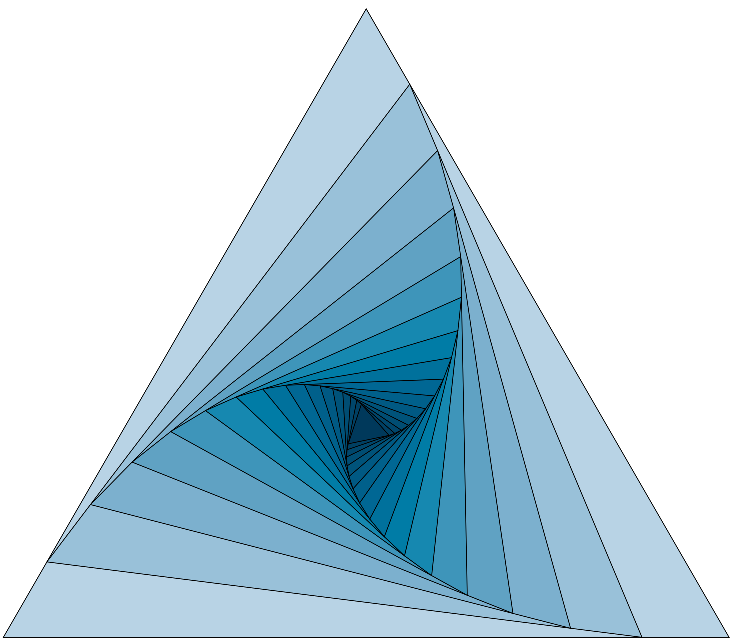
数学分析葵花宝典

向禹 ◎ 著

version2.1



yuxtech.github.io

好题集锦

这一部分题目我忽略一些理论性的东西, 特别是和一致收敛和次序交换有关的问题, 很多比较显然我不加声明, 有些则比较麻烦, 我也不做证明, 而注重的各种计算技巧和方法. 这些题目都是我从各个数学论坛搜集来的, 其中声明原创的题目, 其解答都是由我本人给出的. 未声明原创的题目则是由网友以及我的一些朋友给出的解答, 感谢各位. 如果有错误的地方, 烦请大家指出, 邮箱我标在了页眉部分.

例 1 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right).$$

解 [原创] 当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$,
于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x-\sin\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\int_0^{\pi}(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&\frac{\left(\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}
\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\pi}\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt[n]{\sin x}-1}{1/n}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2$$

是一个比较常见的积分, 其中极限与积分次序的交换我没有声明, 其实可以直接用 Gamma 函数表示出那个积分再求极限, 留给读者.

例 2 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

解 作变换 $x\to\dfrac{1}{x}$ 可得

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

于是

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\ln^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-\frac{1}{x}} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln^2(t^2+1)}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2\cos^2 u\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi^3}{6}+2\pi\ln^2 2.
\end{aligned}
$$

其中最后一步利用 $\ln\sin x$ 的 Fourier 级数 $\ln\sin x = -\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k}$(这个公式大家除了用 Fourier 级数的方法推出, 还可以利用复数法推出), 然后根据 Fourier 级数的逐项积分性质和三角函数的正交性质得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln^2 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2kx}{k^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln^2 2+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2kx}{2k^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi}{4}\zeta(2) = \frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^3}{24}
\end{aligned}
$$

例 3 计算积分

$$
\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x
$$

解 因为

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^2
$$

所以原积分

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\mathrm{d}x^2 = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n!)^2}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{2^n(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

例 4 计算积分

$$
\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x
$$

解 考虑积分

$$I(t)=\int_0^1\frac{\ln\left(tx+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x$$

那么

$$\begin{aligned}I(0)&=\int_0^1\frac{\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{6}\right)=-\frac{\pi^2}{24}\end{aligned}$$

而

$$I'(t)=\int_0^1\frac{1}{tx+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{t\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}+\frac{t\ln t}{1+t^2}$$

上式对 t 积分得

$$I(t)=\frac{\pi}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\ln t-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x+C$$

其中

$$C=I(0)=-\frac{\pi^2}{24},I=I(1)=\frac{\pi^2}{8}+0-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{16}$$

例 5 计算不定积分

$$\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2u^2}{(1+u)(1+u^4)}\mathrm{d}u\quad\left(u=\sqrt{\tan x}\right)\\&=\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{-u^3+u^2+u-1}{1+u^4}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\int\frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2)}{1+(u^2)^2}\\&=\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{2}\arctan u^2+C\end{aligned}$$

$$= \ln(1+\sqrt{\tan x}) - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tan x - \sqrt{\tan x}+1}{\tan x + \sqrt{\tan x}+1}\right) + \frac{1}{2}x + C$$

例 6 计算不定积分

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

解

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{(\tan t - t)^2}\sec^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2}{(\sin t - t\cos t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \left(-\frac{t}{\sin t}\right)\left(-\frac{t\sin t}{(\sin t - t\cos t)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{t}{\sin t}\frac{1}{\sin t - t\cos t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} \\
&= -\frac{(1+\tan^2 t)t}{\tan t(\tan t - t)^2} - \frac{1}{\tan t} + C \\
&= -\frac{(1+x^2)\arctan x}{x(x-\arctan x)} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{1+x\arctan x}{x-\arctan x} + C
\end{aligned}$$

例 7 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos\mathrm{h}\,(at)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\left(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-t^2+at}+\mathrm{e}^{-t^2-at}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{a}{2}}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}} e^{-x^2}dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\\
&= e^{\frac{a^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}e^{\frac{a^2}{4}}
\end{aligned}
$$

例 8 设 $a > b > 0$, 计算积分

$$\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)dx.$$

解 记 $I(b) = \int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)dx$, 那么

$$
\begin{aligned}
I'(b) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{a + b\cos x}dx\\
&= \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}\\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} \quad (t = \tan(x/2))\\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)\Bigg|_0^{\infty}\\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{\pi a}{b\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}
$$

例 9 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}dx.$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}dx\\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{n-m}{n}}\frac{dx}{(1+x)^2}\\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}dt \quad \left(t = \frac{x}{1+x}\right)\\
&= \frac{2^{-\frac{n+m}{n}}}{\Gamma(3)}\Gamma\left(\frac{m+n}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-m}{n}\right)\\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\cdot\frac{m}{n}\frac{n-m}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$= 2^{-\frac{n+m}{n}} \cdot \frac{m(n-m)}{n^2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$$

例 10

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right).$$

解 首先有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1} &= 1+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\frac{1}{3}\ln n\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n &= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 x^{k+1/3-1}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\ &= 1+\frac{1}{3}\left(\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\ &= 1+\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\ &= 1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)=\frac{1}{3}\gamma+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3.$

例 11 把方程 $\tan x = x$ 的正根按从小到大顺序排成数列 x_n,求极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2\sin(x_{n+1}-x_n)$$

解 [原创] 首先容易得到 $x_n\in\left(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $x_n-n\pi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 故

$$x_n=\tan x_n=\tan(x_n-n\pi)$$

所以 $\arctan x_n = x_n - n\pi$, 且 $x_n - n\pi \to \dfrac{\pi}{2}, n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(\arctan x_{n+1} - \arctan x_n + \pi) \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \sin\left[\arctan\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_n x_{n+1}}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_n x_{n+1}} = -\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) \\
&= -\lim_{n\to\infty} [x_{n+1} - (n+1)\pi - (x_n - n\pi)] - \pi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

例 12 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2, a_2 = 8, a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$, 求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot}(a_n^2)$.

解 利用递推式可得

$$\begin{aligned}
a_n(4a_{n-1}) &= a_{n-1}a_n \\
\Rightarrow a_n(a_n + a_{n-2}) &= a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) \\
\Rightarrow a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} &= a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}
\end{aligned}$$

根据上述递推关系可得, 对 $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} = \cdots = a_2^2 - a_1 a_3 = 4.$$

根据反余切公式 $\operatorname{arccot} a - \operatorname{arccot} b = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1+ab}{b-a}\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) &= \operatorname{arccot}\left(\frac{1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}}\right) \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(a_{n-1} + a_{n+1})}{a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}}\right] \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(4a_n)}{4}\right] \\
&= \operatorname{arccot} a_n^2.
\end{aligned}$$

由特征根方法可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot}(a_n^2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arccot}(a_n^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left[\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)\right] \\
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{acrcot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{acrcot}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \operatorname{arccot}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

例 13 计算积分

$$
\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.
$$

解 [原创]

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t \\
&= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2\cos 2t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).
\end{aligned}
$$

例 14 求和

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}.
$$

解 首先注意到

$$
\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)} - \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)} = \frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}.
$$

于是得到

$$
\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)} = \left[\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)}-1\right] - \left[\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}-1\right]
$$

且当 $n=1$ 时,

$$\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}-1=0.$$

因此可求得部分和

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n}\left(1+\sqrt[2^{n}]{2}\right)}=\frac{1}{2^{m}\left(\sqrt[2^{m}]{2}-1\right)}-1.$$

令 $m\to\infty$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}\left(1+\sqrt[2^{n}]{2}\right)}=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

例 15 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

解 令

$$I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式得

$$I_2\geqslant I_1^2$$

再由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1\left(r+f^2(x)\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(r+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

展开得到

$$r^2I_1^2\leqslant r^2I_2+2rI_2^2+I_2I_4$$

也即

$$(I_1^2-I_2)r^2-2I_2^2r-I_2I_4\leqslant 0$$

于是上式左边的最大值也小于等于 0, 最大值在 $r=\dfrac{I_2^2}{I_1^2-I_2}$ 取到, 即满足

$$\frac{I_4^4}{I_1^2-I_2}-\frac{2I_2^4}{I_1^2-I_2}-I_2I_4\leqslant 0$$

即

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

所以只要证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2} \geqslant \frac{27}{4}I_1^4$$

注意到

$$(I_2-I_1^2)I_1^4=\frac{1}{2}(2I_2-2I_1^2)I_1^2\cdot I_1^2 \leqslant \frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2} \geqslant \frac{27}{4}I_1^4$$

故有

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

例 16 设函数 $f \in C(a,b)$ 不恒为零, 满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant M$, 试证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

解 令

$$A=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$B=\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$C=\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里区域 $D=\{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$.
则有

$$B+C=\iint_D f(x)f(y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}A-(B+C)&=\iint_D f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_D f(x)f(y)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{M^2}{2}\iint\limits_D (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{M^2}{2}\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b (x-y)^2\mathrm{d}y \\
&= \frac{M^2(b-a)^4}{12}
\end{aligned}
$$

