2021 考研数学一模拟卷

学校:__________ 姓名:__________ 准考证号:__________

时间:180 分钟　满分:150 分　命题人:向禹

一、选择题:1–10 **题,每题** 5 **分,共** 50 **分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则下列说法中错误的是 (　　)

A. 如果函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$

B. 如果数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$,则函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

C. 如果数列 $x_n\to x_0$ 且 $x_n\neq x_0$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在

D. 函数 $f(x)$ 的间断点必然是跳跃间断点

答案　C

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则下列说法中正确的是 (　　)

A. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

C. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在

D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

答案　B

3. 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续且 $\varphi(0,0)=0$,则函数 $f(x,y)=(|x|+|y|)\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处 (　　)

A. 可微　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数连续　　D. 偏导数存在但不可微

答案　A

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则下列是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件的是 (　　)

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$　　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-x^2y}{x^2+y^2}=1$　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$

答案　C

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续,则累次积分 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x-1}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 (　　)

A. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{y+1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \mathrm{d}x$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

答案 C

6. 设非零的数列 a_n, b_n 满足 $\mathrm{e}^{a_n} - a_n = \mathrm{e}^{b_n}$,则下列说法中正确的是 ( )

A. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 发散

B. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 绝对收敛

C. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

D. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

答案 B,注意到 $\mathrm{e}^{b_n} - 1 \sim b_n, \mathrm{e}^{a_n} - a_n - 1 \sim \frac{1}{2}a_n^2$ 即可.

7. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t; \boldsymbol{\gamma}$,如果

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t),\ r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\gamma})$$

则下列说法中错误的是 ( )

A. 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,但能被 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示

B. $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$

C. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关

D. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

答案 C

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,则下列说法中错误的是 ( )

A. 如果对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解,则 $m \geqslant n$

B. 如果 $r(A) = m$,则对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

C. 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 有解

D. 如果 $r(\boldsymbol{A}) = n$,则对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{b}$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解

答案　A

9. 设随机变量 $X \sim t(1), Y \sim F(1,n)$,如果 $c>0$ 使得 $\mathbb{P}(0<X<c)=\alpha$,则 $\mathbb{P}(Y>c^2)=$ (　)

A. $1-c$　　B. c　　C. $1-2c$　　D. $2c$

答案　C

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（$n \geqslant 2$）是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $\alpha=\sum_{i=1}^{n} X_i, \beta=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$,则下列说法中错误的是

A. $\dfrac{\alpha^2}{n\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布　　B. $\dfrac{\beta}{\sigma^2}$ 服从 χ^2 分布

C. $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 服从 F 分布　　D. $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)^2}$ 服从 F 分布

答案　C. 注意 C 中分子分母不独立,D 中利用二维正态分布的独立性等价于协方差为零可知 D 的分子分母独立.

二、填空题:11-16 **题,每题** 5 **分,共** 30 **分。**

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f'(0)=1$,则 $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(1-\cos x)}{1-\sqrt{\cos 2x}}=$____________.

答案　$\dfrac{1}{2}$.

12. 极坐标曲线 $r=1+\cos\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 对应的点处的法线方程为____________.

答案　注意到参数方程为 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta, y=(1+\cos\theta)\sin\theta$,对应的切线斜率为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=0$,法线方程为 $x=\dfrac{3}{4}$.

13. 微分方程 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=$____________.

答案　$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-2x}$.

14. 设函数 $f(x)=x-[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,令

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,\ b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x), -\infty<x<+\infty$,则 $S(-5)=$____________.

答案　$S(-5)=S(1)=\dfrac{f(1^+)+f(1^-)}{2}-\dfrac{a_0}{2}=0$.

15. 已知三元方程 $a(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)=1$ 对应的空间曲面为双叶双曲面,则 a 的取值范围是____________.

答案 特征值两负一正,a 的范围是 $(-2,1)$.

16. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的分布为 $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y=2)=\frac{3}{4}$,则 $\mathbb{P}\big(1\leqslant\min\{X,Y\}<2\big)=$____________.

答案 $\mathbb{P}(Y=1,X\geqslant 1)+\mathbb{P}(Y=2,1<X<2)=\mathrm{e}^{-1}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=1$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(x,f(x)\big)$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$,计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(u(x)\big)}{f(x)}$.

解 只需注意到 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim\frac{1}{2}x^2$. $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\sim\frac{1}{2}x$,答案为 $\frac{1}{4}$.

18. (本题满分 10 分)设平面区域 D_1 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=-1, x=a, y=0$ 所围成,平面区域 D_2 由曲线 $y=|x|$,直线 $x=a, x=1, y=0$ 所围成,其中 $0<a<1$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1, D_2 绕直线 $x=a$ 旋转所得旋转体的体积 V_2.

(2) 求 V_1+V_2 的最小值.

