)$ 是曲面 S 上任一点, S 在 P 处的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y - z, 2z - y)$, 而 xOy 面的法向量为 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, 由题意知 $\mathbf{n} \perp \mathbf{k}$, 于是 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 2z - y = 0$, 于是 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1 \\ y = 2z \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1 \\ y = 2z \end{cases}$.

记 xOy 面的平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1 \right\}$, 曲面 Σ 可表示为 $z = z(x, y), (x, y) \in D$, 在方程 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 两边求全微分得 $2xdx + 2ydy + 2zdz - zdy - ydz = 0$, 因此 $dz = \frac{2xdx + (2y - z)dy}{y - 2z}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 2z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - z}{y - 2z}$, 那么曲面 Σ 的面微元为

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y - 2z}\right)^2 + \left(\frac{2y - z}{y - 2z}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dx dy, \end{aligned}$$

则将曲面积分化为二重积分可得

$$I = \iint_D \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dx dy$$

$$= \iint_D (x + \sqrt{3}) dx dy = \sqrt{3} \iint_D dx dy = \sqrt{3}\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi.$$

20.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a ;

(2) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

解 (1) 因为方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 当 $\lambda = 1$ 时, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 方程组无

解, 因此 $\lambda = 1$ 舍去. 当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(A, b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix},$$

因为方程组 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.

(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时, $\bar{A} = (A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此方程组 $Ax = b$ 的

通解为 $x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k(1, 0, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(1) 求矩阵 A ;

(2) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 二次型 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 因此矩阵 A 的特征值为 $1, 1, 0$, 于是 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$, 且矩阵 Q 的第三列就是

属于特征值 0 的特征向量. 设 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则 $x_1 + x_3 = 0$, 解得 $\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T$ 为 A 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量, 于

是可取 $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 此时有 $Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$, 于是

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 A 的特征值为 1, 1, 0, 所以 $A + E$ 的特征值为 2, 2, 1, 且 $A + E$ 为实对称矩阵, 所以 $A + E$ 为正定矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

于是 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

解 由题意可知 $N_1 \sim B(n, 1 - \theta)$, $N_2 \sim B(n, \theta - \theta^2)$, $N_3 \sim B(n, \theta^2)$. 因为 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 所以 $E(T) = \theta$, 即

$$E(T) = a_1 E(N_1) + a_2 E(N_2) + a_3 E(N_3) = a_1 n(1 - \theta) + a_2 n(\theta - \theta^2) + a_3 n\theta^2 = \theta,$$

解得 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \frac{1}{n}$. 由于 $N_1 + N_2 + N_3 = n$, 所以 $T = \frac{N_2 + N_3}{2} = \frac{n - N_1}{2}$, 则

$$D(T) = D\left(1 - \frac{N_1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(N_1) = \frac{1}{n^2} n(1 - \theta)\theta = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}.$$

6 2011 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ()
 A. (1, 0) B. (2, 0) C. (3, 0) D. (4, 0)

解 首先可知 1, 2, 3, 4 分别是 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一、二、三、四重根, 不难得知 $y'(1) \neq 0, y'(2) = y'(3) = y'(4) = 0, y''(2) \neq 0, y''(3) = y''(4) = 0, y'''(3) \neq 0, y'''(4) = 0, y''''(4) \neq 0$, 因此唯一的拐点是 (3, 0), 选 C.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ()
 A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $[0, 2)$ D. $(0, 2]$

解 由题意知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处发散. 由莱布尼茨

判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 那么这两个

点就是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间的端点, 因此它的收敛域为 $[-1, 1)$, 从而幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0, 2)$, 选 C.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 (0, 0) 处取得极小值的一个充分条件是 ()
 A. $f(0) > 1, f''(0) > 0$ B. $f(0) > 1, f''(0) < 0$
 C. $f(0) < 1, f''(0) > 0$ D. $f(0) < 1, f''(0) < 0$

解 由 $z = f(x) \ln f(y)$ 可知 $z'_x = f'(x) \ln f(y), z'_y = \frac{f(x)}{f(y)}, z''_{xx} = f''(x) \ln f(y), z''_{xy} = \frac{f'(x)}{f(y)} f'(y), z''_{yy} = f(x) \frac{f''(y)f(y) - f'^2(y)}{f^2(y)}$. 在点 (0, 0) 处, $z''_{xx} = f''(0) \ln f(0), z''_{xy} =$

$0, z''_{yy} = f''(0)$. 由二元函数极小值的充分条件, 需要满足 $f''(0) \ln f(0) > 0, f''(0) \ln f(0) \cdot f''(0) > 0$, 因此 $f(0) > 1, f''(0) > 0$, 选 C.

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是 ()

- A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

解 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

5. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

- A. $P_1 P_2$ B. $P_1^{-1} P_2$ C. $P_2 P_1$ D. $P_2 P_1^{-1}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系知 $A P_1 = B, P_2 B = E$, 所以 $A = B P_1^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 选 D.

6. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ()

- A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个向量 $(1, 0, 1, 0)^T$, 则 $r(A) = 3$ 且 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 所以 $r(A^*) = 1$. 再由 $A^*A = |A|E = O$ 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是方程组 $A^*x = 0$ 的解. $A^*x = 0$ 的基础解系中有三个线性无关的向量, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 和 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是线性无关的, 选 D.


7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ()

- A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_2(x)F_1(x)$
C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

解 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)] dx = F_1(x)F_2(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度, 其他都不满足, 选 D.

 提示: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x), 2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在. 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$ ()

- A. $E(U) \cdot E(V)$ B. $E(X) \cdot E(Y)$ C. $E(U) \cdot E(Y)$ D. $E(X) \cdot E(V)$

解 由于 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 所以 $UV = XY$, 再根据独立性得 $E(UV) = E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = \int_0^x \tan t \, dt \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

10. 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由条件得 $e^x(y' + y) = (ye^x)' = \cos x$, 于是 $ye^x = \sin x + C$. 由 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$, 因此 $ye^x = \sin x, y = e^{-x} \sin x$.

11. 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1+x^2y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{y^2 \cos xy \cdot (1+x^2y^2) - 2xy^3 \sin xy}{(1+x^2y^2)^2}$, 因此 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = 4$.

12. 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + xdy + \frac{y^2}{2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 曲线 L 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t + \sin t, t: 0 \rightarrow 2\pi$, 因此

$$\begin{aligned} &\oint_L xz dx + xdy + \frac{y^2}{2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t(\cos t + \sin t)(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \frac{\sin^2 t}{2}(\cos t - \sin t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t \cos^2 t - \frac{\sin^2 t \cos t}{2} + \cos^2 t - \frac{\sin^3 t}{2} \right) dt = \pi. \end{aligned}$$

13. 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由题意知二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 所以 $|A| = -(a-1)^2 = 0, a =$

1.

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

解 由条件知 X, Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 于是 $E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = \mu((EX)^2 + D(X)) = \mu(\mu^2 + \sigma^2) = \mu^3 + \mu\sigma^2$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 先取对数得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x-1} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

16. (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(xy, yg(x)) \cdot y + f'_2(xy, yg(x)) \cdot g'(x) \cdot y$, 所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = yf'_1(y, y)$.
故

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \left. \frac{d}{dy} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} \right) \right|_{y=1} = \left. \frac{d}{dy} [yf'_1(y, y)] \right|_{y=1} \\ &= [f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y))] \Big|_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$

17. (本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$. 则

- $k \leq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$ (且等号至多在一个点处成立), 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递减, 此时 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点, 方程 $k \arctan x - x = 0$ 只有一个实根.

• $k > 1$ 时, 由 $f(x)$ 为偶函数, 先考虑 $x > 0$ 的情形. 此时 $f'(x) \begin{cases} > 0, & 0 < x < \sqrt{k-1} \\ < 0, & x > \sqrt{k-1} \end{cases}$,

且 $f(0) = 0, f(\sqrt{k-1}) > 0, f(+\infty) = -\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内有一个零点 x_0 , 于是 $f(-x_0) = -f(x_0) = 0$, 故此时方程 $k \arctan x - x = 0$ 有三个实根.

18.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 (1) 由拉格朗日中值定理得 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n = \frac{1}{\xi} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, 其中 $\xi \in (n, n+1)$, 得证.

(2) 首先有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0, \end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 再将不等式 $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$ 对 k 从 1 到 n 求和得 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1) > \ln n$, 因此 $a_n > 0$. 根据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

解 由 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$ 知 $f'_y(1, y) = f'_x(x, 1) = 0$, 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 xy f''_{xy}(x, y) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 xy d(f'_y(x, y)) = \int_0^1 \left(xy f'_y(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(y f'_y(1, y) - \int_0^1 y f'_y(x, 1) dx \right) dy = - \int_0^1 dy \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^1 y f'_y(x, y) dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 y d(f(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^1 \left(yf(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_D f(x, y) dx dy = a.
 \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 (1) 首先有 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

因此 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能被 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示等价于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 于是 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0, \text{ 所以 } a = 5.$$

(2) 对增广矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换得

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

于是 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

21.(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 A .

解 (1) 由条件知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且

它对应的特征向量为 $k_1(1, 0, -1)^T, k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1, 0, 1)^T, k_2 \neq 0$. 再由 $r(A) = 2$ 知 0 也是 A 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases},$$
 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0, 1, 0)^T, k_3 \neq 0$.

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = A$, 因此

$$\begin{aligned} A &= PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$.

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

解 (1) 由于 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 所以 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$, 即 $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) &= P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{3}, \\ P(X = 1, Y = -1) &= P(Y = -1) - P(X = 0, Y = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{3}, \\ P(X = 0, Y = 0) &= P(Y = 0) - P(X = 1, Y = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

因此二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

	Y	-1	0	1
X				
0		0	$\frac{1}{3}$	0
1		$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $Z = XY$ 取值只有 $-1, 0, 1$, 且由 (X, Y) 的概率分布不难得到 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 0, E(XY) = 0, \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 因此 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = 0$.

23.(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(1) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

解 (1) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2},$$

取对数得 $\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$, 令

$$\frac{d(\ln L)}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$, 故 σ^2 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$.

(2) 首先有 $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, 所以 $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot n =$

$$\sigma^2, D(\hat{\sigma}^2) = D\left(\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

7 2012 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 所以直线 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的水平渐近线, 从而

它没有斜渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x = -1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^n(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^n n!$

解 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)] = (-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ()

A. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微

B. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微

C. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

D. 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

解 正确的选项是 B, 因为极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 由连续性可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) =$

$f(0, 0) = 0$, 且在 $(0, 0)$ 的邻域内有 $f(x, y) = f(0, 0) + 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$,

因此由可微的定义知 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微. A 选项可取反例 $f(x) = |x| + |y|$, C 和 D 选项可取反例 $f(x, y) = 1$, 因此选 B.

4. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有 ()
 A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_2 < I_3 < I_1$ D. $I_2 < I_1 < I_3$

解

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < I_1, \\ I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_0^{\pi} e^{(2\pi-t)^2} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{(2\pi+t)^2} \sin t dt \\ &= I_1 + \int_0^{\pi} [e^{(2\pi+t)^2} - e^{(2\pi-t)^2}] \sin t dt > I_1. \end{aligned}$$

选 D.

5. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ()

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 显然可得 $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 选 C.

6. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

- $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()
 A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P(X < Y) =$ ()
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

解 由条件可知 X 与 Y 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 4e^{-x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

所以

$$P(X < Y) = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = 4 \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-x-4y} dx dy = \frac{1}{5},$$

选 A.

8. 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ()
- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

解 设截成的两段长分别为 X 和 Y , 则 $Y = 1 - X$, 因此 X 与 Y 存在线性关系, 且为负相关, 因此 $\rho_{XY} = -1$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

解 微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 故方程的通解为 $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. 将 $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $f''(x) = C_1e^x + 4C_2e^{-2x}$ 代入方程 $f''(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1e^x + 5C_2e^{-2x} = 2e^x$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $f(x) = e^x$.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
解

$$\begin{aligned} \int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2} dx = \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

11. $\mathbf{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 令 $f(x, y, z) = xy + \frac{z}{y}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{z}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y}$, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(2,1,1)} = 1$, 因此 $\mathbf{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)} = (1, 1, 1)$.

12. 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 记 $D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} y^2 dS &= \iint_D y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

13. 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为 $\alpha^T\alpha, 0, 0$, 即 $1, 0, 0$. 则 $E - \alpha\alpha^T$ 也可以对角化, 且它的特征值为 $0, 1, 1$, 因此 $r(E - \alpha\alpha^T) = 2$.

14. 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 A 与 C 互不相容可知 $P(AC) = P(ABC) = 0$, 于是

$$P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)} = \frac{1/2}{1 - 1/3} = \frac{3}{4}.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

证 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x) \geq 0, x \in [0, 1)$ 即可. 首先有 $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$, 且 $\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$, 因此 $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$. 而 $f(0) = 0$, 则有 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$, 证毕.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解 由
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases}$$
 解得 $f(x, y)$ 的驻点为 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$. 记

$$A = f''_{xx}(x, y) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$B = f''_{xy}(x, y) = y(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$C = f''_{yy}(x, y) = x(y^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在驻点 $(1, 0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0, A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$, 所以 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x, y)$ 的极大值. 在驻点 $(-1, 0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0, A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0$, 所以 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x, y)$ 的极小值.

17.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 令 $u_n = \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$, 因此原幂级数的收敛半径 $R = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1}$ 发散, 因此原幂级数收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, 和函数为

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1)^2 + 2}{2n + 1} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n + 1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' + \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' + \frac{2}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

而 $S(0) = 3$, 因此 $S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 3, & x = 0 \end{cases}$.

18.(本题满分 10 分)

已知曲线 $L : \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) =$

0, $f'(t) > 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$), 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

解 由参数方程求导公式知 $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{f'(t)}$, 因此曲线 L 上任一点 $(x, y) = (f(t), \cos t)$ 处的切线方程为 $Y - \cos t = -\frac{\sin t}{f'(t)}(X - f(t))$. 令 $Y = 0$, 得此切线与 x 轴交点的横坐标为 $X = f'(t) \cot t + f(t)$, 由题意得 $(f'(t) \cot t)^2 + \cos^2 t = 1$. 又 $f'(t) > 0$, 所以 $f'(t) = \sec t - \cot t$, 从而 $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + C$. 再由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$. 以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积为

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\sec t - \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

19.(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \oint_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

解 取有向线段 L_1 的方程为 $x = 0$, 起点为 $(0, 2)$, 终点为 $(0, 0)$. 由 L 与 L_1 围成的平面区域记为 D , 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \oint_{L+L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \oint_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y) \right) dx dy - \int_2^0 (-2y) dy \\ &= \iint_D dx dy - 4 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵 (A, β) 作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, \beta) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解当且仅当 $r(A) = r(A, \beta) < 4$, 因此 $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$, 此时方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.

解 (1) 因为 $r(A) = r(A^T A) = 2$, 对矩阵 A 作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $a = -1$.

(2) 由 $a = -1$ 可得 $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 故矩阵 $A^T A$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是 $A^T A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $A^T A x = 0$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$;

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 解方程组 $(2E - A^T A)x = 0$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = 6$ 时, 解方程组 $(6E - A^T A)x = 0$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$.

令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则在正交变换 $x = Qy$ 下, 原二次型化为标准形 $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X = 2Y)$

(2) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

解 (1) 由 (X, Y) 的概率分布知 $P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}$.

(2) 由 (X, Y) 的概率分布知 X, Y, XY 的概率分布分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

所以 $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 1, E(Y^2) = \frac{5}{3}, D(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{3}$, 于是 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \text{Cov}(X - Y) = \text{Cov}(X, Y) - D(Y) = -\frac{2}{3}$.

23.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

- (1) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;
 (2) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;
 (3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

解 (1) 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$, 且 X, Y 相互独立知 $Z = X - Y \sim N(0, 3\sigma^2)$, 因此 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty$.

(2) 设样本 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的观测值为 z_1, z_2, \dots, z_n , 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(z_i; \sigma^2) = (6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

取对数得 $\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(6\pi\sigma^2) - \frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$, 令 $\frac{d(\ln L)}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{6\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0$

得 $\sigma^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

(3) 因为 $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(Z_i^2) = \frac{1}{3} E(Z^2) = \frac{1}{3} D(Z) = \sigma^2$, 所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

8 2013 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 ()

- A. $k = 2, c = -\frac{1}{2}$ B. $k = 2, c = \frac{1}{2}$ C. $k = 3, c = -\frac{1}{3}$ D. $k = 3, c = \frac{1}{3}$

解 利用等价无穷小可知当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$, 由题意就有 $k = 3, c = \frac{1}{3}$.

2. 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()

- A. $x - y + z = -2$ B. $x + y + z = 0$
C. $x - 2y + z = -3$ D. $x - y - z = 0$

解 记 $F(x, y, z) = x^2 + \cos(xy) + yz + x$, 则

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 2x - y \sin xy + 1, \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = -x \sin xy + z, \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = y,$$

因为 $\frac{\partial F(0, 1, -1)}{\partial x} = 1, \frac{\partial F(0, 1, -1)}{\partial y} = -1, \frac{\partial F(0, 1, -1)}{\partial z} = 1$, 所以曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 $x - (y - 1) + z = 1$, 即 $x - y + z = -2$, 选 A.

3. 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|, b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$,

则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

解 由题意可知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 作周期为 2 的奇延拓得到的函数所对应的傅里叶级数,

因此 $S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, 选 C.

4. 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记

$$I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4),$$

则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$ ()

- A. I_1 B. I_2 C. I_3 D. I_4

解 设 L_i 所包围的有限区域为 $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 首先由格林公式可得

$$\begin{aligned} I_i &= \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy = \iint_{D_i} \left[(2 - x^2) - \left(1 + \frac{1}{2}y^2 \right) \right] dx dy \\ &= \iint_{D_i} \left[1 - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

被积函数取非负值得最大区域为 $x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1$, 刚好就是区域 D_4 , 因此 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$, 选 D.

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则 ()

- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
 B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
 C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
 D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

解 对一个矩阵 A 右乘一个可逆矩阵 B 就是对 A 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 C , 因此矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ()

- A. $a = 0, b = 2$ B. $a = 0, b$ 为任意常数
 C. $a = 2, b = 0$ D. $a = 2, b$ 为任意常数

解 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的特征值为 $2, b, 0$, 而 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2)$,

因此当且仅当 $a = 0$ 时, A 的特征值为 $2, b, 0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P(-2 \leq X_i \leq 2) (i = 1, 2, 3)$, 则 ()

- A. $p_1 > p_2 > p_3$ B. $p_2 > p_1 > p_3$ C. $p_3 > p_1 > p_2$ D. $p_1 > p_3 > p_2$

解 利用正态分布的性质可得

$$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{2-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right) = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到 $p_1 > p_2 > p_3$, 选 A.

8. 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 α ($0 < \alpha < 0.5$), 常数 c 满足 $P(X > c) = \alpha$, 则 $P(Y > c^2) =$ ()
- A. α B. $1 - \alpha$ C. 2α D. $1 - 2\alpha$

解 由 $X \sim t(n)$ 可知 $X^2 \sim F(1, n)$, 因此

$$P(Y > c^2) = P(X^2 > c^2) = P(X > c) + P(X < -c) = 2\alpha,$$

选 C.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

解 由 $y - x = e^{x(1-y)}$ 可知当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 等式两边关于 x 求导得 $y - 1 = e^{x(1-y)}(1 - y - xy')$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = f'(0) = 1$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1.$$

10. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

解 因为 $y_1 - y_3 = e^{3x}$, $y_2 - y_3 = e^x$ 是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且 e^{3x} 与 e^x 线性无关. 又因为 $y_3 = -xe^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}$.

11. 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

解 由参数方程求导公式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos t},$$

因此 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \\ &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Big|_1^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

13. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 可知 $A^T = -A^*$, 于是 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A^*| = -|A|^2$, 因此 $|A| = 0$ 或 -1 . 又 A 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 于是 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$, 所以 $|A| = -1$.

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P(Y \leq a + 1 | Y > a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 Y 的分布函数为 $F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$, 由条件概率公式得

$$\begin{aligned} P(Y \leq a + 1 | Y > a) &= \frac{P(a < Y \leq a + 1)}{P(Y > a)} \\ &= \frac{F(a + 1) - F(a)}{1 - F(a)} = \frac{e^{-a} - e^{-(a+1)}}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

解 方法一 由条件有 $f(1) = 0, f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 利用分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 f(x) d(\sqrt{x}) = -2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx = -4 \int_0^1 \ln(1+x) d(\sqrt{x}) \\ &= -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 8 \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

$$= 8 - 2\pi - 4 \ln 2.$$

方法二 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= - \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \left(\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) dt \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt = 8 - 2\pi - 4 \ln 2. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

解 (1) 由 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 得 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, 结合条件 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$ 可得

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),$$

即 $S''(x) - S(x) = 0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的通解为 $S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 由初值条件 $S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1$ 得 $C_1 + C_2 = 3, C_1 - C_2 = 1$, 所以 $C_1 = 2, C_2 = 1, S(x) = 2e^x + e^{-x}$.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y}$ 的极值.