例 17 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$$

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{16} &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)} + \frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} - \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{6} - 2\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x = \frac{5}{96}\pi^2
\end{aligned}
$$

例 18 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

解 记

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

把 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{102}}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

注意到

$$x^{100} - x^{98} + \cdots + 1 = \frac{1 + x^{102}}{1 + x^2}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1 + x^2}{x^4 + (1 + 2\sqrt{2})x^2 + 1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 + 2\sqrt{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2(1 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

例 19 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2017}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$$

解 由推广的积分第一中值定理, 对每个正整数 n, $\exists \theta_n \in (0, 1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = ((2n + \theta_n)\pi)^{2016} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$$

由此得

$$\begin{aligned} &\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\ =& \left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\ =& \left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \left(\frac{\cos 5x}{80} - \frac{\cos 3x}{48} - \frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ =& \frac{4}{15}\left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \quad n \to \infty \end{aligned}$$

另外

$$(2n+1)^{2017} - (2n-1)^{2017} = 4034(2n)^{2016} + o(n^{2016}) \quad n \to \infty$$

于是由 Stolz 定理得

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2017}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\ =& \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x}{(2n+1)^{2017} - (2n-1)^{2017}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{30510}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^{2016}+o(n^{2016})}{(2n)^{2016}+o(n^{2016})} \\
&= \frac{2\pi^{2016}}{30510}
\end{aligned}
$$

更一般的结果是

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^p\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{2\pi^p}{15(p+1)}.
$$

例 20 求和

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2
$$

解 首先注意到

$$
\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots = \int_0^1 (x^n-x^{n+1}+x^{n+2}-\cdots)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots\right)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1\frac{y^n}{y+1}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\int_0^1\frac{1}{(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\frac{\ln 2-\ln(1-x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{(1-x)\ln(1-x)}{2(1+x)}+\frac{\ln(1+x)}{2}-\frac{\ln 2}{1+x}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

例 21 设 $f(x)$ 是连续实值函数, 且满足

$$
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x = 1
$$

证明:

$$
\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant n^2
$$

解 考虑多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

如果多项式 $P(x)$ 也满足上面的条件, 那么

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$$

为了求出系数 a_i, 再次利用条件

$$\int_0^1 x^kP(x)\mathrm{d}x=1\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n}=1\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

设

$$H(x)=\frac{a_0}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x+n}$$

则显然有

$$H(0)=H(1)=\cdots=H(n-1)=0$$

于是

$$H(x)=\frac{Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

对比系数可得 $A=-1$ 以及

$$a_k=(-1)^{n-k+1}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k+1)!}\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

用数学归纳法可以证明

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_k=n^2$$

所以, 多项式 $P(x)$ 满足上面的性质, 则

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=n^2$$

取满足以上条件的多项式 $P(x)$, 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x\right)^2=n^4$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant n^2.$$

例 22 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}.$$

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{2^n} - e^{-2^n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{2^n}\left(1 - e^{-2\cdot 2^n}\right)} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2^n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\cdot 2^n \cdot k} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)\cdot 2^n} \\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m} = \frac{2}{e^2-1}.\end{aligned}$$

例 23 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 n 阶连续可微函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 其中 i 是不超过 n 的偶数, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1 \left(f^{(n)}(x)\right)^2 dx.$$

解 如果 $g \in C^n([0,1])$, 则对任意 $a \in (0,1)$, 由分部积分可得

$$\int_0^a g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i a^{i+1} g^{(i)}(a)}{(i+1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a x^n g^{(n)}(x)\,dx$$

因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,dx$$

以及

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\,dx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,dx$$

由于 $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 其中 i 是小于 n 的偶数, 于是

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$$

最后由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \frac{2}{(n!)^2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]\\ &\leqslant \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(1-x)\right)^2\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant \frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 24 设 f 是 $[0,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明

$$\int_0^1\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant 320\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

解 利用 Taylor 公式可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_{x=0}^{\frac{1}{2}}\int_{t=x}^{\frac{1}{2}} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\int_{t=\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &=\int_{t=0}^{\frac{1}{2}}\int_{x=0}^{t} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t=\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=t}^{1} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &=\int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\left[-\frac{(t-x)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{t}\mathrm{d}t+\int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)\left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=t}^{1}\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\,t^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)(1-t)^2\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f''(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中

$$h(t)=\begin{cases}t^2, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\(1-t)^2, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1(h(t))^2\,\mathrm{d}t\int_0^1\left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{320}\int_0^1\left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

例 25 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 证明

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 4\left(\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

解 这里我们证明一个更一般的结论:设 f,g 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, a 和 b 是非负实数, 则

$$\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f^a(x)g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^b(x)g^a(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

设 A,B 是非负实数, 则

$$(A^a-B^a)(A^b-B^b)\geqslant 0$$

这就意味着

$$A^{a+b}+B^{a+b}\geqslant A^aB^b+A^bB^a$$

令 $A=f(x)g(y),B=f(y)g(x)$, 并在 $[0,1]\times[0,1]$ 上积分, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\int_0^1[f(x)g(y)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1[f(y)g(x)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\\geqslant&\int_0^1\left(\int_0^1(f(x)g(y))^a(f(y)g(x))^b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\int_0^1(f(x)g(y))^b(f(y)g(x))^a\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right)+\left(\int_0^1 f^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\\geqslant&\left(\int_0^1 f^a(x)g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^a(y)g^b(y)\,\mathrm{d}y\right)+\left(\int_0^1 f^a(y)g^b(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 f^a(x)g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

得证, 那么在待证式中取 $g(x)=x,a=2,b=1$ 即可.

例 26 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负函数, 证明

$$\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{16}+\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 首先注意到对 $t \geqslant 0$ 有

$$t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{6} = \frac{(4t+1)(2t-1)^2}{16} \geqslant 0$$

由于 f 是非负函数, 则

$$\int_0^1 \left(f^3(x) - \frac{3}{4}f^2(x) + \frac{1}{16}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$$

那么由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6} \geqslant \frac{3}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例 27 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}} \Gamma(nx)\,\mathrm{d}x$$

解 我们将证明如果 f 是 (a,b) 上的实值连续函数且 $\mathrm{e} \in (a,b)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}} f(nx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

令 $b_n = n(n!)^{-1/n}, a_n = n((n+1)!)^{-1/(n+1)}$, 那么由积分平均值定理可得

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}} f(nx)\,\mathrm{d}x = n\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t = n(b_n - a_n) f(t_n)$$

对某个 $t_n \in (a_n, b_n)$ 成立. 再由 Stirling 公式得

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此

$$b_n = n\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n!)}{n}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\ln n}{2n} - \frac{\mathrm{e}\ln\sqrt{2\pi}}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

$$b_n - a_n = b_n - \frac{nb_{n+1}}{n+1} = \frac{\mathrm{e}}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \mathrm{e}$$

也就意味着

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \mathrm{e}$$

再由 f 在 e 处的连续性

$$\lim_{n\to\infty} n(b_n - a_n) f(t_n) = \mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

而这里的话, Γ 函数是 $(0,+\infty)$ 上的实值连续函数, 因而极限是 $\mathrm{e}\Gamma(\mathrm{e})$.

例 28 计算二重积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 [原创] 首先有

$$\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}=\frac{1-\cos(x+y)}{2-2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

作二重积分换元 $x=u+v, y=u-v$, 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=2$, 于是积分域变为正方形 $(u,v): -\pi\leqslant u\pm v\leqslant\pi$, 由对称性

$$\begin{aligned}
I&=4\iint\limits_{0\leqslant u+v\leqslant\pi}\frac{1-\cos 2u}{1-\cos u\cos v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\int_0^{\pi-u}\frac{\mathrm{d}v}{\sec u-\cos v}\right)\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\frac{2}{\sqrt{\sec^2 u-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\sec u+1}{\sec u-1}}\tan\frac{v}{2}\right)\Bigg|_{v=0}^{\pi-u}\right)\mathrm{d}u\\
&=16\int_0^{\pi}\sin u\arctan\left(\cot^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u\\
&=64\int_0^{\infty}\frac{w}{(1+w^2)^2}\arctan(w^2)\mathrm{d}w\quad\left(w=\cot\left(\frac{u}{2}\right)\right)\\
&=32\int_0^{\infty}\frac{\arctan t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\\
&=8\pi
\end{aligned}$$

例 29 求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

解 [原创] 首先我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

利用对数函数的幂级数公式不难得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y}{2n+1}=\frac{1}{\sin^2x\sin^2y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)$$

考虑参变量积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2y}\left(\ln\frac{1+a\sin y}{1-a\sin y}-2a\sin y\right)\mathrm{d}y\quad |a|<1$$

则可得

$$\begin{aligned}
&I(0)=0\\
&I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\left(\frac{1}{1+a\sin y}+\frac{1}{1-a\sin y}-2\right)\mathrm{d}y\\
&\quad=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-a^2\sin^2y}\mathrm{d}y=2a^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-a^2(1-t^2)}\quad(t=\cos y)\\
&\quad=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+(1-a^2)/a^2}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
I(\sin x)&=\int_0^{\sin x}\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{d}a=2\int_0^x u\sin u\mathrm{d}u\quad(a=\sin u)\\
&=2(\sin x-x\cos x)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2x\sin^2y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{I(\sin x)}{\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2x}\mathrm{d}x\\
&=-2(\sin x-x\cos)\cot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)=\pi-2
\end{aligned}$$

例 30 计算二重积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

解 [原创] 考虑参变量积分

$$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos(x-ty)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned} I(0) &= 0 \\ I'(t) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin(x-ty)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{t} \cos(x-ty) \Big|_{y=0}^{y=x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(1-t)x - \cos x}{tx} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(1-t)}{t} \end{aligned}$$

上面最后一步我们利用了 Frullani 积分公式, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\cos(x-y) - \cos x}{y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

例 31 设函数 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续可微函数, 证明不等式

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 12 \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^2$$

解 利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 = \left[\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \right]^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 24 \left[\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \right]^2$$

再利用 Cauchy 不等式得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 \mathrm{d}x \geqslant \left[-\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right]^2$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 24 \left[-\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right]^2$$

