2020 届考研数学全真模拟卷(数学一)

命题人 向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a>1$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)=a^x+a^{-x}-2$ 是 x 的 ( )
   (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
   (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$, 令
$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
   则 ( )
   (A) $M<N<P$ (B) $P<M<N$ (C) $P<N<M$ (D) $M<P<N$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x'(0,0)=2, f_y'(0,0)=1$, 则 ( )
   (A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$
   (B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 的一个法向量为 $(2,1,0)$
   (C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 处的一个切向量为 $(2,0,1)$
   (D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 处的一个切向量为 $(0,1,1)$

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则下列级数中一定收敛的是 ( )
   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^3-a_{n+1}^3\right)$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为 n 维列向量, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$, 则 ( )
   (A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性无关

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性相关
(C) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关
(D) 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

6. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 则下列说法错误的是 ( )
(A) 1 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (B) 2 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 (D) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

7. 已知随机事件 A,B 满足 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(B|A)=2$, 则 ( )
(A) $A\subset B$ (B) $B\subset A$ (C) $P(A|\bar{B})=0$ (D) $P(B|\bar{A})=1$

8. 已知随机变量 $X\sim t(n), Y\sim F(1,n)$, 给定 $\alpha\in(0.5,1)$ 时, $P(X<x_\alpha)=\alpha$, 则 $P(Y<x_\alpha^2)=$ ( )
(A) $2\alpha-1$ (B) $\alpha-\dfrac{1}{2}$ (C) α (D) $1-\alpha$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=$________.

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant 0\\ x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$, a_n,b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 则 $a_2=$________.

11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{-\sin x}f(x)\,\mathrm{d}y$ 的积分顺序的结果为________.

12. 已知向量场 $\boldsymbol{A}=(2x-3y,3x-z,y-2x)$, 则 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+2\lambda+1$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1\end{vmatrix}=$________.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$ 为样本均值, $T=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则 $E(\bar{X}^2T)=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）
设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{\mathrm{e}^x-1}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

16.（本题满分 10 分）
设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)\,(x\geqslant 0)$ 连续可导, 且 $f(0)=1$. 现已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

18.（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2-2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中, Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 与 $z=2$ 截下的那部分的外侧.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0)=1$, $F(x)f(x)=\cos 2x$, $a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求出 a_n 的表达式；

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数.

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

21.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 $y=-x^2+2x+3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$；

(2) 求 X,Y 的边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(4) 计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为

$$f(x;\mu,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu\\ 0, & x\leqslant\mu\end{cases}.$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty, 0<\theta<+\infty$ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本.

(1) 求参数 μ,θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1,\hat{\theta}_1$;

(2) 求参数 μ,θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2,\hat{\theta}_2$.