解 由
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \left(x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y} = 0 \\ f'_y(x, y) = \left(1 + y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y} = 0 \end{cases}$$
 得驻点 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$. 进一

步可得

$$f''_{xx}(x, y) = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y},$$

$$f''_{xy}(x, y) = \left(1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y},$$

$$f''_{yy}(x, y) = \left(2 + y + \frac{x^3}{3}\right) e^{x+y}.$$

在驻点 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 处,

$$A = f''_{xx}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = -e^{-\frac{5}{3}}, B = f''_{xy}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}}, C = f''_{yy}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}}.$$

此时 $AC - B^2 < 0$, 因此 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 不是极值点. 在驻点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 处,

$$A = f''_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}}, B = f''_{xy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}, C = f''_{yy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}.$$

此时 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$, 因此 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 是极小值点, 且极小值为 $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$.

18.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;
- (2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = f(0) = 0$, $F(1) = f(1) - 1 = 0$, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法一 令 $G(x) = f(x) + f'(x) - x$, 则

$$G(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1),$$

$$G(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1.$$

由罗尔定理知存在 $\eta \in (-1, 1)$ 使得 $G'(\eta) = f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

方法二 令 $H(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 由 (1) 可知 $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$, 因此 $H(\xi) = H(-\xi) = 0$, 由罗尔定理知存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ 使得 $H'(\eta) = e^\eta(f''(\eta) + f'(\eta) - 1) = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω .

- (1) 求曲面 Σ 的方程;
- (2) 求 Ω 的形心坐标.

解 (1) 直线 L 的方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$, 写成参数方程即 $x = 1 + t, y = -t, z = -t$. 曲面 Σ 是 L 绕 z 轴旋转而成, 设 (x, y, z) 为曲面 Σ 上的任意点, 则 $x^2 + y^2 = (1+t)^2 + t^2, z = -t$, 所以曲面 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$.

(2) 设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性得 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 用平面 $z = z$ 截区域 Ω 所得的截面为 $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2z^2 - 2z + 1\}$, 由切片法可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \int_0^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) dz \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} z^3 - z^2 + z \right) \Big|_0^2 = \frac{10\pi}{3}, \\ \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^2 z dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \int_0^2 z(2z^2 - 2z + 1) dz \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} z^4 - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$

因此 $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{7}{5}$, Ω 的形心坐标为 $(0, 0, \frac{7}{5})$.

20. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

解 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AC - CA = B$ 得方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases}. \quad (*)$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

由此可知当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组 (*) 无解. 当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 方程组 (*) 有解, 且此时方程组的通解为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时存在矩阵 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ 使得 $AC - CA = B$.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

证 (1) 记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}) = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta},$$

故 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是矩阵 \boldsymbol{A} 的特征值. 又 \boldsymbol{A} 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) \leq r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) = 2$, 即 \boldsymbol{A} 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3 = 0$ 也是 \boldsymbol{A} 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P(X \leq Y)$.

解 (1) 记 Y 分布函数为 $F(y)$, 则当 $y < 1$ 时, $F(y) = 0$; 当 $y \geq 2$ 时, $F(y) = 1$; 当 $1 \leq y < 2$ 时,

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y) = P(Y = 1) + P(1 < Y \leq y) \\ &= P(X \geq 2) + P(1 < X \leq y) = \int_2^3 \frac{x^2}{9} dx + \int_1^y \frac{x^2}{9} dx = \frac{y^3 + 18}{27}. \end{aligned}$$

所以 Y 的分布函数为 $F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2. \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$

(2) 由随机变量 Y 的定义可知 $P(X \leq Y) = P(X < 2) = \int_0^2 \frac{x^2}{9} dx = \frac{8}{27}$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 总体均值 $E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$, 令 $E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$.

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 令 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$ 得 $\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$, 所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$.

9 2014 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列曲线中有渐近线的是 ()

A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin \frac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 从而直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

A. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ B. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
 C. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ D. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

解 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$. 故当 $f''(x) > 0$ 时, $F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处取到, 而 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$, 选 D.

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$ ()

A. $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
 B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$
 C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$
 D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

解 画出积分区域, 如果化为极坐标, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

如果在直角坐标系下交换积分次序, 则

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

选 D.

4. 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$ ()

- A. $2 \sin x$ B. $2 \cos x$ C. $2\pi \sin x$ D. $2\pi \cos x$

解 直接计算可得

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2ax \cos x - 2bx \sin x + 2ab \sin x \cos x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x - 2bx \sin x) dx \\ &= \pi a^2 + \pi(b-2)^2 + \frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi. \end{aligned}$$

显然当 $a = 0, b = 2$ 时, $I(a, b)$ 最小, 所以 $a_1 = 0, b_1 = 2$, 选 A.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ()

- A. $(ad - bc)^2$ B. $-(ad - bc)^2$ C. $a^2 d^2 - b^2 c^2$ D. $b^2 c^2 - a^2 d^2$

解 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2, \end{aligned}$$

选 B.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

解 曲面在点 $(1, 0, 1)$ 处的法向量为 $(z'_x, z'_y, -1)|_{(1,0,1)} = (2, -1, -1)$, 所以切平面方程为 $2(x-1) + (-1)(y-0) + (-1)(z-1) = 0$, 即 $2x - y - z - 1 = 0$.

10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

解 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = \int 2(x-1) dx = x^2 - 2x + C$, 由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 即 $f(x) = x^2 - 2x$. 又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 故 $f(7) = f(-1) = -f(1) = 1$.

11. 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为_____.

解 原微分方程即 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, 这是一个齐次方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = x \frac{du}{dx} + u$, 原方程化为 $x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$. 解此变量分离的方程得 $u = e^{Cx+1}$, 从而原方程通解为 $y = xe^{Cx+1}$. 代入初值条件 $y(1) = e^3$ 可得 $C = 2$, 故所求特解为 $y = xe^{2x+1}$.

12. 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.

解 曲线 L 的参数方程为 $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = -\sin \theta, \theta$ 从 0 到 2π , 则

$$\oint_L z dx + y dz = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta = \pi.$$

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

解 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4 - a^2 \geq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 2$.

14. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 为 θ^2 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

解 由无偏估计的定义得

$$\begin{aligned} E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cn E(X^2) \\ &= cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = \frac{2cn}{3\theta^2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{\theta}^{2\theta} = \frac{5cn}{2} \theta^2 = \theta^2, \end{aligned}$$

因此 $c = \frac{2}{5n}$.


三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

解 当 $t > 0$ 时, $t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t > t^2(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}) - t = \frac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \bigg/ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 提示: 事实上, 洛必达法则适用于 $\frac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

解 方程两边关于 x 求导得 $3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0$, 令 $y' = 0$ 得 $y = -2x$ 或 $y = 0$ (舍去). 将 $y = -2x$ 代入原方程得 $-6x^3 + 6 = 0$, 所以 $x = 1$, $f(1) = -2$. 在 $3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0$ 两边继续对 x 求导得

$$(3y^2 + 2xy + x^2)y'' + 2(3y + x)(y')^2 + 4(y + x)y' + 2y = 0,$$

求得 $f''(1) = \frac{4}{9} > 0$, 因此 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 且极小值 $f(1) = -2$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(e^x \cos y)e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y)e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y)e^x \cos y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(e^x \cos y)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y)e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y)e^x \cos y.\end{aligned}$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x \cos y)e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y]e^{2x},$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u) = 4f(u) + u$, 此方程的通解为 $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$. 由 $f(0) = f'(0) = 0$ 得 $C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0$, 解得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$, 故 $f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$.


18. (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$) 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy.$$

解 曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 由 $z = x^2 + y^2$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 利用投影法和二重积分对称性得

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\ &= \iint_D \left((x^2 + y^2) - 1 - (x-1)^3 \frac{\partial z}{\partial x} - (y-1)^3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D (-1 + 2x - 5x^2 + 6x^3 - 2x^4 + 2y - 5y^2 + 6y^3 - 2y^4) dxdy \\ &= - \iint_D (1 + 5x^2 + 5y^2 + 2x^4 + 2y^4) dxdy \\ &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 + 5r^2 + 2r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)) r dr \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

 提示: 这题还可以用补面 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ 的方法用高斯公式来做, 但这里用投影法更直接.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$, $\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(2) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

解 (1) 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 由 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$, $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 可得 $\cos a_n - \cos b_n = a_n > 0$, 因此 $0 < a_n < b_n$, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \sim a_n + 1 - \cos a_n = 1 - \cos b_n \sim \frac{b_n^2}{2}$, 因此 $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{b_n}{2}$, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

解 (1) 对矩阵 A 作初等行变换得 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则方

程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\alpha = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(2) 对矩阵 (A, E) 作初等行变换得

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $E = (e_1, e_2, e_3)$, 则 $Ax = e_1$ 的通解为 $x = (2, -1, -1, 0)^T + k_1\alpha, k_1 \in \mathbb{R}$; $Ax = e_2$ 的通解为 $x = (6, -3, -4, 0)^T + k_2\alpha, k_2 \in \mathbb{R}$; $Ax = e_3$ 的通解为 $x =$

$(-1, 1, 1, 0)^T + k_3\alpha, k_3 \in \mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha) = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & -4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 A 可对角化的充要条件是 $\text{tr}(A) \neq 0$. 且当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, A 的相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$.

证 由于 $r(A) = 1$, 所以方程组 $Ax = 0$ 有且只有 $n - 1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 A 的 $n - 1$ 重特征值, 且它只有 $n - 1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 A 的最后一个特征值就是 $\text{tr}(A)$. 当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 A 可对角化, 且其相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$. 若 $\text{tr}(A) = 0$, 则 0 是 A 的 n 重特征值, 但只有 $n - 1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(A) = r(B) = 1, \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = n$ 可知 A 与 B 都相似于对角阵 $\text{diag}\{n, 0, \dots, 0\}$, 故 A 与 B 相似.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY .

解 (1) 由分布函数定义得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X = 1)P(Y \leq y|X = 1) + P(X = 2)P(Y \leq y|X = 2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq y|X = 1) + \frac{1}{2}P(Y \leq y|X = 2) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, & y \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}.$$

(2) Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2, \text{ 因此} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

其中 θ 是未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(3) 是否存在实数 a , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

解 (1) 总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = - \int_0^{+\infty} x d(e^{-\frac{x^2}{\theta}}) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}, \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \theta.$$

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \frac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时,

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

令 $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = -\frac{\theta}{n} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ 得 $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$, 故 θ 的最大似然估计量为

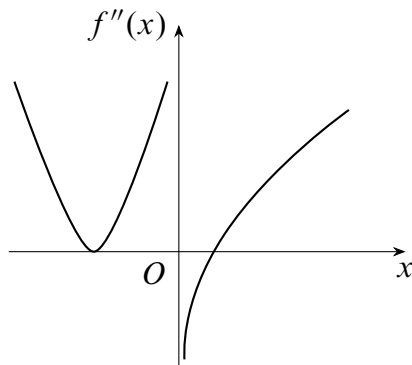
$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

(3) 存在 $a = \theta$ 满足条件. 因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_1^2) = \theta < +\infty$, 所以根据辛钦大数定律知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_1^2) = \theta$. 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\right\} = 0$.

