目录

第 1 章 2019 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

✎ **解:** 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

A. 可导点, 极值点　　B. 不可导点, 极值点

C. 可导点, 非极值点　　D. 不可导点, 非极值点

✎ **解:** $\lim\limits_{x\to 0^-} x|x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 且当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时, $f(x) < 0 = f(0)$, 因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 而极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ 不存在, 因此不可导, 选 B.

3. 设 u_n 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

✎ **解:** 正确答案选 D. 因为 u_n 单调递增有界, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 存在, D 选项级数的部分和数列收敛, 因此级数收敛. A 和 B 中只要 $a \neq 0$ 就发散. C 中可取反例 $u_n = -\dfrac{1}{n}$, 则 $1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, 调和级数发散.

4. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 ( )

A. $y - \dfrac{x^2}{y}$　　B. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}$　　C. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$　　D. $x - \dfrac{1}{y}$

✎ **解:** 由题意, 应当选择函数 $P(x, y)$ 使得在整个上半平面上均有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$ 成立, 选 D(注意 C 选项在 y 轴上偏导数不存在).

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　　C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i1}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

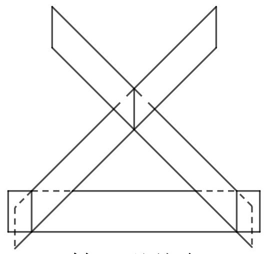
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

B. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

C. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

D. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$



第 6 题图

✎ **解:** 令 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$, 由于三个平面无交点, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解. 即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant 3$. 再根据任意两个平面都不重合或平行, 可知 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行线性无关, 因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此只能是 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 选 A.

7. 设 A,B 为随机事件, 则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ D. $P(AB)=P(\overline{AB})$

✎ **解:** 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\overline{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ ( )

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ,σ^2 都有关 D. 与 μ,σ^2 都无关

✎ **解:** 由条件可知 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$\begin{aligned}P\{|X-Y|<1\}&=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1,\end{aligned}$$

此概率与 μ 无关, 而与 σ^2 有关, 选 A.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

✎ **解:** 首先 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x f'(\sin y-\sin x)+y, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y f'(\sin y-\sin x)+x$, 因此 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$__________.

✎ **解:** 方程变量分离可得 $\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$, 两边积分得 $y^2+2=C\mathrm{e}^x$. 由 $y(0)=1$ 可知 $C=3$, 方程的解为 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$(注意初值条件, 要舍去负的解).

11.幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)$=________.

✎ **解:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}=\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

12.设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

✎ **解:**Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$, 因此

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D}|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ________.

✎ **解:** 由条件可知 $\boldsymbol{A}$ 有且只有两个线性无关的列向量, 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbb{R}$.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P(F(X)>E(X)-1)=$________.

✎ **解:** 首先 $E(X)=\displaystyle\int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. 再令 $Y=F(X)$, 则当 $y\leqslant 0$ 时, $P(Y\leqslant y)=0$; 当 $y\geqslant 1$ 时, $P(Y\leqslant y)=1$(注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0<y<1$ 时, $P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(X\leqslant F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$. 因此 $Y=F(X)\sim U(0,1)$, $P(F(X)>E(X)-1)=P\left(Y>\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 10 分**)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

✎ **解:**

(1) 由条件可得 $\left(y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)'=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(y'+xy\right)=1$, 于是 $y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}=x+C$. 由 $y(0)=0$ 可知 $C=0, y=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 计算可得 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2), y''=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(x^3-3x)$, 令 $y''=0$ 得 $x=0,\pm\sqrt{3}$. 再根据二阶导数的符号可得凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$. 拐点为 $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$

16.(**本题满分 10 分**)

设 a,b 为实数, 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a,b;

(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2 (z\geqslant 0)$ 的面积.