两式相加, 利用不等式 $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$ 得

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 24 \left[\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \right]$$

$$\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

特别地, 当 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时, 我们有

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

例 32 设 $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)}$$

解 [原创] 首先注意到

$$H_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}x^k\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)}&=\int_0^1\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{n+2}}{n(n+2)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-2\left(1-x^2\right)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}(1+x)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

例 33 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(\sinh n)\cdot\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)$$

解 [原创] 注意到

$$\begin{aligned}\arctan(\sinh n)&=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{2}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{1+\mathrm{e}^n\cdot\mathrm{e}^{-n}}\right)\\&=\arctan\left(\mathrm{e}^n\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-n}\right)=2\arctan\left(\mathrm{e}^n\right)-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^{n-1}}{1+\mathrm{e}^{n+1}\cdot\mathrm{e}^{n-1}}\right)$$

$$= \arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{n-1}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\sinh n) \cdot \arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\left[\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{n-1}\right)\right] \\
=&\, 2\left[\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right)\arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right) - \frac{\pi}{4}\arctan(\mathrm{e})\right] \\
&- \frac{\pi}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\left(\mathrm{e}^{n}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)\right) - \frac{\pi}{4} - \arctan(\mathrm{e})\right] \\
=&\, 2\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}\arctan(\mathrm{e})\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}\pi - \arctan(\mathrm{e})\right) = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

例 34 设 r 是一个整数, 求和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right)$$

解 首先有

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right) &= \arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{r} - \mathrm{e}^{-r}}{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{-(n-r)} - \mathrm{e}^{-(n+r)}}{1 + \mathrm{e}^{-2n}}\right) \\
&= \arctan\left(\mathrm{e}^{-(n-r)}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-(n+r)}\right)
\end{aligned}$$

不失一般性, 不妨设 $r \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cos \mathrm{h} n}\right) \\
=&\, 2\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right) + \arctan(\sinh r) \\
=&\, 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n-r)}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-(n+r)}\right)\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
=&\, 2\sum_{m\geqslant 1-r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) - 2\sum_{m\geqslant 1+r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
=&\, 2\sum_{1-r\leqslant m\leqslant r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
=&\, 2\sum_{-r\leqslant m\leqslant r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{1\leqslant m\leqslant r}\left[\arctan\left(\mathrm{e}^{m}\right)+\arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)\right]+2\arctan\left(1\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right)-\arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right)$$
$$= 2\sum_{1\leqslant m\leqslant r}\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\pi r$$

例 35 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right)$$

解 记

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}},\qquad b_n=\frac{\sqrt{2^b+1}-\sqrt{3}}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

不难得到

$$b_{n+1}\sqrt{1+b_n^2}-b_n\sqrt{1+b_{n+1}^2}=a_n$$

根据基本性质

$$\operatorname{arcsinh}\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\right)=\operatorname{arcsinh}\left(x\right)-\operatorname{arcsinh}\left(y\right)$$

我们得到

$$\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arcsinh}\left(a_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{arcsinh}\left(b_{n+1}\right)-\operatorname{arcsinh}\left(b_n\right)\right)=\operatorname{arcsinh}\left(b_{N+1}\right)-\operatorname{arcsinh}\left(b_1\right)$$

现在 $b_1=0, b_{N+1}\to\frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right)=\lim_{N\to\infty}\operatorname{arcsinh}\left(b_{N+1}\right)=\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

例 36 求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{\left(2n+1\right)^2n^2\binom{2n}{n}^2}$$

解 [原创] 首先有

$$\begin{aligned}\frac{16^n}{\left(2n+1\right)^2n^2\binom{2n}{n}^2}&=\frac{16^n}{\left(2n+1\right)^2n^2}\left[\frac{\left(n!\right)^2}{\left(2n\right)!}\right]^2\\&=\frac{16^n}{\left(2n+1\right)^2n^2}\left[\frac{n!}{\left(2n-1\right)!!\cdot 2^n}\right]^2\\&=\frac{2}{n\left(2n+1\right)}\cdot\frac{\left(2n\right)!!}{\left(2n+1\right)!!}\cdot\frac{\left(2n-2\right)!!}{\left(2n-1\right)!!}\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{n\left(2n+1\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y$$

记

$$I\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{n\left(2n+1\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y$$

则

$$\begin{aligned}I'\left(t\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是

$$S=-2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

考虑

$$f\left(u\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\ln\left(1-u\sin^2y\right)\mathrm{d}y$$

则

$$f'\left(u\right)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-u\sin^2y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{t^2\sin^2x}\frac{\sin x}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\arctan^2\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right)\Bigg|_{u=0}^{t^2\sin^2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\arctan^2\left(\frac{t\sin x}{\sqrt{1-t^2\sin^2x}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x z^2\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x\qquad\left(t=\frac{\sin z}{\sin x}\right)\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\cos x+x^2\sin x-2\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=4\pi-12\end{aligned}$$

例 37 计算积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\ln\left(\frac{\ln2-\ln(1+2x)}{\ln2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x$$

解 [原创] 首先有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+2x)}{\ln 2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+x)}{\ln 2-\ln(1-x)}\right)}{3+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\left|\ln\frac{1+x}{2}\right|\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{2t-1}{3+(2t-1)^2}\ln(-\ln t)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(2t-1)\ln(-\ln t)}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \ln(-\ln t)\,\mathrm{d}\left(\ln\left(t^2-t+1\right)\right) \quad (x=2t-1)$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2-t+1\right)}{t\ln t}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s}+1\right)}{s}\mathrm{d}s \quad (t=\mathrm{e}^{-s})$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3s}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-s}\right)}{s}\mathrm{d}s$$

考虑参数积分 $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-as}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-bs}\right)}{s}\mathrm{d}s$, 则 $I(b,b)=0$,

$$I_a'(a,b) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{1+\mathrm{e}^{-as}}\mathrm{d}s = -\frac{1}{a}\ln 2$$

于是

$$I(a,b) = -\ln 2\int_b^a \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln 2\ln\frac{a}{b}$$

原积分 $I = \frac{1}{8}I(3,1) = -\frac{1}{8}\ln 2\ln 3$.

例 38 设 $f(x):(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 且是连续可导的函数, 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,\quad f'(x)>0, x\in(1,+\infty).$$

证明:积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

解 [原创] 如果 $f'(x)$ 有界, 结论显然成立, 不妨设 $f'(x)$ 无界, 这时 $f(x)$ 单调趋于 $+\infty$. 对 $\forall A>0$, 由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\right)\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2$$

由 $f(x)\leqslant x^2\ln x$ 得 $f(\mathrm{e}^x)\leqslant x\mathrm{e}^{2x}$, 因此

$$\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{f'(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{\mathrm{d}\left[f(\mathrm{e}^t)\right]}{t^2\mathrm{e}^{2t}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{f\left(\mathrm{e}^{t}\right)}{t^{2}\mathrm{e}^{2t}}\right|_{\frac{A}{2}}^{A} + \int_{\frac{A}{2}}^{A} \frac{2t^{2}\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^{4}} f\left(\mathrm{e}^{t}\right)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{f\left(\mathrm{e}^{A}\right)}{A^{2}\mathrm{e}^{2A}} + \int_{\frac{A}{2}}^{A} \frac{2t^{2}\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^{4}} t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{A} + 2\left(\ln 2 + \frac{1}{A}\right) = 2\ln 2 + \frac{3}{A}.
\end{aligned}
$$

取 A 充分大, 则 $\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^{A}} \frac{f'(x)}{x^{2}\ln^{2}x}\mathrm{d}x \leqslant 2$, 因此

$$
\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^{A}} \frac{\mathrm{d}x}{f'(x)} \geqslant \frac{\ln^{2} 2}{2}
$$

对任意充分大的 A 都成立, 于是积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

例 39 计算积分

$$
\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x
$$

解

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x \\
&= -\ln(x)\ln\left.\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\right|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \ln(x)\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_{1}^{\infty} + \int_{1}^{\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \int_{0}^{1} \ln\left.\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right)\right|_{y=1}^{y=2} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{1}^{\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\Big|_{y=1}^{y=2} \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \int_{0}^{1}\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{xy}-1} - \frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty}\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{xy}-1} \\
&= \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\ln\left.\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{x}\right)\right|_{x=0}^{x=1} + \ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\Big|_{x=1}^{x=\infty}\right] \\
&= -\int_{1}^{2} \frac{\ln(y)}{y}\mathrm{d}y = -\frac{\ln^{2} 2}{2}
\end{aligned}
$$

例 40 求极限

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^{n}}\mathrm{d}x\right)^{n} - \frac{1}{2}\right]
$$

解 首先有

$$
I_{n} = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^{n}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{0}^{1} \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= 1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1 \frac{\ln^k x}{1+x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此不难得到

$$
I(n) = 1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
$$

故

$$
\begin{aligned}
I^n(n) &= \mathrm{e}^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = \mathrm{e}^{n\left[-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}-\frac{\ln^2 2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

于是最后得到

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[I^n(n)-\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2
$$

例 41 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上周期为 T 的局部可积函数, 且 $\int_0^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其中 $0<a<\pi$, 证明

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x
$$

解 由于 $f(x)$ 局部可积故有界, $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|<M$, 而 $\int_0^a \frac{f(nx)}{x} = \int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\ (n\in\mathbb{N}_+)$. 由于 $\int_0^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x$ 存在, 而

$$
\left|\int_0^a \frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^a \frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a f(nx)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_0^a \frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x
$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0$, 故 $\int_0^a \frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x$ 存在且为有限数, 从而

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a \frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(na)-\ln a}\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

例 42 证明下列两个积分等式:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}dz$;

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}dz$.

解 [原创] 我们只证明 (2) 式, (1) 式同理.(2) 式等价于

$$\frac{1}{2}\left(\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}dx=0$$

令 $f(z)=\frac{1}{2}\left(\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}dx$, 则

$$\begin{aligned}f'(z)&=-e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{z^2}{2}\csc^2 x}\left(-z\csc^2 x\right)dx\\&=-e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{z^2}{2}\left(\cot^2 x+1\right)}z\,d(\cot x)\\&=-e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_1^\infty e^{-\frac{z^2}{2}u^2}z\,du=0\end{aligned}$$

因此 $f(z)=f(0)=0$.