解

(1)

$$V_1=\pi\int_{-1}^{a}|x|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}(a^3+1),\ V_2=2\pi\int_a^1|x|(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi-\pi a+\frac{\pi}{3}a^3.$$

(2) $V(a)=V_1+V_2=\dfrac{2\pi}{3}a^3-\pi a+\pi$, $V'(a)=2\pi a^2-\pi$, 可知 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取最小值 $\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

19. (本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且满足

- $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ 对任意 $x\in[a,b]$ 成立;
- $f(a)<0$, $f(b)>0$;

令 $x_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($n=1,2,\cdots$). 证明:$\{x_n\}$ 收敛到 $f(x)$ 在 (a,b) 上的零点.

证明 首先由 $f(a)<0$, $f(b)>0$, 根据零点定理知存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f'(c)=0$. 再

由 $f'(x) > 0$, 说明 $f(x)$ 单调递增, 因此这个零点 c 是唯一的. 下面用数学归纳法证明 $c < x_{n+1} < x_n < b$.

(1) $n = 1$ 时,$x_1 < b$. 由于 $f''(x) > 0$,则 $f'(x)$ 单调递增,于是

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b - \frac{f(b) - f(c)}{f'(b)} = b - \frac{f'(\xi)(b-c)}{f'(b)} > b - \frac{f'(b)(b-c)}{f'(b)} = c,$$

其中 $\xi \in (c, b)$. 所以 $f(x_1) > f(c) = 0, x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1$,且

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) - f(c)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f'(\xi_1)(x_1 - c)}{f'(x_1)} > x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - c)}{f'(x_1)} = c,$$

其中 $\xi_1 \in (c, x_1)$.

(2) 假设当 $n = k - 1$ 时,$c < x_k < x_{k-1} < b$.

(3) 则当 $n = k$ 时,与 (1) 类似,即可证明 $c < x_{k+1} < x_k < b$.

因此由数学归纳法可知 $c < x_{n+1} < x_n < b$ 对任意 n 都成立. 于是 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geqslant c$. 在递推式 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 中令 $n \to \infty$ 得到 $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$,于是 $f(a) = 0 \Rightarrow a = c$,证毕.

20.(本题满分 10 分)设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$,计算二重积分

$$\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (r\cos\theta \cdot f'_x + r\sin\theta \cdot f'_y) r\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (r\cos\theta \cdot f'_x + r\sin\theta \cdot f'_y)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

记 L_r 是半径为 r 的圆周, D_r 是 L_r 所包围的区域. 注意到 $r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}y, r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}x$. 于是内层的积分可以看作是沿闭曲线 L_r(逆时针方向)的曲线积分 $\oint_{L_r} -f'_y\,\mathrm{d}x + f'_x\,\mathrm{d}y$,于是

$$\int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} (r\cos\theta \cdot f'_x + r\sin\theta \cdot f'_y)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r \left(\oint_{L_r} -f'_y\,\mathrm{d}x + f'_x\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 r\left(\iint\limits_{D_r} (f''_{xx} + f''_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r s^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

21.(本题满分 15 分)已知 1 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且

$$
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}.
$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1, -5)$,求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

(3) 设向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,求方程 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的通解.

解

(1) $\lambda_1 = 0, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 = k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}}, k_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 2, k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_2(2,-2,1)^{\mathrm{T}}, k_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 1, k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = k_3(2,1,-2)^{\mathrm{T}}, k_3 \neq 0$.

(2) 注意到 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$,则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - 2^n\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3)

$$
\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}
$$

$3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = (2x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 = 0$,于是

$$
\begin{cases}2x_1 - x_2 = 0\\ x_2 - x_3 = 0\end{cases}.
$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = k(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

22.(本题满分 15 分)设总体 X 的概率密度为

$$
f(x) = \frac{\lambda^2}{2}|x|\mathrm{e}^{-\lambda|x|},\ -\infty < x < +\infty
$$

其中未知参数 $\lambda > 0$,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 计算 $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)$.

解

(1) 注意到

$$\mathbb{E}(X)=0,\mathbb{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^2}{2}|x|^3\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{\lambda^2},$$

令 $\mathbb{E}(X^2)=\dfrac{6}{\lambda^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2$,可得矩估计量 $\hat{\lambda}_1=\sqrt{\dfrac{6n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$.

(2) 设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 对应的观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^2}{2}|x_i|\mathrm{e}^{-\lambda|x_i|}=\frac{\lambda^{2n}}{2^n}|x_1\cdots x_n|\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|},$$

取对数得

$$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda-n\ln 2+\ln|x_1x_2\cdots x_n|-\lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\big(\ln L(\lambda)\big)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0\Longrightarrow\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}.$$

即最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}$.

(3)

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2}\right)=\frac{1}{6n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{6}\mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{\lambda^2}.$$