2021 考研数学一模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 题,每题 5 分,共 50 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则下列说法中错误的是 (　　)

A. 如果函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

B. 如果数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$,则函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

C. 如果数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在

D. 函数 $f(x)$ 的间断点必然是跳跃间断点

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则下列说法中正确的是 (　　)

A. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

C. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在

D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

3. 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$,则函数 $f(x,y)=(|x|+|y|)\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 (　　)

A. 可微　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数连续　　D. 偏导数存在但不可微

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则下列是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件的是 (　　)

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$　　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-x^2y}{x^2+y^2}=1$　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 (　　)

A. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

6. 设非零的数列 a_n, b_n 满足 $\mathrm{e}^{a_n} - a_n = \mathrm{e}^{b_n}$,则下列说法中正确的是　(　)

A. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 发散

B. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 绝对收敛

C. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

D. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

7. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t; \boldsymbol{\gamma}$,如果

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),\ r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\gamma})$$

则下列说法中错误的是　(　)

A. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但能被 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$

C. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

D. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是　(　)

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解,则 $m \geqslant n$

B. 如果 $r(A) = m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A}) = n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

9. 设随机变量 $X \sim t(1), Y \sim F(1, n)$,如果 $c > 0$ 使得 $\mathbb{P}(0 < X < c) = \alpha$,则 $\mathbb{P}(Y > c^2) =$ (　)

A. $1 - c$　　B. c　　C. $1 - 2c$　　D. $2c$

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ($n \geqslant 2$) 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本,令 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \beta = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$,则下列说法中错误的是

A. $\dfrac{\alpha^2}{n\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布
B. $\dfrac{\beta}{\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布
C. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 服从 F 分布
D. $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$ 服从 F 分布

二、填空题:11-16 题,每题 5 分,共 30 分。

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos 2x}}=$____________.
12. 极坐标曲线 $r=1+\cos\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 对应的点处的法线方程为____________.
13. 微分方程 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=$____________.
14. 设函数 $f(x)=x-[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,令

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,\ b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x), -\infty<x<+\infty$,则 $S(-5)=$____________.
15. 已知三元方程 $a(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)=1$ 对应的空间曲面为双叶双曲面,则 a 的取值范围是____________.
16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的分布为 $\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{1}{4}, \mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{3}{4}$,则 $\mathbb{P}\big(1\leqslant \min\{X,Y\}<2\big)=$____________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x,f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$,计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.
18. (本题满分 10 分)设平面区域 D_1 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=-1, x=a, y=0$ 所围成,平面区域 D_2 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=a, x=1, y=0$ 所围成,其中 $0<a<1$.
    (1) 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1, D_2 绕直线 $x=a$ 旋转所得旋转体的体积 V_2.
    (2) 求 V_1+V_2 的最小值.
19. (本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且满足
    - $f'(x)>0, f''(x)>0$ 对任意 $x\in[a,b]$ 成立;
    - $f(a)<0, f(b)>0$;

令 $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}, x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$（$n = 1, 2, \cdots$）. 证明：$\{x_n\}$ 收敛到 $f(x)$ 在 (a, b) 上的零点.

20.（本题满分 10 分）设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$，计算二重积分

$$\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

21.（本题满分 15 分）已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1, -5)$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的通解.

22.（本题满分 15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2}|x|\mathrm{e}^{-\lambda|x|}, -\infty < x < +\infty$$

其中未知参数 $\lambda > 0$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 计算 $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$.