

8. 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为 ()
- A. $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ B. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
 C. $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ D. $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x + y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g , 水的密度为 ρ , 则三角形平板的一侧受到的水压力为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线.

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

17. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.



18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$. 求 $f(x)$,

并求曲线 $y = f(x)$, $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} d\sigma$, 其中区域 D 由 $x = 1, x = 2, y = x$ 及 x 轴围成.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 证明

(1) 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0 (x > 0)$. 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T , 过点 M 作 MP 垂直 x 轴于点 P , 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3 : 2$, 求曲线满足的方程.

22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变

换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求可逆矩阵 P .

23.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

(1) 证明: P 是可逆矩阵;

(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = \mathbf{0}$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