例 43 设 n 是一个正整数, 证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}dt}{x}=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

解 [原创] 先考虑复杂的 n 为偶数的情形, 这个时候只需要考虑 $x\to0^+$ 即可, 以正弦为例 (余弦同理)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}dt$$

对 $\forall x>0,\exists k\in\mathbb{N}$, s.t.$(k-1)\pi\leqslant x<k\pi$, 则 $x\to+\infty$ 时 $k\to+\infty$, 于是

$$x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}dt=x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}dt+x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}dt$$

其中

$$\left|x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}dt\right|\leqslant\left|x\int_x^{k\pi}\frac{1}{x^2}dt\right|=\left|\frac{k\pi-x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{x}\right|\to0,x\to+\infty$$

$$\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}dt=\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}dt=\int_0^\pi\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(t+i\pi)^2}dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}t$$

不难得到当 $k\to+\infty$ 时,

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sim\frac{1}{k}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\mathrm{d}t\sim\frac{k\pi}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

这就是 n 是偶数的极限, 而当 n 是奇数的时候, 正项级数 $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$ 会变成交错级数 $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$, 这个交错级数的绝对值不会超过 $\frac{1}{\left(k+\frac{t}{\pi}\right)^2}<\frac{1}{k^2}$, 因此最后的极限是 0.

例 44 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个严格单增实数列满足 $a_n\leqslant n^2\ln n$ 对所有 $n\geqslant 1$ 都成立, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

解 [原创] 首先如果 $\{a_n\}$ 有界的话结论就显然了, 因此假设 $\{a_n\}$ 无界, 意味着 $\{a_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $A>0$, 由 Cauchy 不等式 (这个不等式的证明以及积分, 代数, 期望形式我们在前期的公众号内容中都介绍过了) 得

$$\left(\sum_{n=\lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor}^{\lceil \mathrm{e}^{A}\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)\left(\sum_{n=\lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor}^{\lceil \mathrm{e}^{A}\rceil}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}\right)\geqslant\left(\sum_{n=\lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor}^{\lceil \mathrm{e}^{A}\rceil}\frac{1}{n\ln n}\right)^2\sim\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^{A}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2.$$

这里的求和式子中的上限和下限中的符号分别表示向上取整和向下取整. 另一反面, 利用 Abel 分部求和公式 (相当于就是分部积分公式的离散形式)

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_M)\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}-\frac{1}{(n+1)^2\ln^2(n+1)}\right)\\&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}\frac{(a_{n+1}-a_M)[(n+1)^2\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n]}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}\\&\leqslant\frac{a_{N+1}}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{n\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}a_{n+1}\\&\leqslant\frac{(N+1)^2\ln(N+1)}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\ln N} + C\int_M^N \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \frac{2}{\ln\lceil \mathrm{e}^A\rceil} + C\ln\frac{\lceil \mathrm{e}^A\rceil}{\lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor} < C\ln 2 + 1.$$

这里 $M = \lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor, N = \lceil \mathrm{e}^A\rceil, C$ 是某个无关的正常数, 因此我们有

$$\sum_{\lfloor \mathrm{e}^{A/2}\rfloor}^{\lceil \mathrm{e}^A\rceil} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} \geqslant \frac{\ln^2 2}{C\ln 2+1}$$

对任意充分大的 A 都成立, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散, 证毕.

例 45 [北大 2011 数学分析考研题] 设 $a_n > 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明:极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

存在.

解 [原创] 首先由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时, $\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 都成立. 利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right) \geqslant (n-N)^2$$

即 $\frac{(n-N)^2}{\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leqslant \sum\limits_{k=N+1}^{n} a_k < \varepsilon$. 于是对固定的 N, 取 n 充分大有

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} = \frac{n^2}{(n-N)^2}\frac{(n-N)^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} < 2\varepsilon$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} = 0$.

例 46 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 证明

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

同时说明右边的常数 2 不可再改进. 进一步, 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 也收敛.

解 首先由 Cauchy 不等式得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\cdots+\frac{k^2}{a_k}\right)\geqslant(1+2+\cdots+k)^2=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

于是可得

$$\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leqslant\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}$$

两边对 k 从 1 到 n 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\end{aligned}$$

其中我们运用了不等式

$$\frac{1}{k(k+1)^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$$

如果取 $a_k=k,k=1,\cdots,n$, 原不等式即 $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 注意到令 n 趋于无穷大时, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=1$, 因此右边的常数无法再改进了, 至于级数的敛散性问题就是显然了.

例 47

(1) 证明拉马努金恒等式

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}$$

(2) (原创) 设 a_n 是以公差为 $d\in\mathbb{N}$ 的正整数等差数列, 对固定的正整数 n, 求

$$\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}\sqrt{d^2+\cdots}}}}$$

解 只做第二问, 这个问题是本人原创的拉马努金恒等式推广首先我们断言一个基本等式

$$(a_n+d)^2=d^2+(a_{n-1}+d)(a_{n+1}+d)$$

这个只要直接利用等差数列的定义进行验证即可, 简单的计算我就不写在这里了. 由于 d 是正整数, 而且就是数列 a_n 的公差, 因此事实上我们得到了

$$a_n^2=d^2+a_{n-1}a_{n+1}.$$

于是就可以得到

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{d^2+a_{n-1}a_{n+1}}=\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_na_{n+2}}}\\&=\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}a_{n+3}}}}=\cdots.\end{aligned}$$

这样也证明了拉马努金恒等式.

例 48 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $n\geqslant 3$, 满足 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 根据 Lagrange 中值定理可知存在 $\delta>0$, 对 $h\in(-\delta,\delta)$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

解 [原创] 首先由条件 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ 两边减去 $f'(a)h$ 再同时除以 h^n 得

$$\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}\theta^{n-1}$$

结合条件 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 由 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{nh^{n-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)}{n(n-1)h^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)}{n!h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{n!h}\\&=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\end{aligned}$$

其中最后一步是根据 n 阶导数的定义. 同理有

$$\begin{aligned}\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}&=\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t^{n-1}}=\lim_{t\to 0}\frac{f''(a+t)}{(n-1)t^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)}{(n-1)!t}=\lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)-f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!t}\end{aligned}$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\theta^{n-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}}{\frac{f(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}} = \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}{\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

于是 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

例 49 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 以及 α 都是实数, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是正实数, 设函数

$$\varphi(x) = x - \alpha - \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{x - a_k}$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

解 令 $I_k = (a_k, a_{k=1}), k = 0, 1, \cdots, n$, 其中 $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$, 则简单的计算可得在 $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ 内都有 $\varphi'(x) > 0$, 进一步有

$$\varphi(x) \to +\infty,\ \ x \to a_k^-,\ \ k = 1, \cdots, n+1$$

以及

$$\varphi(x) \to -\infty,\ \ x \to a_k^+,\ \ k = 0, \cdots, n$$

因此这意味着对每个 $k = 0, \cdots, n$, φ 是从 I_k 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 设 $\psi_k: I_k \to \mathbb{R}$ 是 φ 限制在 I_k 上的反函数, 即 $\varphi\circ\psi_k = \mathrm{id}$. 则对每个 $y \in \mathbb{R}$, 方程 $\varphi(x) = y$ 刚好有 $n+1$ 个零点 $\psi_0(y), \cdots, \psi_n(y)$. 在方程 $\varphi(x) = y$ 两边同时乘以 $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ 得

$$(x - \alpha - y)(x - a_1)\cdots(x - a_n) + g(x) = 0.$$

其中 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 因此整个式子左边是一个 $n+1$ 次多项式, 而且它刚好等于 $(x-\psi_0(y))\cdots(x-\psi_n(y))$, 于是比较 x 的 n 次方的系数得

$$y + \alpha + a_1 + \cdots + a_n = \psi_0(y) + \cdots + \psi_n(y).$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_{I_k} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\psi_k'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 50 给定 $0 \leqslant a \leqslant 2$, 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是由 $a_1=a, a_{n+1}=2^n-\sqrt{2^n(2^n-a_n)}$ 所定义的数列, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

解 令

$$\alpha = 4\arcsin\sqrt{\frac{a}{2}} = \begin{cases} \arccos\left(2a^2-4a+1\right), & a\in[0,1] \\ 2\pi-\arccos\left(2a^2-4a+1\right), & a\in[1,2] \end{cases}$$

然后利用二倍角公式 $2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1+\cos\theta$, 不难得到

$$a_n = 2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

对 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2^n}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1+\frac{1+\cos\left(\alpha/2^{n-1}\right)}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} 4^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \frac{1}{2}\left(\lim_{N\to\infty} 4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4}+a^2-2a = 4\arcsin^2\sqrt{\frac{a}{2}}+a^2-2a. \end{aligned}$$

例 51 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

解 不妨假定 $f'(a)=f'(b)=0$, 否则我们考虑函数 $f(x)-xf'(a)$ 即可. 令

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b \\ 0, & x=a \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 可导, 并且对 $x \in (a,b]$

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2}$$

如果 $g(b) = g(a)$, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (a,b]$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 则结论已经得证. 现在假定 $g'(x) \neq 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 都成立, 且 $g(b) > g(a)$. 那么由 Darboux 定理知 $g(x)$ 必然在 $(a,b]$ 上严格单增, 但

$$g'(b) = -\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} = -\frac{g(b)}{b-a} < 0$$

因此由极限保号性存在 $c \in (b-\delta, b)$ 使得 $f(c) > f(b)$, 矛盾. 同理 $g(b) < g(a)$ 也矛盾, 因此必然存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

同时这题的几何意义也很明显, 如果一条曲线 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且在两个端点处的切线平行, 则必然存在曲线上的一条切线通过其中的一个端点.