10 2015 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ()



第 1 题图

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y = f''(x)$ 在 $x > 0$ 时与 x 轴的交点, $x < 0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

2. 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则 ()

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$ B. $a = 3, b = 2, c = -1$
C. $a = -3, b = 2, c = 1$ D. $a = 3, b = 2, c = 1$

解 原微分方程的非齐次项为 ce^x , 它的一个特解为 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$, 因此可以判断方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个特征根分别为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 于是 $a = -3, b = 2$. 于是将特解 $y = xe^x$ 代入方程中可得 $(xe^x)'' - 3(xe^x)' + 2xe^x = -e^x = ce^x$, 所以 $c = -1$, 选 A.

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的 ()
 A. 收敛点, 收敛点 B. 收敛点, 发散点 C. 发散点, 收敛点 D. 发散点, 发散点

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处条件收敛, 因此 $x = 1$ 是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛区间的端点, 即收敛半径为 1. 而幂级数逐项求导后的级数收敛半径不变, 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的收敛半径也是 1, 从而 $x = \sqrt{3}$ 为收敛点, $x = 3$ 为发散点, 选 B.

4. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
 C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

解 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 得四条曲线分别为 $r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 正确答案选 B.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ()

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

解 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, \mathbf{b}) < 3$, 利用初等行变换得

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 $2, d = 1$ 或 2 , 选 D.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. 若 $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形

11. 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 方程两边求全微分得 $e^z dz + yz dx + xz dy + xy dz + dx - \sin x dx = 0$, 令 $x = 0, y = 1, z = 0$ 得 $dz + dx = 0$, 即 $dz|_{(0,1)} = -dx$.

12. 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的空间区域, 则

$$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 记 D_z 为用平面 $z = z$ 截区域 Ω 所得的截面, 利用轮换对称性与切片法得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1 - z)^2 dz = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

13. n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 将此行列式记为 D_n , 把 D_n 按照第 n 行进行展开得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{2n-1} \cdot (-1) D_{n-1} + 2^n \\ &= D_{n-1} + 2^n = \cdots = D_1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P(XY - Y < 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$ 知 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$, 且 X, Y 相互独立, 所以

$$\begin{aligned} P(XY - Y < 0) &= P((X - 1)Y < 0) = P(X - 1 > 0, Y < 0) + P(X - 1 < 0, Y > 0) \\ &= P(X > 1)P(Y < 0) + P(X < 1)P(Y > 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)


设函数 $f(x) = x + a \ln(1 + x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以

$$f(x) = x + a \ln(1 + x) + bx \sin x = x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3)$$

$$= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3).$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x) = kx^3$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a = 0, b - \frac{a}{2} = 0, k = \frac{a}{3}$, 解得 $a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$.

 **提示:** 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继续求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 是无法直接

得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 此切线与 x 轴交点为 $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$. 根据题设条件可知 $\frac{1}{2} \frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)} \cdot |f(x_0)| = 4$, 即

$y = f(x)$ 满足方程 $y' = \frac{1}{8}y^2$, 解得 $y = -\frac{8}{8C + x}$. 因为 $f(0) = 2$, 所以 $C = -\frac{1}{2}$, 故

$$f(x) = \frac{8}{4 - x}.$$

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C : x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解 二元函数在每一点沿着梯度方向的方向导数最大, 且最大方向导数等于该点梯度的模. 注意到 $\mathbf{grad} f(x, y) = (1 + y, 1 + x)$, $|\mathbf{grad} f(x, y)| = \sqrt{(1 + x)^2 + (1 + y)^2}$, 因此问题转化为求 $\sqrt{(1 + x)^2 + (1 + y)^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值.

令 $F(x, y, \lambda) = (1 + x)^2 + (1 + y)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$, 由

$$\begin{cases} F'_x = 2(1 + x) + \lambda(2x + y) = 0 \\ F'_y = 2(1 + y) + \lambda(2y + x) = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

而 $|\mathbf{grad} f(1, 1)| = 2\sqrt{2}, |\mathbf{grad} f(-1, 1)| = 0, |\mathbf{grad} f(2, -1)| = |\mathbf{grad} f(-1, 2)| = 3$, 所以 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

18.(本题满分 10 分)

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

证 (1) 因为函数 $u(x), v(x)$ 可导, 记 $f(x) = u(x)v(x)$, 则在任意点 x_0 处有

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0) + u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} u(x) + v(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &= u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

由 x_0 的任意性知 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

(2) $f'(x) = u_1'(x)u_2(x) \cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x) \cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x) \cdots u_n'(x)$.

19.(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$, 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$,

计算曲线积分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$.

解 由曲线 L 的方程消去 z 得 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, 因此 L 的参数方程可取为 $x = \cos \theta, y = \sqrt{2} \sin \theta, z = \cos \theta$. 其中 y 从 $\sqrt{2}$ 变到 $-\sqrt{2}$, 因此 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[-(\sqrt{2} \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta \right] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \sin^3 \theta \right) d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

- (1) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基;
 (2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

解 (1) 首先注意到 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2\alpha_1 + 2k\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1 + (k+1)\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$,
 其中矩阵 $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, 且 $|P| = 4 \neq 0$, 所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基.

(2) 设非零向量 ξ 在两组基下的坐标都是 x , 则

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Px,$$

由于矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 所以 $x = Px$, 即 $(P - E)x = 0$. 对 $P - E$ 作初等行变换得

$$P - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix},$$

所以当且仅当 $k = 0$ 时, 方程组 $(P - E)x = 0$ 有非零解, 且所有非零解为 $x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. 那么在两个基下坐标相同的所有非零向量 $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = c(\alpha_1 - \alpha_3)$, c 为任意非零常数.

21.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 a, b 的值;
 (2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 由于矩阵 A 与矩阵 B 相似, 所以 $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

(2) 由 (1) 知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 由 A 与 B 相似知 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)x = 0$, 得线性无关特征向量 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (-3, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(5E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$.

取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 为对角阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY .

解 (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为 $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$,

则 Y 的概率分布为 $P(Y = k) = C_{k-1}^1 \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \frac{1}{8} = (k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2, k = 2, 3, \dots$.

(2) Y 的数学期望为 $E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 16$, 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, -1 < x < 1.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 由于总体 $X \sim U[\theta, 1]$, 故总体均值 $E(X) = \frac{\theta + 1}{2}$, 令 $E(X) = \bar{X}$ 得 $\theta = 2\bar{X} - 1$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$.

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

当 $\theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, 显然 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增, 则当 $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 最大, 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

11 2016 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则 ()

A. $a < 1$ 且 $b > 1$

B. $a > 1$ 且 $b > 1$

C. $a < 1$ 且 $a + b > 1$

D. $a > 1$ 且 $a + b > 1$

解 首先有 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx = I_1 +$

I_2 . 其中当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^a}$, 因此 $a < 1$ 时 I_1 收敛. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^{a+b}}$, 因此当 $a + b > 1$ 时 I_2 收敛, 选 C.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

解 从四个选项中选一个函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ 对任意 x 成立即可, 其中 B 和 C 当 $x > 1$ 时 $F'(x) \neq f(x)$, 而 A 不满足 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 若 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$ ()

A. $3x(1+x^2)$

B. $-3x(1+x^2)$

C. $\frac{x}{(1+x)^2}$

D. $-\frac{x}{(1+x)^2}$

解 由于 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是原方程的解, 所以 $y_2 - y_1 = 2\sqrt{1+x^2}$ 是齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 代入可得 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} +$

$\sqrt{1+x^2}p(x) = 0$, 因此 $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$. 又 $\frac{y_1+y_2}{2} = 2(1+x^2)^2$ 是方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 代入方程即可得到 $q(x) = 3x(1+x^2)$, 选 A.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}, n = 1, 2, \dots$, 则 ()

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导 D. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

解 显然 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$. 当 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ 时, 故 $1 \leq \frac{f(x)}{x} < \frac{n+1}{n}$, 且 $x \rightarrow 0^+$ 时 $n \rightarrow \infty$. 由夹逼准则得到 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 = f'_-(0)$, 因此 $f'(0) = 1$, 选 D.

5. 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

- A. A^T 与 A^T 相似 B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似
C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

解 由 A 与 B 相似知存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$, 因此

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P,$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, 则

A 与 B 相似, 但 $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ 与 $B + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 不相似.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ()

- A. 单叶双曲面 B. 双叶双曲面 C. 椭球面 D. 柱面

解 配方可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}x_3^2, \end{aligned}$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 表示的二次曲面为双叶双曲面.

7. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P(X \leq \mu + \sigma^2)$, 则 ()

- A. p 随着 μ 的增加而增加 B. p 随着 σ 的增加而增加
C. p 随着 μ 的增加而减少 D. p 随着 σ 的增加而减少

解 注意到 $P(X \leq \mu + \sigma^2) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \sigma\right) = \Phi(\sigma)$, 因此 p 随着 σ 的增加而增加, 选 B.

8. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示两次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

解 注意到 $X \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right)$, 因此 $E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = \frac{4}{9}$, 且 $E(XY) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{9}$ (求 $E(XY)$ 只需要求 $X \neq 0, Y \neq 0$ 的部分, 否则 $XY = 0$). 因此, 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
解 利用等价无穷小与洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{\frac{1}{2}x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + x \sin x)}{2x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10. 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的旋度 $\text{rot } A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 利用旋度公式直接计算得

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + z & xy & z \end{vmatrix} = \mathbf{j} + (y - 1)\mathbf{k}.$$

11. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 原方程两边分别对 x, y 求偏导数得

$$\begin{cases} z + (x + 1)z'_x = 2xf(x - z, y) + x^2(1 - z'_x)f'_1(x - z, y) \\ (x + 1)z'_y - 2y = x^2(-z'_y f'_1(x - z, y) + f'_2(x - z, y)) \end{cases}.$$

代入 $x = 0, y = 1, z = 1$ 可得 $z'_x(0, 1) = -1, z'_y(0, 1) = 2$, 因此 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

12. 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$ _____.

解 把 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处作麦克劳林展开得

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x(1 - ax^2 + o(x^2)) = \left(a - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3),$$

因此 $a - \frac{1}{3} = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}, a = \frac{1}{2}$.

13. 行列式 $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} =$ _____.

解 直接按照第一列展开得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \end{aligned}$$

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为_____.

解 注意到 μ 的双侧置信区间的上限与下限关于样本均值 \bar{x} 对称, 因此置信下限为 $9.5 \times 2 - 10.8 = 8.2$, 从而置信区间为 (8.2, 10.8).