✎ **解:**

(1) 多元函数在一点处方向导数的最大值是沿着梯度方向的方向导数, 且最大值等于梯度的模. 由条件可得 $\mathbf{grad}\, z=(2ax,2by)$, 于是 $\mathbf{grad}\, z\big|_{(3,4)}=(6a,8b)$, 因此 $\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}$ 且 $a,b<0$, 解得 $a=b$. 再由 $10=\sqrt{(6a)^2+(8b)^2}$ 可得 $a=b=-1$

(2) 曲面 $z=2-x^2-y^2$ 在 xOy 面的投影区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$, 则曲面的面积为

$$
\begin{aligned}
S&=\iint\limits_D\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=\frac{13}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

17.(**本题满分 10 分**)

☞求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x (x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

✎ **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}\left|\sin(n\pi+t)\right|\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}
\end{aligned}
$$

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

$$= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}.$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

18.(**本题满分 10 分**)

☞设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

✎ **解:**

(1) 当 $0 < x < 1$ 时, $x^n \sqrt{1-x^2} > x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}\left(x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\left(x^2-1\right)+x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} \mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{n-1}{n+1} a_{n-2},
\end{aligned}$$

因此 $\frac{n+2}{n+1} a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \, (n = 2,3,\cdots)$.

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

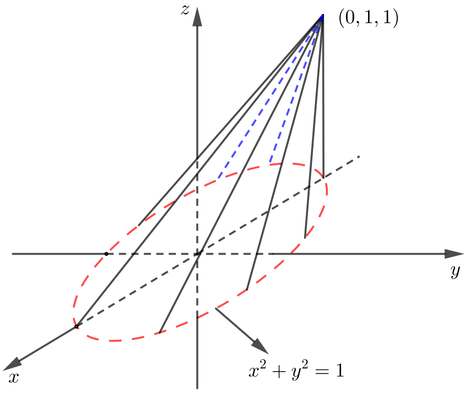
19.(**本题满分 10 分**)

设 Ω 是锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

✎ **解:**

☞此题源自1993 年北京师范大学数学分析考研题

这题并不是一般的圆锥面, 为此我们给出锥面的一般定义: 过定点 V 的动直线 L 沿着一条确定的曲线 Γ 移动所形成的曲面 S 叫做锥面. 直线 L 称为 S 的母线, 曲线 Γ 称为 S 的准线, 而定点 V 则是 S 的顶点. 在本题中, 锥面与 xOy 面的交线 $x^2+y^2=1, z=0$ 就是母线, 顶点则是 $(0,1,1)$, 如右图. 此锥面在 xOy 面的投影区域就是 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 因此这题我们采用切片法 (先二后一) 计算.



第 19 题图

设形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 面对称的, 由对称性可知 $\overline{x}=0$. 对固定的 z, 记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\}$, 利用切片法可得

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}.$$

其中积分 $\iint\limits_{D_z}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中, 令 $y-z=u, \mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, 则

$$\iint\limits_{D_z}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}(u+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u=\pi z(1-z)^2.$$

因此利用形心坐标公式得 $\overline{y}=\overline{z}=\dfrac{\pi/12}{\pi/3}=\dfrac{1}{4}$, 形心坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20.(**本题满分 11 分**)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a,b,c;

(2) 证明: $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

✎ **解:**

(1) 由题意可知 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{cases}b+c+1=1\\2b+3c+a=1\\b+2c+3=1\end{cases},$$

解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(2) 由于 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}) = 3$, 这说明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 再由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21.(**本题满分 11 分**)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

✎ **解:**

(1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-8=-2y \\ -2+x-2=2-1+y \end{cases},$$

解得 $x=3, y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 $2,-1,-2$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1 = \operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则

$P_2^{-1}AP_2=\mathrm{diag}\{2,-1,-2\}$. 故 $P_1^{-1}BP_1=P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1})=B$, 因此当取 $P=P_2P_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$ 时, 则有 $P^{-1}AP=B$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p, P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

✎ **解:**

(1) X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 由 X,Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(XY\leqslant z|Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\leqslant z|Y=1)P(Y=1)\\&=pP(-X\leqslant z|Y=-1)+(1-p)P(X\leqslant z|Y=1)\\&=pP(X\geqslant -z)+(1-p)P(X\leqslant z)\\&=p(1-F_X(-z))+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ 1+(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$

(2) 由条件可得 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=1-2p$, 因此当 $p=\frac{1}{2}$ 时, $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$, 即 $\rho_{XZ}=0$. 因此 $p=\frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p\neq\frac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p=\frac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\subset\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)\neq P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