例 52 求和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor}}{k(k+1)}$$

解 [原创] 首先我们给出一个数论结果:对任意正整数 n, 有

$$\lfloor\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n+1}\rfloor = 2n+1$$
$$\lfloor\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+n}\rfloor = 2n$$

这两个式子只需要证明 $2n+1 \leqslant \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n+1} < 2n+2$ 和 $2n \leqslant \sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+n} < 2n+1$ 即可, 平方两次就行了. 这就意味着当 k 在 n^2+n 到 $(n+1)^2-1$ 之间的时候 $\lfloor\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\rfloor$ 为奇数;而 k 在 n^2 到 n^2+n-1 之间的时候 $\lfloor\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\rfloor$ 为偶数, 因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor}}{k(k+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2+n}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+n}\right)-1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-1$$
$$= \frac{\pi^2}{3}-3$$

例 53

(1) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0.$

(2) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ 收敛, 证明 $\lim_{n\to\infty} na_n \ln\ln n = 0.$

解

(1) 因为设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 利用单调有界准则知 $\lim_{n\to\infty} na_n = L$ 存在, 结合 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知必有 $L=0$, 于是

$$a_n = \int_n^{n+1} a_n \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} na_n \mathrm{d}x \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} na_n \mathrm{d}x$$
$$= na_n \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \geqslant (n+p)\,a_{n+p}\,(\ln(n+1)-\ln n)$$

对任意正整数 n, p 都成立. 于是

$$(n+p)\,a_{n+p}\,(\ln(n+p)-\ln n) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 对任意正整数 $n\geqslant N, p$ 都有 $\sum_{k=n}^{n+p-1} a_k < \varepsilon$, 此时

$$(n+p)\,a_{N+p}\ln(n+p) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k + (n+p)\,a_{n+p}\ln n < \varepsilon + (n+p)\,a_{n+p}\ln n$$

固定 n, 令 $p\to\infty$ 得到

$$\limsup_{p\to\infty}(n+p)a_{n+p}\ln(n+p) \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\limsup_{p\to\infty}(n+p)a_{n+p}\ln(n+p)=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty} na_n\ln n = 0.$

(2) 同 (1) 由 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则

$$\frac{a_n}{\ln n} = \int_n^{n+1} \frac{a_n}{\ln n}\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln n} na_n \mathrm{d}x$$

$$\geqslant na_n\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\geqslant (n+p)\,a_{n+p}\,(\ln\ln(n+1)-\ln\ln n)$$

于是

$$(n+p)\,a_{n+p}\,(\ln\ln(n+p)-\ln\ln n)\leqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{a_k}{\ln k}$$

对任意 $n,p\in\mathbb{N}$ 都成立, 剩下的就和 (1) 一样了.

例 54 设 $S(u)=\int_0^u\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ 表示 Fresnel 正弦积分, 求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}$.

解 [原创] 令 $\frac{\pi}{2}x^2=nt$, 则

$$S\left(\sqrt{2n}\right)=\int_0^{\sqrt{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}\left(\sqrt{t}\right)=\sqrt{\frac{2n^3}{\pi}}\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

考虑函数 $f(t)=\sqrt{|t|},-\pi\leqslant t<\pi$, 则 $f(t)$ 的余弦级数为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{t}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos(nt)\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\sqrt{\pi}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos(nt)\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此由 Parseval 定理得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\right)^2+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\pi$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi^3}{36}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi^2}{18}$$

例 55 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 具有连续导数且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$$

证明

$$\int_0^1|f'(x)|^3\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

解 由 Hölder 不等式得

$$\int_0^1 x(1-x) f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^1 \left|f'(x)\right|^3 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}$$

因此

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|^3 \mathrm{d}x \geqslant \frac{\left(\int_0^1 x(1-x) f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^3}{\left(\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^2} = \left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

其中

$$\int_0^1 x(1-x) f'(x)\,\mathrm{d}x = [x(1-x) f(x)]\,|_0^1 - \int_0^1 (1-2x) f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)} = \frac{3\pi}{128}$$

同样道理可得对 $p>1$ 有

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|^p \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{\Gamma\left(\frac{4p-2}{p-1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)}\right)^{p-1}$$

例 56 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}$$

解 首先有基本不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

这就意味着

$$(n-1)!\mathrm{e}^{n-1} \leqslant n^n \leqslant n!\mathrm{e}^n, \forall n \geqslant 1$$

因此

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\mathrm{e}^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}} = x\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}$$

因此对 $x>0$ 有

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

由夹逼准则, 原极限就是 $e^{\frac{1}{e}}$.

例 57 设 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数, 求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cosh\left(F_n\right)\cosh\left(F_{n+3}\right)}$$

解 设 $u_n=2\cosh(F_n)$, 则

$$\begin{aligned}u_{n+1}u_{n+2}&=\left(e^{F_{n+1}}+e^{-F_{n+1}}\right)\left(e^{F_{n+2}}+e^{-F_{n+2}}\right)\\&=e^{F_{n+1}+F_{n+2}}+e^{F_{n+2}-F_{n+1}}+e^{-F_{n+2}+F_{n+1}}+e^{-F_{n+2}-F_{n+1}}\\&=e^{F_{n+3}}+e^{F_n}+e^{-F_n}+e^{-F_{n+3}}=u_n+u_{n+3}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\cosh\left(F_n\right)\cosh\left(F_{n+3}\right)}&=4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{u_nu_{n+3}}=4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n\left(u_n+u_{n+4}\right)}{u_nu_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}\\&=4\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{u_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}-\frac{(-1)^{n-1}}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}\right)\\&=4\left(\frac{(-1)^N}{u_{N+1}u_{N+2}u_{N+3}}-\frac{-1}{u_0u_1u_2}\right)\to\frac{4}{u_0u_1u_2}=\frac{1}{2\cosh^2(1)}\end{aligned}$$

例 58 设 $f\in C[0,1]$. 如果

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n+3},\quad n=0,1,2,\cdots$$

证明: $f(x)=x^2, x\in[0,1]$

解 首先由 $\dfrac{1}{n+3}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x$ 可知

$$\int_0^1 x^n\left[f(x)-x^2\right]\mathrm{d}x\quad,n=0,1,2,\cdots$$

令 $F(x)=f(x)-x^2, x\in[0,1]$, 则对任意多项式 $P(x)$, 均有

$$\int_0^1 P(x)F(x)\mathrm{d}x=0$$

由 Weirstrass 逼近定理可知对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $Q(x)$, 使得 $|F(x)-Q(x)|<\varepsilon, x\in[0,1]$, 于是

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x=\left|\int_0^1 F(x)\left(F(x)-Q(x)\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 F(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_0^1 F(x)(F(x)-Q(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |F(x)|\,|F(x)-Q(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon \int_0^1 |F(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

这说明 $\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x = 0$, 因此 $F(x) \equiv 0, x \in [0,1]$, 即 $f(x) = x, x \in [0,1]$.

例 59 求极限

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}
$$

解 令 $I(n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, 则

$$
\begin{aligned}
I(n)-I(n-1) &= \int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos(2nx)}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-2n}
\end{aligned}
$$

其中最后一步积分需要借助 Fourier 变换与反变换公式. 于是可得

$$
\lim_{n\to\infty} I(n) = I(0) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(I(k)-I(k-1)) = \frac{\pi}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\mathrm{e}^{-2k} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\mathrm{e}^2-1}
$$

例 60 [2011 中科院考研数学分析] 设 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}, \{b_k\}_{k\geqslant 0}, \{\xi_k\}_{k\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对于任意 $k \geqslant 0$, 有

$$
a_{k+1}^2 \leqslant (a_k+b_k)^2 - \xi_k^2
$$

(1) 证明: $\sum_{i=1}^{k}\xi_k^2 \leqslant \left(a_1 + \sum_{i=0}^{k} b_i\right)^2$;

(2) 若数列 $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ 还满足 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, 则 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 = 0$.

解 [原创]

(1) 由 $a_{k+1}^2 \leqslant (a_k+b_k)^2 - \xi_k^2$ 以及所有数列非负可知

$$
a_{k+1} \leqslant a_k + b_k \leqslant a_{k-1} + b_{k-1} + b_k \leqslant \cdots \leqslant a_1 + b_1 + \cdots + b_k
$$

于是

$$
\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left[(a_i+b_i)^2 - a_{i+1}^2\right] = a_1^2 - a_{k+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{k}a_ib_i + \sum_{i=1}^{k}b_i^2
$$

$$\leqslant a_1^2 + 2\sum_{i=1}^{k}(a_1 + b_1 + \cdots + b_{i-1})\, b_i + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 = \left(a_1 + \sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2$$

(2) 由 (1) 有

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(a_1 + \sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 = a_1^2 + 2a_1\sum_{i=1}^{k} b_i + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2$$

而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, 即 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2 < M$. 一方面有

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \leqslant \sqrt{k\sum_{i=1}^{k} b_i^2} < \sqrt{kM}$$

另一方面由 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum\limits_{i=N}^{N+p} b_i^2 < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 成立, 那么当 $k > N$ 时有

$$\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=N}^{k} b_i\right)^2$$

$$\leqslant 2\left(\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=N+1}^{k} b_i\right)^2\right)$$

$$< 2NM + 2(k-N)\varepsilon^2$$

由以上不等式, 利用夹逼准则可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^2 = 0$.

例 61 证明数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} n!n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 单调递减并求其极限.

解 首先有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n+\frac{1}{2}}} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{s_1+s_2}$$

其中

$$s_1 = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\,(n+1)^{2k}}, s_2 = \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2\,(k-1)}\right)\frac{1}{n^{k-1}}$$

显然 s_1, s_2 分别是两个收敛的级数, 注意到 s_1 是负项级数, s_2 是递减的交错级数, 因此两个式子的和都不超过它们的首项, 于是

$$s_1 + s_2 < -\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{12n^2} < n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

这就证明了数列 $\{a_n\}$ 的单减性, 利用 Stirling 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$$

例 62 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 对某个 $p > 0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = 1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p+1]{(p+1)n}\, a_n = 1$$

解 设 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n s_n = 1$ 意味着 $s_n \to \infty$ 而 $a_n \to 0$, 因此还有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n s_{n-1} = 1$, 于是

$$\begin{aligned} s_n^{p+1} - s_{n-1}^{p+1} &= \left(s_{n-1} + a_n^p\right)^{p+1} - s_{n-1}^{p+1} = s_{n-1}^{p+1}\left[\left(1 + \frac{a_n^p}{s_{n-1}}\right)^{p+1} - 1\right] \\ &\sim s_{n-1}^{p+1} \frac{(p+1) a_n^p}{s_{n-1}} = s_{n-1}^p (p+1) a_n^p \end{aligned}$$

由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{p+1}}{(p+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{p+1} - s_{n-1}^{p+1}}{p+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n s_{n-1})^p = 1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p+1]{(p+1)n}\, a_n = 1$$

例 63 设 f, g 都是 $[0,1]$ 上的实值连续函数, 且满足条件 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

以及

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 设

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = A, \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = B, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a, \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = b$$

下面我们证明

$$AB \geqslant AB^2 + Ba^2 \geqslant 4a^2b^2$$

首先由 Cauchy 不等式可知 $B \geqslant b^2$, 等号成立当且仅当 $g(x)$ 为常数, 这时 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ 意味着 $a = 0$, 原不等式显然成立, 因此我们假设 $B > b^2$. 利用 Cauchy 不等式可知对任意实数 t 有

$$\int_0^1 (f(x) + tg(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (f(x) + tg(x))\,\mathrm{d}x\right)^2$$

再由 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, 可知 $A + Bt^2 \geqslant a^2 + 2abt + b^2t^2$, 即

$$A \geqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\{a^2 + 2abt - (B - b^2)t^2\}$$

由于 $B > b^2$, 右边的多项式在 $t = \dfrac{ab}{B - b^2}$ 取最大值, 于是

$$A \geqslant a^2 + 2ab\frac{ab}{B - b^2} - \left(B - b^2\right)\frac{a^2b^2}{(B - b^2)^2} = a^2 + \frac{a^2b^2}{B - b^2}$$

这就证明了 $AB \geqslant Ab^2 + Ba^2$. 最后再根据 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} AB \geqslant Ab^2 + Ba^2 &= \int_0^1 (bf(x) + ag(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \left(\int_0^1 (bf(x) + ag(x))\,\mathrm{d}x\right)^2 = (2ab)^2 = 4a^2b^2 \end{aligned}$$

例 64 设 f 是 $[a,b]$ 上三阶可导的函数, 且 $f(a) = f(b)$, 证明

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^4}{192}M$$

其中 $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$.

