2020 年考研数学二

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt$ B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} \, dt$

✎ **解:** 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)}{g(t)}=1$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

于是当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt \sim \int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt \sim \int_0^x \sqrt{t^3}\,dt=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2\,dt \sim \int_0^{\sin x} t^2\,dt=\frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5,$$

正确答案选 D.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

✎ **解:** 显然, 所有的间断点为 $x=-1,0,1,2$, 其中 $x=-1,1,2$ 都是无穷间断点, 而 $x=0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=$ ( )

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$ B. $\dfrac{\pi^2}{8}$ C. $\dfrac{\pi}{4}$ D. $\dfrac{\pi}{8}$

✎ **解:** 令 $t=\arcsin\sqrt{x}$, 则 $x=\sin^2 t$,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt=\frac{\pi^2}{4},$$

选 A.

4. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 则当 $n\geqslant 3$ 时, $f^{(n)}(0)=$ (　)

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$　　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

✎ **解:** 方法一　由莱布尼茨公式得

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (x^2)^{(n-k)}[\ln(1-x)]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_n^k (x^2)^{(k)}[\ln(1-x)]^{(n-k)} \\
&= x^2\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} + \mathrm{C}_n^1 x\frac{-(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} + 2\mathrm{C}_n^2\frac{-(n-3)!}{(1-x)^{n-2}},
\end{aligned}
$$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0)=-2\mathrm{C}_n^2(n-3)!=-n(n-1)(n-3)!=-\dfrac{n!}{n-2}$, 选 A.

方法二　利用函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式系数的唯一性, 得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\ln(1-x) = x^2\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n-2}+o\left(x^{n-2}\right)\right) \\
&= -x^3-\frac{x^4}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n-2}+o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n),
\end{aligned}
$$

那么由对应项系数相等可得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\dfrac{1}{n-2}$, 所以 $f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$, 选 A.

5. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$,给出下列结论:

(1) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$;　　(2) $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$;　　(4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数为 (　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

✎ **解:** 直接计算可得

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.
$$

所以 (1) 正确. 当 $xy\neq 0$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$, 那么

$$
\lim_{y\to 0}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y-1}{y}=\infty,
$$

因此 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在, (2) 错误. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 不论取 x, y, 或者 xy, 都是无穷小量, 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, (3) 正确. 又

$$
{}^{☞}\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} xy = \lim_{y\to 0} 0 = 0,
$$

☞注意这是个累次极限, x 和 y 都是趋于 0 而不等于 0.

因此 (4) 正确, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ( )

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > \mathrm{e}$ C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < \mathrm{e}^2$ D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < \mathrm{e}^3$

✎ **解:** 由 $f'(x) > f(x) > 0$ 可知 $f'(x) - f(x) > 0$, 且 $f(x)$ 单调递增. 令 $F(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$, 则 $F'(x) = \mathrm{e}^{-x}[f'(x) - f(x)] > 0$, 因此 $F(x)$ 单调递增且为正, 于是 $F(0) > F(-1)$, 选 B.

7. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 因为 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解, 且 $r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 而 $A_{12} \neq 0$ 说明 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 且 $\boldsymbol{A}$ 中对应的三列 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$ B. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$ D. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$

✎ **解:** 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$________.

✎ **解:** 由参数方程求导公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t = 1$ 可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = -\sqrt{2}$.

10. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x =$________.

✎ **解:** 交换积分次序得

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3+1) = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}.$$

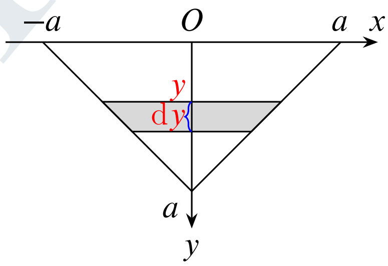
11. 设 $z = \arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)} =$________.

✎ **解:** 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)} = \pi-1, \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)} = -1$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)} = (\pi-1)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g, 水的密度为 ρ, 则三角形平板的一侧受到的水压力为________.



第 12 题图

✎ **解:** 如图, 以斜边所在的直线为 x 轴, 斜边中点为原点, 垂直于 x 轴向下的方向为 y 轴, 考虑在深度为 y 处, 宽度为 $\mathrm{d}y$ 的窄条, 压强为 ρgy, 那么窄条一侧承受的压力为 $\rho gy \cdot 2(a-y)\,\mathrm{d}y$, 因此整个平面一侧承受的压力为

$$F = \int_0^a \rho gy \cdot 2(a-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\rho g a^3.$$

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x =$________.

✎ **解:** 方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$, 再由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 可得 $C_1=0, C_2=1$, 因此 $y(x)=x\mathrm{e}^{-x}$, $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$________.

✎ **解:** 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线.