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

解 化成极坐标计算可得

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r \cos \theta \cdot r dr$$

$$\begin{aligned}
 &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \theta + \cos^3 \theta + \frac{1}{3} \cos^4 \theta \right) d\theta \\
 &= 16 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{32}{3} + 5\pi.
 \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

解 (1) 利用定积分的定义可得微分方程 $y'' + 2y' + k = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$, 解得 $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$, 于是方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. 因为 $0 < k < 1$, 所以 $\lambda_{1,2} < 0$, 于是反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty} (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x})dx$ 收敛.

(2) 由 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$. 又 $y(0) = y'(0) = 1$, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} y(x)dx &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{k} (y''(x) + 2y'(x)) \right) dx \\
 &= -\frac{1}{k} (y'(x) + 2y(x)) \Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{k}.
 \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y + 1$. L_t 是从点 $(0, 0)$

到点 $(1, t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

解 由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x-y}$ 可知 $f(x, y) = xe^{2x-y} + C(y)$, 又 $f(0, y) = y + 1$, 所以 $C(y) = y + 1, f(x, y) = xe^{2x-y} + y + 1$. 从而

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \\
 &= \int_{L_t} df(x, y) = f(1, t) - f(0, 0) = e^{2-t} + t.
 \end{aligned}$$

令 $I'(t) = -e^{2-t} + 1 = 0$ 得 $t = 2$. 且 $t < 2$ 时 $I'(t) < 0, t > 2$ 时 $I'(t) > 0$, 因此 $I(t)$ 的最小值为 $I_{\min}(t) = I(2) = 3$.

18.(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$.

解 利用高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy = \iiint_{\Omega} (2x + 1) dV \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} x dz + V(\Omega) \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} x \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) dy + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

- (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

解 (1) 由条件可得

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})| \\ &< \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| < \dots < \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的前 n 项和为 $S_n = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$, 由 (1) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, 在等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边取极限得 $c = f(c)$, 即 c 是函数 $g(x) = f(x) - x$ 的零点. 由于 $g'(x) = f'(x) - 1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, 所以 $g(x)$ 严格单调递减. 再结合 $g(0) = 1$ 可得 $1 - x < g(x) < 1 - \frac{1}{2}x, x > 0$. 由于 $g(1) > 0, g(2) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在唯一零点, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in (1, 2) \subset (0, 2)$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无

解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

解 对方程的增广矩阵 (A, B) 作初等行变换得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq -2 \text{ 时, } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+3 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{此时方程 } AX = B \text{ 有唯一解, 且 } X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 此时方程}$$

$$AX = B \text{ 有无穷多解, 且 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_1-1 & k_2-1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \text{ 其}$$

中 k_1, k_2 为任意常数.

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, 由于 } (A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 此}$$

时方程 $AX = B$ 无解.

21.(本题满分 11 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

$$\text{解 (1) 首先由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \text{ 知 } A \text{ 的特征值为}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0.$$

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程组 $(-E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$.

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程组 $(-2E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_2 = (1, 2, 0)^T$.

当 $\lambda_3 = 0$ 时, 解方程组 $Ax = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (3, 2, 2)^T$.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$, 所以

$$\begin{aligned} A^{99} &= (P\Lambda P^{-1})^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由 $B^2 = BA$ 知 $B^{100} = BA^{99} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 即 $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$, $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$, $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$.

布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$.

- (1) 写出 (X, Y) 的概率密度;
- (2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;
- (3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

解 (1) (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) 对 $0 < t < 1$, 有

$$\begin{aligned} P(U = 0, X \leq t) &= P(X > Y, X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^x 3 dy = \frac{3}{2}t^2 - t^3, \\ P(U = 0) &= P(X > Y) = \frac{1}{2}, P(X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = 2t^{\frac{3}{2}} - t^3. \end{aligned}$$

由于 $P(U = 0, X \leq t) \neq P(U = 0)P(X \leq t)$, 所以 U 与 X 不独立.

(3)

$$F(z) = P(U + X \leq z) = P(U + X \leq z, U = 0) + P(U + X \leq z, U = 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(X \leq z, X > Y) + P(1 + X \leq z, X \leq Y) \\
 &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数.

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

解 (1) T 的分布函数为

$$\begin{aligned}
 F(t) &= P(T \leq t) = P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t) \\
 &= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3} dx\right)^3, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^9}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases}.
 \end{aligned}$$

因此 T 的概率密度为 $f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{9t^2}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) 由无偏估计的定义, 令 $E(aT) = \int_0^\theta at \frac{9t^2}{\theta^9} dt = \frac{9}{10}a\theta = \theta$, 解得 $a = \frac{10}{9}$.

12 2017 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

A. $ab = \frac{1}{2}$ B. $ab = -\frac{1}{2}$ C. $ab = 0$ D. $ab = 2$

解 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) \cdot f'(x) > 0$, 则 ()

A. $f(1) > f(-1)$ B. $f(1) < f(-1)$
C. $|f(1)| > |f(-1)|$ D. $|f(1)| < |f(-1)|$

解 由 $f(x)f'(x) > 0$ 可知 $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) > 0$, 因此 $f^2(x)$ 单调递增, 有 $f^2(1) > f^2(-1)$, 即 $|f(1)| > |f(-1)|$, 选 C.

3. 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为 ()

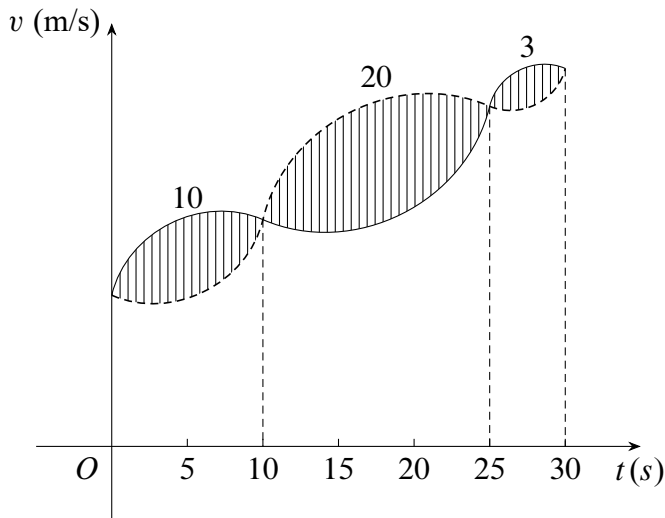
A. 12 B. 6 C. 4 D. 2

解 直接计算得 $f'_x = 2xy$, $f'_y = 2x^2$, $f'_z = 2z$, 于是 $f'_x(1, 2, 0) = 4$, $f'_y(1, 2, 0) = 1$, $f'_z(1, 2, 0) = 0$. 向量 $\boldsymbol{n} = (1, 2, 2)$ 的方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(1, 2, 0) = 4 \cos \alpha + \cos \beta + 0 \cos \gamma = 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = 2,$$

选 D.

4. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则 ()



第 4 题图

- A. $t_0 = 10$ B. $15 < t_0 < 20$ C. $t_0 = 25$ D. $t_0 > 25$

解 从 0 到 t_0 时刻, 甲和乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)dt$ 与 $\int_0^{t_0} v_2(t)dt$. 要使乙追上甲, 则有 $\int_0^{t_0} (v_2(t) - v_1(t))dt = 10$, 由定积分的几何意义知 $\int_0^{25} (v_2(t) - v_1(t))dt = 20 - 10 = 10$, 可知 $t_0 = 25$, 选 C.

5. 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ()

- A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解 矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的秩为 1, 它有 $n - 1$ 个特征值为 0, 第 n 个特征值为 $\lambda = \text{tr}(\alpha\alpha^T) = \|\alpha\|^2 = 1$, 因此 $E - \alpha\alpha^T$ 有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 A.

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- A. A 与 C 相似, B 与 C 相似 B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似
C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似 D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

解 注意到 A, B 的特征值都是 2, 2, 1, 要判断 A, B 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda = 2$ 的情形即可. 对矩阵 A 有 $r(2E - A) = 1$, 因此 A 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 A 与 C 相似. 对矩阵 B , 有 $r(2E - B) = 2$, 它是不可对角化的, B 与 C 不相似, 选 B.

7. 设 A, B 是两个随机事件, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是 ()

解 利用幂级数在收敛区间内的逐项积分和逐项求导得

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \right)' \\ &= - \left(\frac{-x}{1+x} \right)' = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 _____.

解 依题意知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 所以

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = r(A) = 2.$$

14. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 X 的概率密度为 $f(x) = F'(x) = 0.5\varphi(x) + 0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx + 0.25 \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi\left(\frac{x-4}{2}\right) dx \\ &= 0.25 \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi\left(\frac{x-4}{2}\right) dx = 0.25 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+4) \varphi(t) dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 2. \end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解 由复合函数的偏导数法则可得 $\frac{dy}{dx} = e^x f'_1 + f'_2(-\sin x)$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1)$. 进而

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= e^x f'_1 + e^x \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \cos x \cdot f'_2 - \sin x \frac{\partial f'_2}{\partial x} \\ &= e^x f'_1 + e^x (e^x f''_{11} - \sin x \cdot f''_{12}) - \cos x \cdot f'_2 - \sin x (e^x f''_{21} - \sin x \cdot f''_{22}) \\ &= e^x f'_1 - f'_2 \cos x + e^{2x} f''_{11} - 2e^x f''_{21} \sin x - f''_{22} \sin^2 x, \end{aligned}$$

所以 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1) + f''_{11}(1, 1)$.

16.(本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

解 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^2) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

解 将方程中的 y 视为 x 的函数, 两边求导得 $3x^2 + 3y^2y' - 3 + 3y' = 0$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$, 且 $x = 1$ 时 $y = 1$, $x = -1$ 时 $y = 0$. 等式两边再对 x 求导得

$$2x + 2yy'^2 + y^2y'' + y'' = 0,$$

从而 $y'' = -\frac{2(x + yy'^2)}{1 + y^2}$. 于是在点 $(1, 1)$ 处有 $y'' = -1 < 0$, 从而 $y(1) = 1$ 是极大值; 而在点 $(-1, 0)$ 处有 $y'' = 2 > 0$, 从而 $y(-1) = 0$ 是极小值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个实根.

解 (1) 因为极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 且由极限的保号性知存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $\frac{f(\eta)}{\eta} < 0$, 即 $f(\eta) < 0$. 又 $f(1) > 0$, 所以由零点定理知存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有根.

(2) 由于 $f(0) = f(\xi) = 0$, 所以根据罗尔定理知存在 $\zeta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\zeta) = 0$. 令 $F(x) = f(x)f'(x)$, 则 $F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2$. 那么有 $F(0) = F(\zeta) = F(\xi) = 0$, 因此再由罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (0, \zeta)$, $\xi_2 \in (\zeta, \xi)$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个实根.