解 记 $c = \dfrac{a+b}{2}$, 记 $P(x)$ 是在 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ 处插值的二次多项式, 则利用 Lagrange 插值公式可得

$$P(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

于是存在 $\theta(x) \in [a,b]$ 使得

$$f(x) = P(x) + \frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c) \tag{$*$}$$

且

$$\int_a^c P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{24}(5f(a)+8f(c)-f(b)),$$
$$\int_c^b P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{24}(-f(a)+8f(c)+5f(b))$$

而 $f(a)=f(b)$, 因此 $\int_a^c P(x)\mathrm{d}x = \int_c^b P(x)\mathrm{d}x = 0$, 因此

$$\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^c - \int_c^b \frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\right|$$
$$\leqslant \frac{M}{6}\int_a^b |(x-a)(x-b)(x-c)|\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^4}{192}M$$

$(*)$ 的证明:如果 $x=a,b,c$ 结论显然成立, 当 $x \neq a,b,c$ 时, 令

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x)-P(x)]\frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

而 $g(a)=g(b)=g(c)=g(x)=0$, 因此存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in (a,b)$, 使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = g'(\xi_3) = 0$, 因此存在 η_1,η_2 使得 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$, 进而存在 $\theta(x) \in (a,b)$ 使得 $g'''(\theta(x))=0$, 得证.

例 65 设 f 是 $[-1,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, $f(0)=0$, 证明

$$\int_{-1}^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 10\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 设 $g(x) = \begin{cases}(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ (x-1)^2, & x\in[0,1]\end{cases}$, 则

$$g(-1)=g(1)=g'(-1)=g'(1)=0,\ g(0)=1,\ g''(x)=2, x\in[-1,1]\backslash\{0\}$$

且

$$\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (x+1)^4\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x-1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

于是根据 $f(0)=0$ 可得

$$\int_0^1 g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)f'(x)]\big|_0^1 - \int_0^1 g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -f'(0) - \left[g'(x) f(x)\right]\Big|_0^1 + \int_0^1 g''(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f'(0) + 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

同理得

$$
\int_{-1}^0 g(x)f''(x)\mathrm{d}x = f'(0) + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x
$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5}\int_{-1}^1 \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \int_{-1}^1 f''(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left(\int_{-1}^1 g(x) f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(2\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}
$$

得证.

例 66 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是非负实数, 证明

$$
\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i}\right)^4 \leqslant 2\pi^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j} \sum_{i,j}^n \frac{x_i x_j}{(i+j)^3}
$$

解 设 $f(x), xf(x) \in L^2([0,+\infty))$, 先证明如下不等式

$$
\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^4 \leqslant \pi^2 \int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x
$$

解 设 $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x, v = \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x$, 则利用 Cauchy 不等式得

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v+ux^2}}\sqrt{v+ux^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{v+ux^2}\mathrm{d}x \left(v\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x + u\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{uv}}(uv+uv) = \pi\sqrt{uv}
\end{aligned}
$$

这就证明了原式.

现在令 $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{e}^{-ix}$, 对任意正数 a, 有

$$
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}, \quad \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{2}{a^3}
$$

因此

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-it}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}$$

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t = 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{(i+j)^3}$$

然后利用上述积分不等式得证.

例 67 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y):x>0,y>0\}$ 上连续, 证明不等式

$$\left(\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^4 \leqslant \frac{\pi^4}{16}\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中假定以上每个积分都是收敛的.

解 令 $\lambda>0, g(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{\lambda+(x^2+y^2)^2}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D [1-g(x,y)]\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{g(x,y)}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant \left(\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\\ &\quad \left(\iint\limits_D \frac{g^2(x,y)}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

计算可知

$$\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{\lambda}$$

现在取

$$\lambda = \frac{\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac14}$$

原不等式得证.

例 68 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}=\frac{\mathrm{e}}{2}$$

解 首先注意到当 $n\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}&=\frac{1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)n!}\\&=\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^2+1}\left(\frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}-\frac{1}{n!n}\right)\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!n\,(n+1)}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]\\&=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

例 69 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 令 $I\left(a\right)=\int_0^{a}\int_0^{a}|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $I=\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$.

$$\begin{aligned}I(a)&=2\int_0^{a}\int_0^{x}|(\ln x-\ln y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{a}\left(\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

第二个积分分部积分可得

$$I\left(a\right)=2\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^a \mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{-a}\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{a\to\infty}\mathrm{e}^{-a}\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=0$, 于是

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln\frac{t}{2}\mathrm{d}x=2\ln 2\end{aligned}$$

例 70 给定 $s_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 用 $s_{n+1}=\sin s_n$ 定义数列 $\{s_n\}$, 证明 $n^2s_n^2-3n+\dfrac{9}{5}\ln n$ 收敛.

解 显然 $\{s_n\}$ 是单调递减趋于 0 的, 首先有

$$s_{n+1}=s_n\left(1-\frac{s_n^2}{6}+\frac{s_n^4}{120}+O\left(s_n^6\right)\right)$$

令 $u_n=\dfrac{1}{s_n^2}$, 则

$$u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{3u_n}+\frac{1}{15u_n^2}+O\left(u_n^{-3}\right)\right)\tag{$*$}$$

由于 $u_n\to\infty$, 由 (*) 可知对充分大的 n 由 $u_{n+1}-u_n>\dfrac{1}{3}$, 于是 $u_n>\dfrac{n}{3}-A$ 对某个常数 A 成立. 因此 $u_n=\dfrac{n}{3}+O(\ln n)$, 于是 $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{3}{n}+O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$. 故

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{5n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}<\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$, 因此

$$u_n=\frac{n}{3}+\frac{\ln n}{5}+K+o\left(1\right)$$

对某个常数 K 成立, 则

$$n^2s_n^2=\frac{n^2}{u_n}=3n-\frac{9\ln n}{5}-9K+o\left(1\right)$$

因此 $n^2s_n^2-3n+\dfrac{9}{5}\ln n\to -9K$.

例 71 设 $b>a>0$, $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续, 且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$, 证明

$$0\leqslant\frac{\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2$$

解 [原创] 左边部分比较简单, 利用 $(f(x)+a)(b-f(x))\geqslant 0$, 两边在 $[0,1]$ 上积分得

$$\begin{aligned}
0&\leqslant \int_0^1 (f(x)+a)(b-f(x))\,\mathrm{d}x\\
&=ab-\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+(b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

要证明右边部分, 首先利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}=\sqrt{ab}$$

下面只需要证明

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{(a+b)^2}{4(b-a)}, \text{即 } (a+b)^4-16ab(b-a)^2\geqslant 0$$

令 $t=\dfrac{b}{a}>1$, 则 $(t+1)^4-16t(t-1)^2=\left(t^2-6t+1\right)^2\geqslant 0$, 证毕.

例 72 定义数列 $a_{m,n}$

$$\frac{1}{1-u-v+2uv}=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{m,n}u^m v^n$$

证明 $(-1)^j a_{2j,2j+2}=\dfrac{1}{j+1}\dbinom{2j}{j}$.

解 首先有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u-v+2uv}&=\frac{1}{(1-u)(1-v)}\frac{1}{1+\frac{uv}{(1-u)(1-v)}}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k u^k v^k}{(1-u)^{k+1}(1-v)^{k+2}}\\
&=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+i}{k}\binom{k+j}{k}u^{k+i}v^{k+j}\\
&=\sum_{m,n}^{\infty}u^m v^n\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

因此得到 $a_{m,n}=\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n}{k}$, 注意到这个卷积表示展开式 $(1+x)^m(1-x)^n$ 中 x^m 的系数. 现在 $m=2j, n=2j+2$, 母函数为 $(1-x^2)^{2j}(1-x)^2$, 因此 x^{2j} 的

系数为

$$a_{2j,2j+2}=(-1)^j\binom{2j}{j}+(-1)^{j-2}\binom{2j}{j-1}=\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{2j}{j}$$

例 73 设 $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}$$

解 [原创] 首先利用分部积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}\,(n\pi)&=\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\,(\ln x)=-n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\,\mathrm{d}x\\&=-n\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}\,(x\ln x-x)\\&=n\left[(-1)^{n-1}(\pi\ln\pi-\pi)-n\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

于是我们可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(\pi\ln\pi-\pi)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, 把后一部分式子再分部积分得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x, & x\in(0,\pi]\\ 0, & x=0\end{cases}$, 作偶对称以后再作 2π 周期延拓, 则 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数为

$$\widetilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\mathrm{d}x$, 根据 Fourier 级数收敛定理可知

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)=0$$

而 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{11}{18}\pi^2-\dfrac{1}{3}\pi^2\ln\pi$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{\pi}{4}a_0=\frac{\pi^3}{12}\ln\pi-\frac{11}{72}\pi^3$$

于是最后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}=\frac{\pi^2}{12}(\pi\ln\pi-\pi)-\left(\frac{\pi^3}{12}\ln\pi-\frac{11}{72}\pi^3\right)=\frac{5\pi^3}{72}$$

同样道理我们还能得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}=-\frac{\pi^2}{6}(\pi\ln\pi-\pi)-\left(\frac{2\pi^3}{9}-\frac{\pi^3}{6}\ln\pi\right)=-\frac{\pi^3}{18}$$

只不过这时需要利用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 和 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=f(\pi)$ 即可.

