2020 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt$ B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\, dt$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则 ( )

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0)=0$, $\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 则 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在 B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\times\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在 D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\times\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geqslant R$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| < R$

C. $|r| \geqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散 D. $|r| \leqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则 ( )

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$ B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$ D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

6. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$

相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}, i=1,2,3$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{12}$

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来子总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)$ 的近似值为 ( )

A. $1-\Phi(1)$　　B. $\Phi(1)$　　C. $1-\Phi(0.2)$　　D. $\Phi(0.2)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=$________.

10.设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\,(a>0)$, 且 $f(0)=m$, $f'(0)=n$, 则 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

12.设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

13.行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

14.设 X 服从区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y=\sin X$, 则 $\operatorname{Cov}(X,Y)=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

16.(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是 $x^2+y^2=2$, 方向为逆时针方向.

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x|<1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 并求其和函数.

18.(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2), |f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明:随机变量 Y 服从标准正态分布.

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.