2021 年考研数学一

一、选择题,1 ~ 10 题,每题 5 分,共 50 分.

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处　　(　　)

A. 连续且取极大值　　B. 连续且取极小值

C. 可导且导数等于零　　D. 可导且导数不为零

解　显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}-1}{x}=\frac{1}{2},$$

因此选 D.

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$, $f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$ (　　)

A. $dx+dy$　　B. $dx-dy$　　C. dy　　D. $-dy$

解　分别在题中两个等式中对 x 求导得

$$\begin{cases}f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)\cdot e^x=(x+1)^2+x\cdot 2(x+1)\\ f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x\end{cases}.$$

分别在上述两式中取 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$\begin{cases}f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1\\ f_2'(1,1)+2f_2'(1,1)=2\end{cases},$$

解得 $f_1'(1,1)=0$, $f_2'(1,1)=1$,于是 $dz=dy$,选 C.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$,则　　(　　)

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　B. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

解 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\sin x}{1+x^2} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3),$$

因此 $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$,选 A.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ( )

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$ B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$ D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

解 首先令 $f(x) = 1$ 就可以直接判断选项 A,C,D 均不成立,只有 B 满足. 其次,在定积分的定义

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

中,取 $x_k = \frac{k}{n}$,而 $\xi_k = \frac{2k-1}{2n} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$,就是选项 B.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 - (x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 ( )

A. 2, 0 B. 1, 1 C. 2, 1 D. 1, 2

解 首先令 $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3$,则

$$f(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + y_2^2 - (y_1 - y_2)^2 = 2y_1y_2.$$

再令 $y_1 = z_1 + z_2, y_2 = z_1 - z_2, y_3 = z_3$,则 $2y_1y_2 = 2(z_1+z_2)(z_1-z_2) = 2z_1^2 - 2z_2^2$,选 B.

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - k\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - l_1\boldsymbol{\beta}_1 - l_2\boldsymbol{\beta}_2$,若 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交,则 l_1, l_2 依次为 ( )

A. $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ B. $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

解 这里就是求斯密特正交化的系数,其中

$$k = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)} = \frac{2}{2} = 1, l_1 = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)} = \frac{5}{2}, l_2 = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)} = \frac{1}{2},$$

选 A.

7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,下列不成立的是 ( )

A. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$ B. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$

C. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$ D. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} = 2r(\boldsymbol{A})$

解 对任意矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$,且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$. 于是

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2r(\boldsymbol{A}),$$

选项 A 正确. 对选项 B 和 D,利用分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

初等变换不改变矩阵的秩,于是 B 和 D 都是对的,注意初等变换的左行右列原则,C 是不成立的. 我们给出一个 C 的反例:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

8. 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是 ( )

A. 若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\bar{B})=P(A)$

B. 若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$

C. 若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

D. 若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

解 首先取 $A=B$ 可以直接得出 D 为假命题. 对选项 A, $P(A|B)=P(A)$ 说明 A,B 独立,自然有 $A,\bar{B}$ 也独立,于是 $P(A|\bar{B})=P(A)$. 对选项 B 有

$$\begin{aligned}P(A|B)>P(A)&\Leftrightarrow P(AB)>P(A)P(B)\\&\Leftrightarrow P(A)-P(AB)<P(A)-P(A)P(B)\\&\Leftrightarrow P(A\bar{B})<P(A)P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{B})-P(A\bar{B})>P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{A}\bar{B})>P(\bar{A})P(\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A}).\end{aligned}$$

对选项 C[①]有

$$\begin{aligned}P(A|B)>P(A|\bar{B})&\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}\\&\Leftrightarrow P(AB)P(\bar{B})>P(B)P(A\bar{B})\\&\Leftrightarrow P(AB)\big(1-P(B)\big)>P(B)\big(P(A)-P(AB)\big)\\&\Leftrightarrow P(AB)>P(A)\Leftrightarrow P(A|B)>P(A).\end{aligned}$$

[①]这个选项其实就是 2017 年数学一的第 7 题.