例 74 设 $\mathrm{Si}(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n}\right)^2$$

解 同上, 先分部积分得

$$\mathrm{Si}(n\pi)=-n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2$$

考虑函数 $f(x)=\ln x, x\in(0,\pi)$, 作偶函数延拓和 π 周期延拓得到的余弦级数为

$$\widetilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos nx\ln x\mathrm{d}x, a_0=2\ln\pi-2$, 由 Parseval 定理得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\ln^2 x\mathrm{d}x=4-4\ln\pi+2\ln^2\pi$$

因此我们最后得到

$$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^\infty\left(\int_0^\pi\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{2}$$

注: 利用上述方法我们还可以得到一些副产品

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{Si}(n\pi)}{n}=\frac{\pi}{2},\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^5}=\frac{269}{43200}\pi^5,\quad\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{Si}(n\pi)}{n^5}=\frac{4}{675}\pi^5$$

例 75 定义数列 $\{X_n\}$: $X_0=0, X_1=1, X_2=0, X_3=1$, 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$X_{n+3}=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}X_{n+2}+(n^2+n+1)X_{n+1}-\frac{n+1}{n}X_n$$

证明对任意 $n\geqslant 0$, X_n 是完全平方数.

解 定义数列 $\{c_n\}$: $c_0=0, c_1=1, c_{n+2}=nc_{n+1}+c_n, n\geqslant 0$, 则 $c_{n+3}=(n+1)c_{n+2}+c_{n+1}$, 且 $c_n=c_{n+2}-nc_{n+1}$, 平方得到

$$c_{n+3}^2=(n+1)^2c_{n+2}^2+c_{n+1}^2+2(n+1)c_{n+2}c_{n+1}$$

$$c_n^2=c_{n+2}^2+n^2c_{n+1}^2-2nc_{n+2}c_{n+1}$$

消去因子 $c_{n+2}c_{n+1}$ 得到

$$c_{n+3}^2=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}c_{n+2}^2+(n^2+n+1)c_{n+1}^2-\frac{n+1}{n}c_n^2$$

而 $c_2=0, c_3=1$, 因此 c_n^2 和 X_n 满足相同的递推关系和初值条件, 于是 $X_n=c_n^2$.

例 76 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且在 a 点 n 阶可导. 对任意 $x\in(a,b)$, 由积分中值定理, 存在 $c_x\in(a,x)$ 使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(c_x)(x-a)$$

如果 $f^{(k)}(a)=0, k=1,\cdots,n-1$, 但 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

解 这个题目解答见 48 题.

例 77 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调下降, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$$

解 显然 $xf(x)\downarrow 0$, 否则原积分一定发散. 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 当 A 充分大时,

$$\varepsilon>\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} xf(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}\geqslant Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}Af(A)\ln A$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$.

例 78 将方程 $u^2-\frac{u^3}{3}=k\left(0<k<\frac{4}{3}\right)$ 的两个正根记为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$. 求

$$\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\mathrm{d}u}{4-3k}$$

解 [原创] 记原方程的三个根为 α,β,γ, 注意到方程 $u^2-\frac{u^3}{3}=\frac{4}{3}$ 的三个根分别为 $-1,2,2$, 因此当 $k\to\frac{4}{3}$ 时等价于 $\alpha,\beta\to 2,\gamma\to-1$. 利用三次方程 Vieta 定理得

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0,\alpha\beta\gamma=-3k$$

于是可得

$$\alpha+\beta=3-\gamma,\alpha\beta=\frac{-3k}{\gamma}=\gamma^2-3\gamma$$

故

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(3-\gamma)^2-4\left(\gamma^2-3\gamma\right)\\&=9+6\gamma-3\gamma^2=3(\gamma+1)(3-\gamma).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\mathrm{d}u}{4-3k}&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{(u-\gamma)(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}\\&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{3(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\gamma\to-1}\frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{8}(\beta-\alpha)^2}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{8}\lim_{\gamma\to-1}\frac{3(\gamma+1)(3-\gamma)}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

例 79 设函数 $f:[1,+\infty)\to(\mathrm{e},+\infty)$ 是单调增函数, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = +\infty$.

(1) 证明 $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)} = \infty$.

(2) 给出一个满足上述条件的函数 f, 但是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))}$ 收敛.

解

(1) 反证法, 假定 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)} < +\infty$, 利用变量代换 $x=\mathrm{e}^t$ 可得 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\ln f(\mathrm{e}^t)} < +\infty$, 根据函数 f 的单调性可知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)} = 0$. 那么当 x 充分大时有 $\frac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)} < \frac{1}{2}$, 因此 $\frac{\mathrm{e}^x}{f(\mathrm{e}^x)} < \mathrm{e}^{-x}$, 从而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{f(\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t < +\infty,$$

矛盾.

(2) 设 $a_n = \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\right), n=0,1,\cdots$, 当 $a_{n-1}\leqslant x < a_n$ 时, 令 $f(x)=a_n$, 则

$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n} = +\infty$$

而另一方面,

$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n}$$
$$< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^n} < +\infty.$$

例 80 设函数 f 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 单增, 分部积分得

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^n x\mathrm{d}F(x) = F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, 其次利用 F 的单调性可得

$$\frac{F(0)+\cdots+F(n-1)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{F(1)+\cdots+F(n)}{n}.$$

而根据 Stolz 定理可知, 上式左右两边均等于 $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$, 因此原极限为零.

例 81 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续且积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一致有界. 即存在 $M>0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M,\quad \forall x\in[a,+\infty)$$

证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

解 由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 故存在 $\delta>0$, 如果 $|t-s|<\delta$, 则 $|f(s)-f(t)|<1$. 现在假定 f 无界, 则存在数列 $\{a_n\}$ 使得 $a_{n+1}>a_n+\delta$ 且 $|f(a_n)|\geqslant n$. 根据假设有

$$\left|\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right|-\left|\int_a^{a_n-\frac{\delta}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right|-M$$

进一步有 $|f(t)-f(a_n)|<1$ 对 $t\in\left[a_n-\dfrac{\delta}{2},a_n\right]$ 都成立. 因此

$$\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant(|f(a_n)|-1)\frac{\delta}{2}\geqslant(n-1)\frac{\delta}{2},\quad\left|\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant(n-1)\frac{\delta}{2}-M$$

矛盾.

例 82 如果 $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 也收敛.

解 首先由分部积分得

$$\int_a^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t=f(x)f'(x)-f(a)f'(a)-\int_a^x\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

根据不等式 $(f(x))^2+\left(f''(x)\right)^2\geqslant 2\left|f(x)f''(x)\right|$ 可知积分 $\int_a^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 如果当 $x\to+\infty$ 时积分 $\int_a^x\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x)=+\infty$, 而

$$f^2(x)-f^2(a)=\frac{1}{2}\int_a^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

这样就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=+\infty$, 矛盾, 因此 $\int_a^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 收敛.

例 83 设 f,g 都是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, 且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2, x\in[a,b]$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4}$$

解 利用变量替换 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ 知只需要考虑 $a=0,b=1$ 的情形即可. 令 $F=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $G=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, 以及

$$D(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-FG$$

由 Cauchy 不等式得

$$D(f,f)=\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 0.$$

另一方面,

$$D(f,f)=(M_1-F)(F-m_1)-\int_0^1(M_1-f(x))(f(x)-m_1)\,\mathrm{d}x,$$

这就意味着 $D(f,f)\leqslant(M_1-F)(F-m_1)$. 显然 $D(f,g)=\int_0^1(f(x)-F)(g(x)-G)\,\mathrm{d}x$, 由 Cauchy 不等式得

$$[D(f,g)]^2\leqslant\int_0^1(f(x)-F)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1(g(x)-G)^2\,\mathrm{d}x=D(f,f)\,D(g,g).$$

因此

$$[D(f,g)]^2\leqslant(M_1-F)(F-m_1)(M_2-G)(G-m_2)\leqslant\frac{(M_1-m_1)^2}{4}\cdot\frac{(M_2-m_2)^2}{4}.$$

例 84 设

$$\mathcal{A}=\left\{f\in\mathcal{R}([0,1]):\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=2\right\}.$$

求 $\min\limits_{f\in\mathcal{A}}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

解 如果 $f\in\mathcal{A}$, 则对任意实数 t 由 Cauchy 不等式得

$$(2+3t)^2=\left(\int_0^1 f(x)(x+t)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1(x+t)^2\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}$ 对任意实数 t 均成立, 注意到 $\max_{t\in\mathbb{R}} \frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}=12$, $t=0$ 时取等, 此时 $f(x)=6x$.

例 85 设 f 在 $[0,1]$ 上非负递减, 证明对任意非负实数 a,b 有

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^{2b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 借用 Lebesgue-Stieltjes 积分, 首先分部积分得

$$\begin{aligned}
&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\
=&\left(f(1)-\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\
=&f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\left(\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\
\leqslant&f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\int_0^1 x^{2a+1}\mathrm{d}f(x)\int_0^1 x^{2b+1}\mathrm{d}f(x)
\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 x^k\mathrm{d}f(x)=f(1)-k\int_0^1 x^{k-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 可得

$$\begin{aligned}
&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\
\leqslant&(2a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x\,(2b+1)\int_0^1 x^{2b} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&+f(1)\left(2(a+b+1)\int_0^1 x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x-(2a+1)\int_0^1 x^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x-(2b+1)\int_0^1 x^{2b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

要证明 $\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x\leqslant 0$, 分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x\\
=&-\int_0^1\left(2x^{a+b+1}-x^{2a+1}-x^{2b+1}\right)\mathrm{d}f(x)\\
=&\int_0^1\left(x^a-x^b\right)^2 x\,\mathrm{d}f(x)\leqslant 0
\end{aligned}$$

这里因为 f 是递减的.