✎ **解:** 设所求斜渐近线为 $y = ax + b$, 则

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to+\infty}(y-ax) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{1}{\mathrm{e}}x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{(1+1/x)^x} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[\mathrm{e}^{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[1 - x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

因此所求的斜渐近线为 $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x + \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

✎ **解:** 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f(x)$ 连续, 则

$$f(0) = \lim_{x\to0} f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

显然 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u & x\neq0 \\ f(0)=0, & x=0 \end{cases}$. 当 $x\neq0$ 时, $g'(x) = \dfrac{1}{x}f(x) - \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$. 当 $x=0$ 时,

$$g'(0) = \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

因此 $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}f(x) - \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u, & x\neq0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$, 且

$$\lim_{x\to0} g'(x) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = g'(0),$$

因此 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

于是当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0,B=-1,C=0$, 那么 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 不是极值点; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A=1,B=-1,C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$, 并求曲线 $y=f(x),y=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

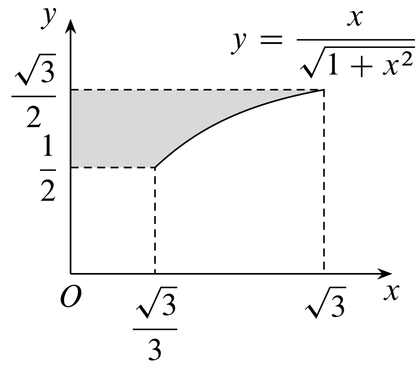
✎ **解:** (1) 把已知等式中的 x 换成 $\dfrac{1}{x}$ 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

与原式联立消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 解得 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 如图, 由 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, 因此所求旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}y\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}.$$



第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 D 由 $x=1,x=2,y=x$ 及 x 轴围成.

✎ **解:** 直接化为极坐标计算得

$$\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}r\,\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 证明

(1) 存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $f(\xi) = (2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta \in (1,2)$, 使得 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot \mathrm{e}^{\eta^2}$.

☛ **证明:** (1) 令 $F(x) = f(x) - (2-x)\mathrm{e}^{x^2}$, 则

$$F(1) = f(1) - \mathrm{e} = -\mathrm{e} < 0, \quad F(2) = f(2) - 0 = f(2) > 0,$$

因此由零点定理知存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = (2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$.

(2) 令 $g(x) = \ln x$, 则 $f(x), g(x)$ 都在 $[1,2]$ 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 由柯西中值定理知存在 $\eta \in (1,2)$, 使得 $\dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $\dfrac{f(2)}{\ln 2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\eta^2}}{1/\eta}$, 也就是 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot \mathrm{e}^{\eta^2}$.

21.**(本题满分 11 分)**

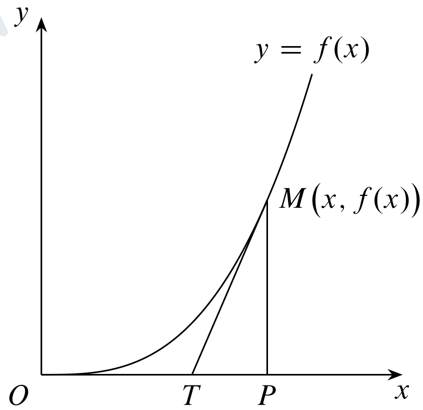
已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0\,(x > 0)$. 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T, 过点 M 作 MP 垂直 x 轴于点 P, 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3:2$, 求曲线满足的方程.

✎ **解:** 设 M 的坐标为 $(x, f(x))$, 则 M 处的切线方程为

$$Y = f'(x)(X-x) + f(x).$$

当 $Y=0$ 时, $X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 且

$$S_{\triangle MTP} = \frac{1}{2} f(x)\left[x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right] = \frac{f^2(x)}{2f'(x)}.$$



第 21 题图

由题意有 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\cdot\frac{f^2(x)}{2f'(x)}$, $f(0)=0$. 等式两边求导得

$$f\ (x) = \frac{3\left[2f\ (x)\ f'^2\ (x) - f^2\ (x)\ f''\ (x)\right]}{4f'^2\ (x)},$$

整理即得 $f(x)f''(x) - \dfrac{2}{3}f'^2(x) = 0$, 于是 $f'(0) = 0$. 且

$$\left(\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}}\right)' = \frac{y''y^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'^2}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{y''y - \frac{2}{3}y'^2}{y'y^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

因此 $y' = Cy^{\frac{2}{3}}$. 再分离变量解得 $3y^{\frac{1}{3}} = Cx + C_1$, 即 $y = (C_2x + C_3)^3$. 再由 $y(0) = y'(0) = 0$ 知 $C_3 = 0$, 因此 $y = kx^3$, k 为任意正数, 此即为所求曲线的方程.

22.**(本题满分 11 分)**

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1, y_2.y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:** (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3), g(y_1,y_2,y_3)$ 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$, 因此

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=(1+2a)(1-a)^2=0,$$

于是 $a=1$ 或 $-\frac{1}{2}$. 当 $a=1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$ 舍去, 于是 $a=-\frac{1}{2}$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$, 令

$$\begin{cases}z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3)\\ z_3=x_3\end{cases},\quad \boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则在可逆线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{z}$ 下, $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形 $z_1^2+z_2^2$. 同理, $g(y_1,y_2,y_3)=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$, 令

$$\begin{cases}z_1=y_1+y_2\\ z_2=2y_3\\ z_3=y_2\end{cases},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix},$$

则在可逆线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}$ 下, $g(y_1,y_2,y_3)$ 化为标准形 $z_1^2+z_2^2$. 因此 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 所以

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\frac{2}{3}\sqrt{3}\\0&1&\frac{4}{3}\sqrt{3}\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2, -3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.