19.(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $u(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(2) 求 S 的质量 M .

解 (1) 联立 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z^2 = 2x$ 并消去 z 得 $x^2 + y^2 = 2x$, 因此曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}.$$

(2) 曲线 C 在 xOy 平面的投影曲线围成的平面区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 则薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_S u(x, y, z) dS = \iint_D u(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D u(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 18 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = 96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 64. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明: $r(A) = 2$;

(2) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程 $Ax = \beta$ 的通解.

解 (1) 由于矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 因此 A 与对角阵 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(A) \geq 2$. 又 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 说明 A 的列向量组线性相关, 故 $r(A) \leq 2$, 因此 $r(A) = 2$.

(2) 因为 $r(A) = 2$, 所以 $Ax = 0$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 可知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, 即方程组 $Ax = 0$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 而

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 进而方程组 $Ax = \beta$ 的通

解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 \mathbf{Q} .

解 首先二次型的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 故 \mathbf{A} 一定有零特征值, 所以 $|\mathbf{A}| = 0$, 解得 $a = 2$.

由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$ 可知 \mathbf{A} 的三个特征值为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$.

解方程组 $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_1 = -3$ 的一个单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_2 = 6$ 的一个单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 $\lambda_3 = 0$ 的一个单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

因此 $\mathbf{Q} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$, Y 的概

率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y \leq EY)$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 (1) 首先有 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 y \cdot 2ydy = \frac{2}{3}$, 于是

$$P(Y \leq EY) = P\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) = \int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy = \frac{4}{9}.$$

(2) Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$$

$$\begin{aligned}
&= P(Y + X \leq z | X = 0)P(X = 0) + P(Y + X \leq z | X = 2)P(X = 2) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \leq z | X = 0) + \frac{1}{2}P(Y + 2 \leq z) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \leq z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z - 2) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 2).
\end{aligned}$$

$$\text{因此 } Z \text{ 的概率密度为 } f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z - 2) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ z - 2, & 2 < z < 3. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

23.(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做了 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立,且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计参数 σ .

- (1) 求 Z_1 的概率密度;
- (2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;
- (3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

解 (1) 由 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 可知 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$ 独立同分布, 设 Z_1 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned}
F(z) &= P(Z_i \leq z) = P(|X_i - \mu| \leq z) = P\left(-\frac{z}{\sigma} \leq \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1.
\end{aligned}$$

则 Z_1 的概率密度为

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 设 \bar{Z} 为样本均值, 令

$$\bar{Z} = E(Z_1) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

由此可知 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 对应的样本值为 z_1, z_2, \dots, z_n , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(z_i) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2}, & z_1, z_2, \dots, z_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $z_1, z_2, \dots, z_n > 0$ 时, 取对数得 $\ln L(\sigma) = \frac{n}{2} \ln \frac{2}{\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$, 令

$$\frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0,$$

解得 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}$, 故 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$.

13 2018 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是 ()

A. $f(x) = |x| \sin|x|$

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos|x|$

D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

解 A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_-(0) = \frac{1}{2}$, 选 D.

2. 过点 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 0)$ 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面方程为 ()

A. $z = 0$ 与 $x + y - z = 1$

B. $z = 0$ 与 $2x + 2y - z = 0$

C. $y = x$ 与 $x + y - z = 1$

D. $y = x$ 与 $2x + 2y - z = 2$

解 过点 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 0)$ 且与已知曲面相切的平面只有两个, 显然 $z = 0$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切, 故排除 C, D. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 的法向量为 $(2x, 2y, -1)$, 对于 A 选项, $x + y - z = 1$ 的法向量为 $(1, 1, -1)$, 可得 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. 代入 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y - z = 1$ 中 z 不相等, 排除 A, 故选 B.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$ ()

A. $\sin 1 + \cos 1$

B. $2 \sin 1 + \cos 1$

C. $2 \sin 1 + 2 \cos 1$

D. $3 \sin 1 + 2 \cos 1$

解 利用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的麦克劳林级数可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)!} \\ &= 2 \sin 1 + \cos 1. \end{aligned}$$

因此选 B.

4. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()

A. $M > N > K$

B. $M > K > N$

C. $K > M > N$

D. $N > M > K$

解 利用对称性可以计算 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K > \pi = M > N$.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ()

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda E - A$ 的秩相等, 即 $E - A$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则 ()

- A. $r(A \ AB) = r(A)$ B. $r(A \ BA) = r(A)$
 C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$ D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

解 对于 A, 有 $(A \ AB) = A(E \ B)$, 且 $(E \ B)$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(A \ AB) = r(A)$, 即选 A. B 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C 错误, $r(A \ B) \geq$

$\max\{r(A), r(B)\}$, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P(X < 0) =$ ()

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

解 由 $f(1+x) = f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 0.3,$$

于是 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 0.5 - 0.3 = 0.2$, 选 A.

8. 给定总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 给定样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 对总体均值 μ 进行检验, 令 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则 ()

- A. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0
 B. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0
 C. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0
 D. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0 , 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

解 显著性水平为 α 的假设检验的接受域就是置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间, 当 α 变小时, 置信水平变大, 置信区间变大, 也就是接受域变大, 因此选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin(kx)}} = e$, 则 $k =$ _____.

解 原极限为 1^∞ 型, 故恒等变形为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-2 \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1 + \tan x}{-2 \tan x} \frac{-2 \tan x}{(1 + \tan x) \sin(kx)}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x}{(1 + \tan x) \sin(kx)} \right) = e^{-\frac{2}{k}}.$$

所以 $-\frac{2}{k} = 1, k = -2$.

10. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 0)$, 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 x f''(x) dx =$ _____.

解 由题意知 $f(0) = 0, f(1) = 2, f'(1) = 2^x \ln 2|_{x=1} = 2 \ln 2$. 由分部积分公式, 原积分等于 $x f'(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = 2 \ln 2 - 2$.

11. 设 $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, 则 $\text{rot } F(1, 1, 0) =$ _____.

解 由旋度定义 $\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & xz \end{vmatrix} = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$, 可知 $\text{rot } F(1, 1, 0) = \mathbf{i} - \mathbf{k}$.

12. 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

解 由对称性得

$$\begin{aligned} \oint_L xy ds &= \frac{1}{3} \oint_L (xy + yz + xz) ds \\ &= \frac{1}{6} \oint_L [(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds \\ &= \frac{1}{6} \oint_L (-1) ds = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

13. 设二阶矩阵 A 有两个不同的特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

解 由 α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 则 α_1, α_2 是 A^2 的线性无关的特征向量. 又 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ 也是 A^2 的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 都是 A^2 的同一个特征值所对应的特征向量, 因此 A^2 有二重特征值 1. 又 A 有两个不同的特征值, 则其特征值为 $-1, 1$, 故 $|A| = -1$.

14. 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$. 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC|AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ _____.

解 因为 $BC = \emptyset$, $P(BC) = 0$, 故 $P(ABC) = 0$.

$$\begin{aligned} P(AC|AB \cup C) &= \frac{P[(ABC) \cup (AC)]}{P(AB \cup C)} \\ &= \frac{P(AC)}{P(AB) + P(C) - P(ABC)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B) + P(C)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

解得 $P(C) = \frac{1}{4}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

解 利用分部积分法

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{e^x - 1} d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x - 1} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) &= \int \frac{t}{\sqrt{t - 1}} dt = \int \frac{t - 1 + 1}{\sqrt{t - 1}} dt \\ &= \int \sqrt{t - 1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t - 1}} \\ &= \frac{2}{3} (t - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t - 1} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

故 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} + C_1$.

16.(本题满分 10 分)

¹将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 设分成的三段依次为 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$, 首先求驻点. 由方

$$\text{程} \begin{cases} f'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ f'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \\ f'_z = \frac{\sqrt{3}}{18}z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{可得} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases}, \text{并且黑塞矩阵 } Hf = \text{diag}\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$$

正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}\text{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi + 16 + \frac{36}{\sqrt{3}}\right) \geq (x + y + z)^2 = 4$,

$$\text{因此当 } \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{8} = \frac{z}{6\sqrt{3}} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}\text{m}^2.$$

17.(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy.$$

解 取曲面 $\Sigma_1: x = 0, 3y^2 + 3z^2 \leq 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\iint_{\Sigma} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy$$

¹此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

$$= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy - \iint_{\Sigma_1} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy.$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2)dV = \iiint_{\Omega} dV + 3 \iint_{3y^2+3z^2 \leq 1} (y^2 + z^2)\sqrt{1-3y^2-3z^2}dydz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^2\sqrt{1-3r^2}rdr = \frac{14\pi}{45} \end{aligned}$$

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy = 0$, 所以

$$\iint_{\Sigma} xdydz + (y^3 + 2)dzdx + z^3dxdy = \frac{14\pi}{45}.$$

18.(本题满分 10 分)

¹已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

(1) 当 $f(x) = x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

解 (1) 方程两边乘以 e^x 得 $(e^x y)' = e^x(y' + y) = xe^x$, 于是 $e^x y = (x-1)e^x + C$, 因此通解为 $y = Ce^{-x} + x - 1$.

(2) 等式两边乘以 e^x 可得 $(e^x y)' = e^x f(x)$, 通解可表示为 $y(x) = e^{-x} \left(\int_0^x f(t)e^t dt + C \right)$.

现在 $f(x+T) = f(x)$, 则

$$\begin{aligned} y(x+T) &= e^{-x-T} \left(\int_0^{x+T} f(t)e^t dt + C \right) \\ &= e^{-x-T} \left(\int_0^T f(t)e^t dt + \int_T^{T+x} f(t)e^t dt + C \right) \\ &= e^{-x-T} \left(\int_0^T f(t)e^t dt + \int_0^x f(u+T)e^{u+T} du + C \right) \\ &= e^{-x-T} \left(\int_0^T f(t)e^t dt + \int_0^x f(u)e^{u+T} du + C \right) \end{aligned}$$

¹此题来自蒲和平大学生数学竞赛教程 240 页.

$$= e^{-x} \left(\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C \right) e^{-T} + \int_0^x f(u)e^u du \right)$$

要使得这个解是周期函数, 则 $y(x+T) = y(x)$, 即满足 $\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C \right) e^{-T} = C$,

由此解得 $C = \frac{\int_0^T f(t)e^t dt}{e^T - 1}$, 因此 $y = e^{-x} \left(\int_0^x f(t)e^t dt + \frac{\int_0^T f(t)e^t dt}{e^T - 1} \right)$ 就是唯一的周期函数解.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \geq 0$, 在

等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x e^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

解 (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
. 对其系数矩阵进行初等

行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = c(-2, -1, 1)^T$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Qx.$$

其中 Q 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

解 (1) 由于矩阵 A 可经过初等列变换化为矩阵 B , 因此 A 和 B 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a = 2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $AX = B$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, k_1, k_2, k_3 为任意常数. 注意到 P 是可

逆矩阵, 因此 $|P| \neq 0$, 这要求 $k_2 \neq k_3$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

解 (1) 直接计算可知 $E(X) = 0, E(X^2) = 1$, 而 $Y \sim P(\lambda), E(Y) = \lambda$, 因此

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) \\ &= E(X^2)E(Y) - (EX)^2E(Y) = \lambda. \end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X = 1)P(Z = k|X = 1) + P(X = -1)P(Z = k|X = -1) \\ &= P(X = 1)P(Y = k) + P(X = -1)P(Y = -k) \\ &= \frac{1}{2}P(Y = k) + \frac{1}{2}P(Y = -k). \end{aligned}$$

当 $k = 1, 2, 3, \dots$ 时, $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!}$;

当 $k = 0$ 时, $P(Z = 0) = P(Y = 0) = e^{-\lambda}$;

当 $k = -1, -2, -3, \dots$ 时, $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = -k\} = \frac{\lambda^{-k} e^{-\lambda}}{2(-k)!}$.