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本,令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$,则 ( )

A. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

B. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

C. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

D. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

解 直接计算得 $E(\hat{\theta})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2$,因此 $\hat{\theta}$ 是 $\theta=\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计,且

$$\begin{aligned}D(\hat{\theta})&=D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})-2\,\mathrm{Cov}(\bar{X},\bar{Y})\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-2\,\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n^2}\cdot n\,\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)\\&=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}-\frac{2}{n}\rho\sigma_1\sigma_2,\end{aligned}$$

选 C.

10.设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本,考虑假设检验问题:$H_0:\mu\leqslant 10,H_1:\mu>10$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geqslant 11\}$,其中 $\bar{X}=\frac{1}{16}X_i$,则 $\mu=11.5$ 时,该检验犯第二类错误的概率为 ( )

A. $1-\Phi(0.5)$ B. $1-\Phi(1)$ C. $1-\Phi(1.5)$ D. $1-\Phi(2)$

解 第二类错误是取伪,也就是在 H_0 为假的情况下我们接受了 H_0. 现在拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geqslant 11\}$,那么接受域为 $\{\bar{X}<11\}$,且 $\mu=11.5$,那么所求的概率为

$$\begin{aligned}P(\bar{X}<11|\mu=11.5)&=P\left(\frac{\sqrt{16}(\bar{X}-11.5)}{2}<\frac{\sqrt{16}(11-11.5)}{2}\right)\\&=P\left(\frac{\sqrt{16}(\bar{X}-11.5)}{2}<-1\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1).\end{aligned}$$

二、填空题,11 ～ 16 题,每题 5 分,共 30 分.

11. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$________.

解 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{4}$.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

解 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(x)}{x'^2(t)}\right|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.

13. 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$________.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$,则 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,进一步,

$$\begin{aligned}y''&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\&=\left(-\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\Big/\mathrm{e}^t\\&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right).\end{aligned}$$

代入原方程得

$$x^2y''+xy'-4y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0,$$

解此二阶常系数线性方程得 $y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}=C_1x^2+\dfrac{x_2}{x^2}$, 结合条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 得 $C_1=1,C_2=0$,于是特解为 $y=x^2$.

14. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)|x^2+4y^2\leqslant 4,0\leqslant z\leqslant 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

解 设 Σ 所包围的区域为 Ω,利用高斯公式及对称性可得

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iiint_\Omega(2x+2y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iiint_\Omega\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\pi\cdot 2=4\pi.\end{aligned}$$

15. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 3 阶矩阵,A_{ij} 为代数余子式,若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 2,且 $|\boldsymbol{A}|=3$,则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$________.

解 记 $\boldsymbol{x}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,由条件得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\Rightarrow 3\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\frac{3}{2}\boldsymbol{x},$$

即 $\boldsymbol{A}^*$ 的每行的和为 $\dfrac{3}{2}$,$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{3}{2}$.

16.甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球,从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒,再从乙盒中任取一球,令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数,则 X 与 Y 的相关系数为________.

解 由题意可得 X,Y 的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

于是 $E(X)=E(Y)=\frac{1}{2}, E(XY)=\frac{3}{10}, D(X)=D(Y)=\frac{1}{4}$,因此

$$\rho_{X,Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题,17 ~ 22 题,共 70 分.

17.(**本题满分** 10 **分**)

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解 注意到当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x = x+o(x^2),\quad \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x+o(x),\quad \mathrm{e}^x-1=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)-(\mathrm{e}^x-1)}{\sin x(\mathrm{e}^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\big(x+o(x^2)\big)\big(1+x+o(x)\big)-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

18.(**本题满分** 12 **分**)

设 $u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解 首先,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=S_1(x)+S_2(x).$$

其中

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1},$$

其收敛域为 $x>0$.

而对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 易知其收敛半径为 1, 且 $x=\pm1$ 时级数也是收敛的. 当 $x\in[0,1)$ 时,

$$\begin{aligned}S_2(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\&=-x\ln(1-x)-\big(-\ln(1-x)-x\big)=x+(1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

由于级数在 $x=1$ 也收敛,从而它在 $x=1$ 处左连续,即 $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=1$.