因此对任意 $p\in(0,1)$, X,Z 不独立.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

✎ **解:**

(1) 由概率密度的归一性可知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2\cdots,x_n\geqslant\mu\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu$ 时, 取对数 $\ln L\left(\sigma^2\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L\left(\sigma^2\right)}{\mathrm{d}\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right]=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0$$

解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

第 2 章 2019 年考研数学二

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

✎ **解:** 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 ( )

   A. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $(0, 2)$　　C. $(\pi, -2)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$

✎ **解:** 先求二阶导数, $y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x$, $y'' = \cos x + \cos x - x\sin x - 2\cos x = -x\sin x$, 令 $y'' = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = \pi$. 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$ 时 $y'' < 0$, 当 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 时 $y'' > 0$. 因此 $(0, 2)$ 不是拐点, $(\pi, -2)$ 是拐点, 选 C.

3. 下列反常积分发散的是 ( )

   A. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

   C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

✎ **解:** 因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$, D 选项是发散的, 其他的都收敛.

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为 ( )

   A. 1, 0, 1　　B. 1, 0, 2　　C. 2, 1, 3　　D. 2, 1, 4

✎ **解:** 从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 所以 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = \mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = c\mathrm{e}^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.

5. 已知平面区域 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x| + |y| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, 记

$$I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3 = \iint\limits_D \left(1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

   则 I_1, I_2, I_3 的大小关系为 ( )

   A. $I_3 < I_2 < I_1$　　B. $I_2 < I_1 < I_3$　　C. $I_1 < I_2 < I_3$　　D. $I_2 < I_3 < I_1$

✎ **解:** 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ 上有 $x^2+y^2\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$. 首先显然 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, 故 $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 等号只在边界成立, 故 $I_1<I_2$. 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则 $1-\cos u-\sin u=1-\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$, 等号只在 $u=0$ 和 $u=\frac{\pi}{2}$ 成立, 因此 $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 即 $I_2>I_3$, 选 A.

6. 已知 $f(x),g(x)$ 的二阶导函数在 $x=a$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等的 ( )

A. 充分非必要条件　　B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

✎ **解:** 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$, 则当 $x\to a$ 时,$f(x)-g(x)=o((x-a)^2)$ 利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\sum_{k=0}^{2}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^k\\&=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^2+o(x-a)^2,\end{aligned}$$

于是有 $f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a)=0,k=0,1,2$. 因此曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切, 且由曲率公式 $K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$ 可知对应的曲率也相等, 充分性成立.

反之, 如果两曲线在 $x=a$ 对应的点处有相同的切线, 则 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a)$. 再由两者在这一点的曲率相等有 $\frac{|f''(a)|}{\left(1+f'^2(a)\right)^{3/2}}=\frac{|g''(a)|}{\left(1+g'^2(a)\right)^{3/2}}$, 因此 $f''(a)=\pm g''(a)$. 当 $f''(a)=-g''(a)\neq 0$ 时, 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=f''(a)\neq 0.$$

因此必要性不成立, 选 A.

注: 本题还是有一定难度的, 且在此题中有几个值得注意的地方:

- 本题中只需要 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导即可, 并不需要二阶导数连续.
- 对于必要性的否定, 可以直接举反例 $a=0,f(x)=x^2,g(x)=-x^2$ 即可.
- 在充分性的推导中, 切勿乱用洛必达法则. 如果要用, 应当这么使用: 为方便, 我们记 $h(x)=f(x)-g(x)$. 由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}=0$ 可知 $h(a)=0$, 且

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}(x-a)=0.$$

由于 $h''(a)$ 是存在的, 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{h'(x)-h'(a)}{x-a}=\frac{h''(a)}{2}=0.$$

这里必须先用定义求出 $h'(a)=0$, 再用洛必达法则求出 $h''(a)=0$(为什么?).

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$, 因此 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________.

✎ **解:** 先取对数用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(x+2^x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=2+2\ln 2$, 故原极限为 $4\mathrm{e}^2$.

10.曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线在 y 轴的截距为________.

✎ **解:** $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 所对应的点是 $\left(\dfrac{3}{2}\pi+1,1\right)$, 该点处切线的斜率为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=\left.\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=-1$. 该点处切线方程为 $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$, 它在 y 轴上的截距为 $\dfrac{3}{2}\pi+2$.