因此综上所述可得

$$P(Z = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^{|k|} e^{-\lambda}}{2|k|!}, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{-\lambda}, & k = 0 \end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

解 (1) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 对应的样本值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = 2^{-n} \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma) = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|$. 令 $\frac{d \ln L}{d \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, 解

得 $\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E(|X|) = \sigma,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = 2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma}) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{1}{n}(E(X^2) - (E|X|)^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

14 2019 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- A. 可导点, 极值点 B. 不可导点, 极值点
 C. 可导点, 非极值点 D. 不可导点, 非极值点

解 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 且当 $x \in \mathring{U}(0)$

时, $f(x) < 0 = f(0)$, 因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 而极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 不存在, 因此不可导, 选 B.

3. 设 u_n 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ()
 A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

解 正确答案选 D. 因为 u_n 单调递增有界, 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ 存在, D 选项级数的部分和数列收敛, 因此级数收敛. A 中只要 $a \neq 0$ 就发散, B 则一定发散. C 中可取反例 $u_n = -\frac{1}{n}$, 则 $1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, 调和级数发散.

4. 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 ($y > 0$) 内的任意有向光滑闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 ()

- A. $y - \frac{x^2}{y}$ B. $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}$ C. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ D. $x - \frac{1}{y}$

解 由题意, 应当选择函数 $P(x, y)$ 使得在整个上半平面上均有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$ 成立, 选 D. (注意 C 选项在 y 轴上偏导数不存在)

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为 ()

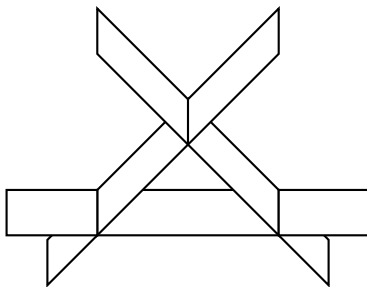
- A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

解 由 $A^2 + A = 2E$ 可知矩阵 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 因此 $\lambda = 1$ 或 -2 . 再由 $|A| = 4$ 可知 A 的特征值为 $-2, -2, 1$. 因此二次型 $x^T Ax$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 A, \bar{A} , 则 ()



第 6 题图

- A. $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ B. $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$
 C. $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$ D. $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$

解 令 $x = (x, y, z)^T, b = (d_1, d_2, d_3)^T$, 由于三个平面无交点, 因此方程组 $Ax = b$ 无解. 即 $r(A) < r(\bar{A}) \leq 3$. 再根据任意两个平面都不重合或平行, 可知 A 的任意两行线性无关, 因此 $r(A) \geq 2$. 因此只能是 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 选 A.

7. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 ()

- A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
 C. $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ D. $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

解 显然 $P(A) = P(B)$ 等价于 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$, 即 $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A = B = \Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B = \bar{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ()

- A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关
 C. 与 μ, σ^2 都有关 D. 与 μ, σ^2 都无关

解 由条件可知 $X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$, 因此

$$P\{|X - Y| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1,$$

此概率与 μ 无关, 而与 σ^2 有关, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

解 首先 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos x f'(\sin y - \sin x) + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y f'(\sin y - \sin x) + x$, 因此

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$$

10. 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.

解 方程变量分离可得 $\frac{2y}{y^2 + 2} dy = dx$, 两边积分得 $y^2 + 2 = Ce^x$. 由 $y(0) = 1$ 可知

$C = 3$, 方程的解为 $y = \sqrt{3e^x - 2}$. (注意初值条件, 要舍去负的解)

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

解 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \cos(\sqrt{x})$.

12. 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____.

解 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{4 - x^2 - (4 - x^2 - y^2)} dx dy \\ &= \iint_D |y| dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 \sin \theta dr = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

13. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

解 由条件可知 A 有且只有两个线性无关的列向量, 因此 $r(A) = 2$. 因为 $\alpha_3 =$

$-\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以 $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, 因此 $Ax = 0$ 的通解为 $x =$

$k(1, -2, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.


14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$

为 X 的数学期望, 则 $P(F(X) > E(X) - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 首先 $E(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}$. 再令 $Y = F(X)$, 则当 $y \leq 0$ 时, $P(Y \leq y) = 0$; 当 $y \geq 1$ 时, $P(Y \leq y) = 1$ (注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0 < y < 1$ 时,

$$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

因此 $Y = F(X) \sim U(0, 1)$, $P(F(X) > E(X) - 1) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

 **提示:** 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X) \sim U(0, 1)$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解 (1) 由条件可得 $(ye^{\frac{1}{2}x^2})' = e^{\frac{1}{2}x^2}(y' + xy) = 1$, 于是 $ye^{\frac{1}{2}x^2} = x + C$. 由 $y(0) = 0$ 可知 $C = 0$, $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 计算可得 $y' = e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2)$, $y'' = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^3 - 3x)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, \pm\sqrt{3}$. 再根据二阶导数的符号可得凹区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$. 拐点为 $(0, 0), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$

16.(本题满分 10 分)

设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a, b ;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

解 (1) 多元函数在一点处方向导数的最大值是沿着梯度方向的方向导数, 且最大值等于梯度的模. 由条件可得 $\text{grad } z = (2ax, 2by)$, 于是 $\text{grad } z|_{(3,4)} = (6a, 8b)$, 因此 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}$ 且 $a, b < 0$, 解得 $a = b$. 再由 $10 = \sqrt{(6a)^2 + (8b)^2}$ 可得 $a = b = -1$.

(2) 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 则曲面的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r dr = \frac{13}{3}\pi.$$

17.(本题满分 10 分)

¹求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)} |\sin(n\pi+t)| dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}. \end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

18.(本题满分 10 分)

²设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解 (1) 当 $0 < x < 1$ 时, $x^n \sqrt{1-x^2} > x^{n+1} \sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n(x^2-1) + x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n - x^{n-1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{n-1}{n+1} a_{n-2}, \end{aligned}$$

¹此题源自2012年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题.

²此题源自1993年北京师范大学数学分析考研题

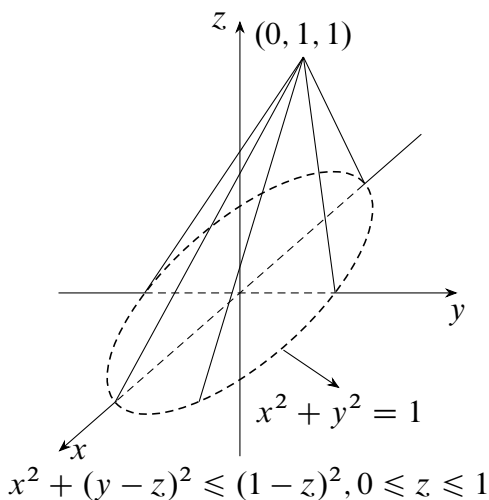
因此 $\frac{n+2}{n+1}a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$.

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

19. (本题满分 10 分)

设 Ω 是锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

解 这题并不是一般的圆锥面, 为此我们给出锥面的一般定义: 过定点 V 的动直线 L 沿着一条确定的曲线 Γ 移动所形成的曲面 S 叫做锥面. 直线 L 称为 S 的母线, 曲线 Γ 称为 S 的准线, 而定点 V 则是 S 的顶点. 在本题中, 锥面与 xOy 面的交线 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 就是母线, 顶点则是 $(0, 1, 1)$, 如图. 此锥面在 xOy 面的投影区域就是 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 因此这题我们采用切片法 (先二后一) 计算.



第 19 题图

设形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 面对称的, 由对称性可知 $\bar{x} = 0$. 对固定的 z , 记 $D_z = \{(x, y) | x^2 + (y-z)^2 \leq (1-z)^2\}$, 利用切片法可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{3}, \\ \iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy = \pi \int_0^1 z(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}, \\ \iiint_{\Omega} y dV &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} y dx dy = \pi \int_0^1 z(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

其中积分 $\iint_{D_z} y dx dy$ 中, 令 $y - z = u, dy = du$, 则

$$\iint_{D_z} y dx dy = \iint_{x^2 + u^2 \leq (1-z)^2} (u + z) dx du = \pi z (1 - z)^2.$$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y} = \bar{z} = \frac{\pi/12}{\pi/3} = \frac{1}{4}$, 形心坐标为 $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(1) 求 a, b, c ;

(2) 证明: $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

解 (1) 由题意可知 $b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$, 即

$$\begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ 2b + 3c + a = 1, \\ b + 2c + 3 = 1 \end{cases}$$

解得 $a = 3, b = 2, c = -2$.

(2) 由于 $|\alpha_2, \alpha_3, \beta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 因此 $r(\alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$, 这说明

$\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基. 再由

$$(\alpha_2, \alpha_3, \beta) = (\alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2, \alpha_3, \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha_2, \alpha_3, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$

到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

- (1) 求 x, y ;
 (2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

解 (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases}$$

解得 $x = 3, y = -2$.

(2) B 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 $2, -1, -2$.

对矩阵 B , 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 由方程 $(2E - B)x = 0$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$;

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 由方程 $(-E - B)x = 0$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_2 = (-1, 3, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 由方程 $(-2E - B)x = 0$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$.

取 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$.

同理对矩阵 A , 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $P_2^{-1}AP_2 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$. 故

$$P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B,$$

因此当取

$$P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

时, 则有 $P^{-1}AP = B$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

- (1) 求 Z 的概率密度;
 (2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;
 (3) X 与 Z 是否相互独立?