综上所述,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $(0,1]$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}+x+(1-x)\ln(1-x), & 0<x<1\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}+1, & x=1\end{cases}.$$

19.(**本题满分** 12 **分**)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$,求曲线 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

解 点 (x,y,z) 到 xOy 坐标面的距离就是 $|z|$,所以只需求 z 的取值范围即可,根据条件可得

$$\begin{cases}x^2+2y^2=6+z\\4x+2y=30-z\end{cases},$$

那么由 $(16+2)(x^2+2y^2)\geqslant(4x+2y)^2$ 可得

$$18(6+z)\geqslant(30-z)^2,$$

解得 $12\leqslant z\leqslant66$,且取等条件为 $\dfrac{x^2}{16}=\dfrac{2y^2}{2}$,当 $x=-8,y=-2$ 时,$z=66$,因此所求的最大距离 $(-8,-2,66)$ 到 xOy 面的距离,最大值为 66.

20.(**本题满分** 12 **分**)

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一个平面单连通区域,令 $I(D)=\iint_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,设 $I(D)$ 取得最大值的区域为 D_1.

(1)计算 $I(D_1)$;

(2)计算 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{(x\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4y\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$,其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

解 (1) 首先可知区域 D_1 为 $x^2+y^2\leqslant 4$,于是

$$I(D_1)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r=8\pi.$$

(2) 令

$$P=\frac{x\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2},\ Q=\frac{4y\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}.$$

直接计算可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{8xy\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}(x^2+4y^2-1)+x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}.$$

设曲线 L_1 为 $x^2+4y^2=r^2$,方向为逆时针,r 充分小,使得 L_1 在 D_1 的内部,且设 L_1 与 ∂D_1 所围成的区域为 D_2,L_1 所包围的区域为 D_3,则利用格林公式,可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&=\int_{\partial D_1+L_1^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\&=0+\frac{1}{r^2}\int_{L_1}(x\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4y\,\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{r^2}\iint_{D_3}(-1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{r^2}\cdot(-2)\cdot r\cdot\frac{r}{2}=-\pi.\end{aligned}$$

21.(**本题满分** 12 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$.

(1)求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(2)求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&1\\-1&\lambda-a&1\\1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=\big(\lambda-(a-1)^2\big)\big(\lambda-(a+2)\big)=0,$$

于是 $\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$,解方程组 $\big((a-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个正交的单位特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1).$$

对 $\lambda_3=a+2$,解方程 $\big((a+2)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得一个单位特征向量 $\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a-1&0&0\\0&a-1&0\\0&0&a+2\end{pmatrix}.$$

(2) $(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $4,4,1$,因此

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\big((a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&1\\-1&5&1\\1&1&5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵.

22.(**本题满分** 12 **分**)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点,将该区间分成两段,较短的一段长度记为 X,较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度;

(3)求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

解 (1) 设分成的两段区间长度分别为 X_1,X_2,则

$$X_1+X_2=2,\ X=\min\{X_1,X_2\}=\min\{X_1,2-X_1\},\ Y=2-X,$$

且 $X_1 \sim U(0,2)$. 那么 X 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leqslant x) = P\big(\min\{X_1, 2-X_1\} \leqslant x\big) \\
&= 1 - P\big(\min\{X_1, 2-X_1\} > x\big) \\
&= 1 - P(X_1 > x, 2 - X_1 > x) \\
&= 1 - P(x < X_1 < 2 - x) \\
&= \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - \displaystyle\int_x^{2-x} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

所以 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) $Z = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{2-X}{X}$,注意到 $z = \dfrac{2-x}{x} = \dfrac{2}{x} - 1$ 在 $(0,1)$ 上单调可导,那么利用公式法可得 Z 的概率密度为

$$
f_Z(z) = \begin{cases} f_X\left(\dfrac{2}{z+1}\right) \cdot \dfrac{2}{(z+1)^2} = \dfrac{2}{(z+1)^2}, & z > 1 \\ 0, & z \leqslant 1 \end{cases}.
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{1}{Z}\right) &= \int_1^{+\infty} \frac{2}{z(z+1)^2}\mathrm{d}z \\
&= 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z = 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}
$$