11.设函数 $f(u)$ 可导, $z=f\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

✎ **解:** 直接计算得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=-\dfrac{y^3}{x^2}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f\left(\dfrac{y^2}{x}\right)+yf'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\dfrac{2y}{x}$.
因此 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x\left(-\dfrac{y^3}{x^2}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\right)+y\left(f\left(\dfrac{y^2}{x}\right)+yf'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\dfrac{2y}{x}\right)=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$.

12.曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为________.

✎ **解:** 由 $y=\ln\cos x$ 得 $y'=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$, 于是曲线的弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\ln 3}{2}.$$

13.已知函数 $f(x)=x\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_x^1\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\int_0^t x\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1 t^2\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1 t\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{\cos 1-1}{4}.\end{aligned}$$

14.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式, 则 $A_{11}-A_{12}=$________.

✎ **解:** 直接计算可得 $A_{11}-A_{12}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-2&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&-1&1\\3&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=-4.$

三、解答题, 15 ∼ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ xe^x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

✎ **解:** 首先有 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=1=f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}(x\mathrm{e}^x+1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. 而在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 于是 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2+2\ln x), & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$. 当 $x<-1$ 或 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)<0$, 而当 $-1<x<0$ 或 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)>0$. 于是结合单调性可知 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ 和 $f(-1)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是极小值, $f(0)=1$ 是极大值.

16.(**本题满分 10 分**)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

✎ **解:** 利用待定系数法可得

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} = -\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+6}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x &= -2\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+3\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\\ &= -2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}\left(x^2+x+1\right)\\ &= -2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln\left(x^2+x+1\right)+C.\end{aligned}$$

17.(**本题满分 10 分**)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

✎ **解:**

(1) 由条件可得 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y\right)'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(y'-xy\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y=\sqrt{x}+C$. 再由 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 可知 $C=0$, 因此 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}\right).$$

18.(**本题满分 10 分**)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant y,\left(x^2+y^2\right)^3\leqslant y^4\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 区域 D 关于 y 轴对称, 把它化为极坐标形式, $|x|\leqslant y$ 即 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$. $(x^2+y^2)^3\leqslant y^4$ 就是 $r^6\leqslant r^4\sin^4\theta, r\leqslant\sin^2\theta$. 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\theta\right)^2 \mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= -\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{43}{120}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

19.(**本题满分 10 分**)

☞设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积, 求 S_n, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

✎ **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(k\pi+t)}|\sin(k\pi+t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-n\pi}\right).
\end{aligned}
$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$, 最后极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}$.

20.(**本题满分 11 分**)

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值, 使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

✎ **解:** 由 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+av(x,y)\,\mathrm{e}^{ax+by},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+bv(x,y)\,\mathrm{e}^{ax+by}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ax+by}+a\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+a\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+av(x,y)\,\mathrm{e}^{ax+by}\right) \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by}+a^2v(x,y)\,\mathrm{e}^{ax+by}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{e}^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by}+b^2v(x,y)\,\mathrm{e}^{ax+by}.
\end{aligned}
$$

将上述式子代入 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 整理可得

$$
\mathrm{e}^{ax+by}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(2a^2-2b^2+3a+3b\right)v\right)=0.
$$

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

依题意有 $\begin{cases} 4a+3=0 \\ 3-4b=0 \end{cases}$, 因此 $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

21.(**本题满分 11 分**)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

✎ **解:**

(1) 由积分中值定理知存在 $\zeta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\zeta)=1=f(1)$, 于是由罗尔定理知存在 $\xi\in(\zeta,1)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) ☞考虑函数 $F(x)=f(x)+3x^3-4x$, 首先有 $F(0)=F(1)=0$ 且

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)+3x^2-4x\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\left(3x^2-4x\right)\mathrm{d}x=0.$$

由积分中值定理可知存在 $\eta_1\in(0,1)$ 使得 $F(\eta_1)=0$. 因此由罗尔定理知存在 $\eta_2\in(0,\eta_1),\eta_3\in(\eta_1,1)$ 使得 $F'(\eta_2)=F'(\eta_3)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta\in(\eta_2,\eta_3)\subset(0,1)$ 使得 $F''(\eta)=f''(\eta)+6=0$, 从而 $f''(\eta)=-6<-2$, 证毕.