解 (1) X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. 由 X, Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(XY \leq z | Y = -1)P(Y = -1) + P(XY \leq z | Y = 1)P(Y = 1) \\ &= pP(-X \leq z | Y = -1) + (1-p)P(X \leq z | Y = 1) \\ &= pP(X \geq -z) + (1-p)P(X \leq z) \\ &= p(1 - F_X(-z)) + (1-p)F_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ 1 + (1-p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Z) &= E(XZ) - EX \cdot EZ \\ &= EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY = DX \cdot EY = 1 - 2p, \end{aligned}$$

因此当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\text{Cov}(X, Z) = 0$, 即 $\rho_{XZ} = 0$. 因此 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{Z \leq \frac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}, Z \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \neq P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right),$$

因此对任意 $p \in (0, 1)$, X, Z 不独立.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A ;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

解 (1) 由概率密度的归一性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 即

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{A}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1, \end{aligned}$$

得 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 对应的观测值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu$ 时, 取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left[\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$, 令

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0,$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

15 2020 年考研数学一

一 选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ()

- A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$
 C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt &\sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt &\sim \int_0^x \sqrt{t^3} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}, \\ \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt &\sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} \sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt &\sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}(1 - \cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5, \end{aligned}$$

正确答案选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 ()

- A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
 B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
 C. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$
 D. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

解 选项 A 和 B 不涉及到 $f(0)$ 是否有定义, 无法保证 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 处的连续性, 所以可导性更加得不到. 对于选项 C 和 D, 如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 那么由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 可知 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 存在, 那么

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = A \cdot 0 = 0,$$

正确答案选 C, 而 D 显然可取反例 $f(x) = x$.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0, \mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$, 非零向量 α 与 \mathbf{n} 垂直, 则 ()

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
 C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在

解 由于函数 $f(x, y)$ 在 $(x, y) = (0, 0)$ 处可微, 且 $f(0, 0) = 0$ 那么有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 选 A.

4. 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| < R$
 C. $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散 D. $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

解 注意到当 $|r| < R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 那么此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| < +\infty,$$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}|$ 收敛. 也就是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 是绝对收敛的, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 自然也是收敛的, 那么选项 A 的逆否命题正确, 因此正确答案选 A. 对于选项 B 和 C, 如果取 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} \equiv 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 对任意 r 均收敛. 对于选项 D, 如取 $a_n \equiv 1$, 那

么 $R = 1, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 在 $r = R = 1$ 处发散.

5. 若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则 ()
- A. 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$ B. 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$
- C. 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$ D. 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

解 矩阵 A 经初等列变换化成 B 说明存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$, 即 $A = BQ^{-1} = BP$, 选 B, 其他选项易知都不对.

6. 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相

交于一点, 记向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$, 则 ()

- A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示 B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示
- C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示 D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

解 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 α_1, α_2 , 这两条直线交于一点, 说明 α_1, α_2 线性无关. 点 $P_1(a_2, b_2, c_2) \in L_1, P_2(a_3, b_3, c_3) \in L_2$, 由于 L_1, L_2 共面, 所以

$$|\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{P_1P_2}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而 α_1, α_2 线性无关, 因此 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 选 C. 而 α_3 可能是零向量, 因此 A 和 B 均不对.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12},$$

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

解 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) = \frac{7}{12},$$

$$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{B \cup C}) - P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(B \cup C) - [1 - P(A \cup B \cup C)] = P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C)$$

$$= \frac{7}{12} - P(B) - P(C) + P(BC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}B\bar{C}) = \frac{7}{12} - P(A) - P(C) + P(AC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = \frac{7}{12} - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{1}{12},$$

因此 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, 选 D.

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right)$ 的近似值为 ()

A. $1 - \Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1 - \Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$

解 注意到 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right)$, 那么 $EY = 50, DY = 25$, 且由中心极限定理知 $\frac{Y - 50}{5}$ 近似服从标准正态分布, 于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right) = P(Y \leq 55) = P\left(\frac{Y - 50}{5} \leq 1\right) \approx \Phi(1),$$

选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 通分以后利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - (e^x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(1+x)^2} - e^x \right) = -1. \end{aligned}$$

10. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由参数方程求导公式可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \bigg/ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}. \end{aligned}$$

代入 $t = 1$ 可得 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}$.

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 微分方程 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$. 如果 $a > 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0$, 此时方程的通解为

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

如果 $a = 2$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$, 此时方程的通解为

$$f(x) = (C_1 + C_2)e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

如果 $0 < a < 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{4 - a^2}i}{2}$, 特征根的实部分为负, 此时方程的通解为

$$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}x \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

总之一定有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 那么

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -[f'(x) + af(x)] \Big|_0^{+\infty} = n + am.$$

12. 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 令 $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x(xy)^2} \cdot x = x e^{x^2 y^2}$, 于是 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^{x^3 y^2} + 3x^3 y^2 e^{x^3 y^2}$, 代入

$(x, y) = (1, 1)$ 得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 4e$.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1 + a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} a & -1 + a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2 - 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14. 设 X 服从区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

解 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 显然 $E(X) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = E(X \sin X) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$

且 $A > 0$, 所以 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 为极小值点, 且极小值 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$.

16. (本题满分 10 分)

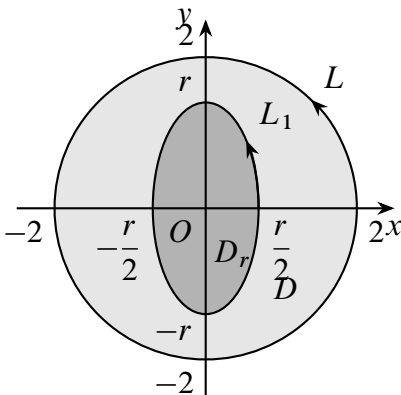
计算曲线积分 $\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

解 令 $P(x, y) = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q(x, y) = \frac{x+y}{4x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} = 0.$$

如图, 取闭曲线 $L_1: 4x^2 + y^2 = r^2$, r 充分小使得 L_1 在 L 所包围的区域内, 方向为逆时针. 设 L 与 L_1 所围成的区域为 D , L_1 所围成的椭圆区域为 D_r , 则利用格林公式, 可知原曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L-L_1} P \, dx + Q \, dy + \int_{L_1} P \, dx + Q \, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy + \int_{L_1} P \, dx + Q \, dy \end{aligned}$$



第 16 题图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r^2} \int_{L_1} (4x - y) dx + (x + y) dy \\
 &= \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} [1 - (-1)] dx dy = \frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r = \pi.
 \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n + 1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

解 方法一 首先有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \right| = 1$, 因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 即当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 现在令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x S'(x) + \frac{1}{2} S(x).
 \end{aligned}$$

因此 $S'(x) - \frac{1}{2(1-x)} S(x) = \frac{1}{1-x}$, 解此一阶线性微分方程得 $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} - 2$.

再由 $S(0) = C - 2 = 0$ 得 $C = 2$, 因此和函数 $S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2, |x| < 1$.

方法二 收敛半径同方法一, 直接求和函数. 注意到

$$a_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{3}{4} a_1 = 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

那么当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^{2n} t \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin^2 t}{1 - x \sin^2 t} \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 - x \sin^2 t} - 1 \right) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + (1-x) \sin^2 t} - 2 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan t)}{1 + (1-x) \tan^2 t} - 2 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan(\sqrt{1-x} \tan t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2. \end{aligned}$$

 提示: 如果熟记麦克劳林级数

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad -1 < x < 1$$

的话, 方法二的计算会更快.

18.(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] \, dy \, dz + [yf(xy) + 2y + x] \, dz \, dx + [zf(xy) + z] \, dx \, dy.$$

解 令 $F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$, 那么

$$F'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad F'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad F'_z = 1.$$

曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为圆环 $D_{xy} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] \, dy \, dz + [yf(xy) + 2y + x] \, dz \, dx + [zf(xy) + z] \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ [xf(xy) + 2x - y] \frac{F'_x}{F'_z} + [yf(xy) + 2y + x] \frac{F'_y}{F'_z} + zf(xy) + z \right\} dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ [xf(xy) + 2x - y] \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + [yf(xy) + 2y + x] \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + zf(xy) + z \right\} dx \, dy \\ &= - \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 dr = \frac{14}{3}\pi.$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;
- (2) 若对任意 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

证 (1) 设 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)| = |f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$, 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x - x_0} \right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \right| = \frac{M}{2 - x_0}.$$

注意到

$$|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2 - x_0} \geq \frac{2M}{\sqrt{x_0(2 - x_0)}} \geq 2M,$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)| \geq M$.

(2) 如果 $M > 0$. 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \geq 1$; $|f'(\xi_2)| = \frac{M}{2 - x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \leq 1$. 于是只能 $x_0 = 1$, 即 $|f(1)| = M$.

$$M = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq \int_0^1 M dx = M,$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)| \equiv M, x \in [0, 1]$. 而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1) = 0$, 因此 $M = 0$, 矛盾. 于是 $M = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 求正交矩阵 Q .

解 (1) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = B, Q$ 为正交矩阵. 因为 A, B

相似, 所以 $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = a + b \\ 1 \times 4 = ab \end{cases}, a \geq b \Rightarrow a = 4, b = 1.$

(2) 易知 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 方程组 $(0E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (2, 1)^T$, 方程组 $(0E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_1 = (1, -2)^T$; 当

$\lambda_2 = 5$ 时, 方程组 $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (1, -2)^T$, 方程组 $(5E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_2 = (2, 1)^T$. 令 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}.$$

所以 $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = (P_1P_2^{-1})^{-1}AP_1P_2^{-1}$, 且

$$P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ¹.

21.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

(1) 证明: P 是可逆矩阵;

(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

解 (1) 由题意 α 是非零向量, $A\alpha \neq k\alpha$, 所以 $A\alpha, \alpha$ 线性无关, 即 $P = (A\alpha, \alpha)$ 为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 B 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 A 的特征值也是 $2, -3$, 所以 A 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明: 随机变量 Y 服从标准正态分布.

解 (1) (X_1, Y) 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X_1 \leq x, Y \leq y) = P(X_1 \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X_3 = 0, X_1 \leq x, Y \leq y) + P(X_3 = 1, X_1 \leq x, Y \leq y) \end{aligned}$$

¹事实上这里的正交矩阵 Q 不是唯一的, 这与 P_1 和 P_2 的取法有关.

$$\begin{aligned}
 &= P(X_3 = 0, X_1 \leq x, X_2 \leq y) + P(X_3 = 1, X_1 \leq x, X_1 \leq y) \\
 &= \frac{1}{2}P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq y) + \frac{1}{2}P(X_1 \leq \min\{x, y\}) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x), & x \leq y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y), & x > y \end{cases}.
 \end{aligned}$$

(2) Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$, 因此 Y 服从标准正态分布.

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

- (1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;
- (2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

解 (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$\begin{aligned}
 P(T > t) &= 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, \\
 P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\
 &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = e^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}.
 \end{aligned}$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \dots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m + n \ln m + (m-1) \ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm \ln \theta$,

令

$$\frac{d \ln(\theta)}{d\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}}$.