注: 这个证法恰到好处的地方在于当我们取 $f(x)=4x-3x^2$ 时, $f(x)$ 刚好满足条件, 且 $f''(x)\equiv-6$, 这个例子说明 $f''(x)$ 能够保证取到的最小值就是 -6. 至于如何构造出这个例子, 只需要待定一组系数 a,b,c 使得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可.

22.(**本题满分 11 分**)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

☞这里的证法由我的朋友曾熊给出

✎ **解:** 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 由于向量组向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$. 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})&=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)\\&\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&4&a^2-5&a-1&-7-a&a^2-9\end{array}\right)\\&\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right).\end{aligned}$$

因此当 $a=1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=2$, 两个向量组等价. 当 $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a\neq\pm1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a\neq-1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 当 $a=1$ 时, 由初等行变换得 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

解得 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3, k\in\mathbb{R}$.

当 $a\neq\pm1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$, 此时有 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

23.(**本题满分 11 分**) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

✎ **解:**

(1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\\\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-8=-2y\\-2+x-2=2-1+y\end{cases},$$

解得 $x=3, y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 A,B 的特征值均为 $2,-1,-2$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}\{2,-1,-2\}$. 故 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\Rightarrow(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B}$, 因此当取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$ 时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

第 3 章 2019 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

✎ **解:** 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty, -4)$　　B. $(4, +\infty)$　　C. $\{-4, 4\}$　　D. $(-4, 4)$

✎ **解:** 令 $f(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \pm 1$. 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$. 因此有极大值 $f(-1) = 4 + k$, 极小值 $f(1) = k - 4$, 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 要想原方程有 3 个不同的实根, 则有 $f(-1) > 0, f(1) < 0$, 解得 $-4 < k < 4$, 选 D.

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为 ( )

A. 1, 0, 1　　B. 1, 0, 2　　C. 2, 1, 3　　D. 2, 1, 4

✎ **解:** 从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 因此 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = \mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = c\mathrm{e}^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

✎ **解:** 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 故它的通项趋于零, 则存在 $M > 0$ 使得 $\left|\dfrac{v_n}{n}\right| \leqslant M$, 因此 $|u_n v_n| = \left|n u_n \cdot \dfrac{v_n}{n}\right| \leqslant M|n u_n|$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛, 选 B. 对于 A 和 C 选项, 反例取 $u_n = \dfrac{1}{n^3}, v_n = (-1)^n$; 对于 D 选项, 反例取 $u_n = \dfrac{1}{n^3}, v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*) =$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

✎ **解:** 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$, 因此 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为 (　)

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

7. 设 A,B 为随机事件, 则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 (　)

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{AB})$

✎ **解:** 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\overline{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ (　)

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关　　B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ,σ^2 都有关　　D. 与 μ,σ^2 都无关

✎ **解:** 由条件可知 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$\begin{aligned}P\{|X-Y|<1\}&=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1,\end{aligned}$$

此概率与 μ 无关, 与 σ^2 有关, 选 A.

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n=$________.

✎ **解:** 首先 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$, 因此原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$.

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为________.

✎ **解:** 先求二阶导数, $y'=\sin x+x\cos x-2\sin x$, $y''=\cos x+\cos x-x\sin x-2\cos x=-x\sin x$, 令 $y''=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=\pi$. 当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\pi$ 时 $y''<0$, 当 $\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$ 时 $y''>0$. 因此 $(0,2)$ 不是拐点, $(\pi,-2)$ 是拐点.

11.已知 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x =$________.

✎ **解:** 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\int_0^t x^2\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t = -\frac{1}{18}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1-2\sqrt{2}}{18}.\end{aligned}$$

12.以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA} > 0)$ 为________.

✎ **解:** 由需求弹性公式可得

$$\eta_{AA} = \left|\frac{P_A}{P_B}\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\right| = \left|\frac{P_A}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}(-2P_A-P_B)\right| = \frac{P_A(2P_A+P_B)}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2},$$

代入 $P_A = 10, P_B = 20$ 得 $\eta_{AA} = 0.4$.

13.已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $a =$________.

✎ **解:** 对增广矩阵作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right),$$

因此当 $a = 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = 2 < 3$, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P(F(X) > E(X) - 1) =$________.

✎ **解:** 首先 $E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$. 再令 $Y = F(X)$, 则当 $y \leqslant 0$ 时, $P(Y \leqslant y) = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时, $P(Y \leqslant y) = 1$(注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0 < y < 1$ 时, $P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y) = P(X \leqslant F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$. 因此 $Y = F(X) \sim U(0,1)$, $P(F(X) > E(X) - 1) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X) \sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^{x}+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

✎ **解:** 首先有 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x}=1=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\mathrm{e}^x+1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. 而在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 于是 $f'(x)=\begin{cases} x^{2x}(2+2\ln x), & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0 \end{cases}$. 当 $x<-1$ 或 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)<0$, 当 $-1<x<0$ 或 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)>0$. 由单调性可知 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ 和 $f(-1)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是极小值, $f(0)=1$ 是极大值.

16.(**本题满分 10 分**)

已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

✎ **解:** 直接计算可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'-f_2',\ \frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'+f_2',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{11}''+f_{12}''-f_{21}''+f_{22}''=1-f_{11}''+f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''.$$

代入即可得 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)$.

17.(**本题满分 10 分**)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

✎ **解:**

(1) 由条件可得 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(y'-xy\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x}+C$. 再由 $y(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$ 可知 $C=0$, 因此 $y = \sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}\right).$$

18.(**本题满分 10 分**)

☞求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

✎ **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}|\sin(n\pi+t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}.
\end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

19.(**本题满分 10 分**)

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

✎ **解:**

(1) 当 $0<x<1$ 时, $x^n\sqrt{1-x^2} > x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n\left(x^2-1\right)+x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n+1}a_n - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n+1}a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{n-1}{n+1}a_{n-2},
\end{aligned}
$$

因此 $\frac{n+2}{n+1}a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n = 2,3,\cdots)$.

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

20.(**本题满分 11 分**)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

✎ **解:** 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 由于向量组向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$. 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) &= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2-5 & a-1 & -7-a & a^2-9 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

因此当 $a = 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = 2$, 两个向量组等价. 当 $a = -1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = 2 \neq r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = 3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a \neq \pm 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a \neq -1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 当 $a = 1$ 时, 由初等行变换得 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

解得 $\boldsymbol{\beta}_3 = (3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3, k \in \mathbb{R}$.

当 $a \neq \pm 1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, 此时有 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(**本题满分 11 分**) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

✎ **解:**

(1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases},$$

解得 $x = 3, y = -2$.

(2) B 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 $2, -1, -2$.

对矩阵 B, 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 由方程 $(2E - B)x = 0$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$;
当 $\lambda_2 = -1$ 时, 由方程 $(-E - B)x = 0$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_2 = (-1, 3, 0)^T$;
当 $\lambda_3 = -2$ 时, 由方程 $(-2E - B)x = 0$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$.

取 $P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P_1^{-1}BP_1 = \operatorname{diag}\{2, -1, -2\}$.

同理对矩阵 A, 我们也可以求出一组线性无关的特征向量, 取 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $P_2^{-1}AP_2 = \operatorname{diag}\{2, -1, -2\}$. 故 $P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B$, 因此当取 $P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 时, 则有 $P^{-1}AP = B$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p(0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

✎ **解:**

(1) X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 由 X,Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(XY\leqslant z|Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\leqslant z|Y=1)P(Y=1)\\&=pP(-X\leqslant z|Y=-1)+(1-p)P(X\leqslant z|Y=1)\\&=pP(X\geqslant -z)+(1-p)P(X\leqslant z)\\&=p(1-F_X(-z))+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^z, & z\leqslant 0\\ 1+(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^z, & z\leqslant 0\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$

(2) 由条件可得 $\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=1-2p$, 因此当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$, 即 $\rho_{XZ}=0$. 因此 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}\subset\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)\neq P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

因此对任意 $p\in(0,1)$, X,Z 不独立.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

✎ **解:**

(1) 由概率密度的归一性可知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 对应的观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2 \cdots, x_n \geqslant \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant \mu$ 时, 取对数 $\ln L\left(\sigma^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\ln \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} - \dfrac{1}{2} \ln \sigma^2 - \dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令

$$\frac{\mathrm{d} \ln L\left(\sigma^2\right)}{\mathrm{d} \sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

解得 $\sigma^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$.