例 86 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解 [向禹] 首先由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0, \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n) < \infty$. 再由 $a_{n+1} \leqslant (1+c_n)a_n - b_n\Phi(a_n)$ 可得

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)} \leqslant \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+c_k)} - \frac{b_n\Phi(a_n)}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)}$$

这说明数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+c_k)\right\}$ 单调递减并且有下界 0, 因此数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+c_k)\right\}$ 收敛, 也就是数列 $\{a_n\}$ 收敛, 自然有界. 设 $a_n < K$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

如果 $a > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$. 再根据 $a_{n+1} \leqslant (1+c_n)a_n - b_n\Phi(a_n)$ 可得 $b_n \leqslant \dfrac{(1+c_n)a_n - a_{n+1}}{\Phi(a_n)}$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ 意味着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+c_n)a_n - a_{n+1}}{\Phi(a_n)} = \infty$. 由 Cauchy 收敛原理知对任意实数 $M > 0$ 以及正整数 $k > N$, 存在 $p \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n=k}^{k+p}\frac{(1+c_n)a_n - a_{n+1}}{\Phi(a_n)} > M.$$

而此时 $\Phi(a_n) > \Phi\left(\dfrac{a}{2}\right) = A > 0$, 因此

$$M < \sum_{n=k}^{k+p}\frac{(1+c_n)a_n - a_{n+1}}{\Phi(a_n)} < \frac{1}{A}\sum_{n=k}^{k+p}\left[(1+c_n)a_n - a_{n+1}\right] < \frac{1}{A}\left(a_k - a_{k+p}\right) + K\sum_{n=k}^{k+p} c_n$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

例 87 求数列

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,\mathrm{d}x,\ b_{n+1} = \int_0^1 \operatorname{mid}(x, a_n, c_n)\,\mathrm{d}x,\ c_{n+1} = \int_0^1 \max(x, a_n, b_n)\,\mathrm{d}x$$

的极限.

解 显然 $\min(x, b_n, c_n) \leqslant x \leqslant \max(x, a_n, b_n)$, 所以如果 $\min(x, a_n, c_n) = x$, 我们有

$$\min(x, b_n, c_n) \leqslant \operatorname{mid}(x, a_n, c_n) \leqslant (x, a_n, b_n) \tag{$*$}$$

如果 $\operatorname{mid}(x, a_n, c_n)$, 则要么 $x \leqslant a_n$ 要么 $c_n \leqslant a_n$, 所以 $a_n \leqslant \max(x, a_n, c_n) = c_n$. 则 (*) 式恒成立, 积分可知 $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant c_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$. 现在有

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

类似地可得 $c_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}b_{n+2} &= \int_0^1 \operatorname{mid}(x, a_{n+1}, c_{n+1})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \max(x, a_{n+1})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \min(x, c_{n+1})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

同理还有 $b_{n=2} \geqslant \frac{3}{8}$. 由于 $\frac{3}{8} \leqslant b_{n+2} \leqslant c_{n+2}, a_{n+2} = \int_0^1 \min(x, b_{n+2}, c_{n+2})\,\mathrm{d}x > 0$, 类似有 $c_{n+2} < 1$.

现在假定 n 充分大使得 $0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < 1$.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \int_0^{b_n} x\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 b_n\mathrm{d}x = \frac{2b_n - b_n^2}{2} \\ b_{n+1} &= \int_0^{a_n} a_n\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{c_n} x\mathrm{d}x + \int_{c_n}^1 c_n\mathrm{d}x = \frac{a_n^2 - c_n^2 - 2c_n}{2} \\ c_{n+1} &= \int_0^{b_n} b_n\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 x\mathrm{d}x = \frac{b_n^2 + 1}{2}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}b_{n+2} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2b_n - b_n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_n + 1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b_n + 1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(2b_n - 1)\left(-2b_n^2 + 2b_n + 1\right)}{8} = b_n - \frac{(2b_n - 1)^2 + 5(2b_n - 1)}{16}\end{aligned}$$

由于 $0 < 2b_n^2 + 2b_n + 1, 0 < b_n < 1$, 这要么 $\frac{1}{2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_n$ 要么 $\frac{1}{2} > b_{n+2} > b_n$. 因此可得

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \frac{1}{2}$$

同时

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2b_n - b_n^2}{2} = \frac{3}{8}, \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + 1}{2} = \frac{5}{8}$$

例 88 证明:对任意 $\alpha, \beta, 0 < \alpha < \beta < \pi$,

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\beta}{\cos\theta - \cos\alpha}}\mathrm{d}\theta + \int_{\beta}^{\pi} \sqrt{\frac{\cos\beta - \cos\theta}{\cos\alpha - \cos\theta}}\mathrm{d}\theta = \pi$$

解 令 $x = \cos\theta, a = \cos\alpha, b = \cos\beta, -1 < b < a < 1$, 待证式等价于

$$\int_{-1}^{b} \sqrt{\frac{b - x}{a - x}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_a^1 \sqrt{\frac{x - b}{x - a}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi$$

注意到如果 $b=a$ 的话上式显然成立，下面证明上式左边是关于 b 的导数为零即可，即

$$\int_{-1}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)(1-x^2)}}-\int_{a}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x-b)(1-x^2)}}=0 \qquad (*)$$

利用变换 $y=\dfrac{\lambda x+1}{x+\lambda}$，取 λ 使得 $(a+b)\lambda^2+2(ab+1)\lambda+(a+b)=0,|\lambda|>1$. 由于此二次式的判别式为 $(1-a^2)(1-b^2)>0$，λ 为实数. 取 $k=\dfrac{\lambda a+1}{a+\lambda}=-\dfrac{\lambda b+1}{b+\lambda}$，则 $0<k<1$ 且区间 $[-1,b],[a,1]$ 分别包含在 $[-1,k],[k,1]$ 内.$(*)$ 式的第一个积分变成

$$\left(\frac{\lambda^2-1}{(\lambda+a)(\lambda+b)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{-k}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y^2-k^2)(1-y^2)}}$$

第二个积分变换后形式也一样，只是积分区间是 $[k,1]$，二者的差为零，这就说明左边与 b 无关，等式得证.

例 89 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}.$$

解 考虑三重对数函数

$$\mathrm{Li}_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3},\quad |x|\leqslant 1.$$

则三重对数满足 Spence 公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)+\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(1-x)-\mathrm{Li}_3(1)\\=&\frac{\pi^2}{6}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln^2(1-x)(\ln(1-x)-3\ln x).\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{Li}_3(x)=\frac{x}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(1-u)}{1-x+xu}\mathrm{d}u.$$

把 Spence 公式中左边的四个式子都用上述积分代替.

令 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，我们注意到此时有 $(x-1)^2=x$ 以及 $\dfrac{x}{x-1}=x-1$，再令 $v=1-x$，由 Spence 公式得到

$$\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(v)+\mathrm{Li}_3(-v)=\mathrm{Li}_3(1)+\frac{\pi^2}{6}\ln v-\frac{5}{6}\ln^3 v.$$

由三重对数的定义, 我们得到

$$\mathrm{Li}_3\left(v\right)+\mathrm{Li}_3\left(-v\right)=\frac{2}{2^3}\mathrm{Li}_3\left(v^2\right)=\frac{1}{4}\mathrm{Li}_3\left(x\right).$$

注意到 $v=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\mathrm{Li}_3(1)=\zeta(3)$, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}=\frac{2}{15}\left\{6\zeta\left(3\right)+\pi^2\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}-5\ln^3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}.$$

例 90

(1) 设 $\{x_n\}$ 是严格递减的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}(x_n-x_{n+1})$$

发散.

(2) 设 $\{y_n\}$ 是单调递增的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_{n+1}}(y_{n+1}-y_n)$$

发散

解 首先我们假定 $x_{n+1}/x_n\leqslant 1/2$ 对无穷多个 n 成立, 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x_n}\left(x_n-x_{n+1}\right)\geqslant\frac{1}{2x_{n+1}}\left(x_n-x_{n+1}\right)$$

这显然发散.

否则假定 $x_{n+1}/x_n>1/2$ 对充分大的 n 成立, 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{x_n}\left(x_n-x_{n+1}\right)\geqslant\frac{1}{2x_{n+1}}\left(x_n-x_{n+1}\right)$$

注意到 $1/x$ 是单调递减函数, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_{n+1}}\left(x_n-x_{n+1}\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n+1}}^{x_n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{x_1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$$

第二个问题证明同理, 或者令 $y_n=1/x_n$ 即可.

例 91 计算积分

$$\int_0^3\frac{\arctan\left(x\right)}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\mathrm{d}x$$

解 这题非常有意思, 作一种技巧换元 $x=\dfrac{3-t}{1+3t}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{\arctan(x)}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x&=\int_0^3\frac{\arctan\left(\frac{3-t}{1+3t}\right)}{\left(\frac{3-t}{1+3t}+1\right)\left(\frac{3-t}{1+3t}+2\right)}\frac{10}{(1+3t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^3\frac{\arctan(3)-\arctan(t)}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\arctan(3)}{2}\int_0^3\frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\arctan(3)}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right)\end{aligned}$$

例 92 证明

$$\int_0^1\frac{\arctan(x)}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{16}$$

解 记 $H_k=\sum\limits_{j=1}^k\dfrac{1}{j}, k\geqslant 1$. 对任意 $x\in(0,1)$ 有

$$\begin{aligned}\arctan(x)\ln\left(1+x^2\right)&=\frac{\mathrm{i}}{2}(\ln(1-\mathrm{i}x)-\ln(1+\mathrm{i}x))(\ln(1-\mathrm{i}x)+\ln(1+\mathrm{i}x))\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\ln^2(1-\mathrm{i}x)-\ln^2(1+\mathrm{i}x)\right)\\&=-\mathrm{Im}\left(\ln^2(1-\mathrm{i}x)\right)=-2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k(\mathrm{i}x)^{k+1}}{k+1}\right).\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\begin{aligned}-\ln(1-t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}&\Rightarrow-\frac{\ln(1-t)}{1-t}=\sum_{k=1}^{\infty}H_kt^k\\&\Rightarrow\ln^2(1-t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_kt^{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\arctan(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x}\mathrm{d}x&=-2\mathrm{Im}\left(\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k\mathrm{i}^{k+1}x^k}{k+1}\mathrm{d}x\right)\\&=-2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k\mathrm{i}^{k+1}}{k+1}\int_0^1x^k\mathrm{d}x\right)\\&=-2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan(x)\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}\ln(1-x)}{2k+1}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^1 x^{2k}\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}\left(x^{2k+1}-1\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\int_0^1 \frac{x^{2k+1}-1}{x-1}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k H_{2k+1}}{(2k+1)^2} = -\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{k+1}\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x &= -2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right) + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{k+1}\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(k+1)^3}\right) = 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{k-1}}{k^3}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.\end{aligned}$$

例 93 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明: 存在数列 a_n, b_n, 使得 $u_n = a_n b_n$, 且

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界;

(b) 当 $n \to \infty$ 时, b_n 单调递减趋于零.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则可知存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $m > n > N_1$, 有 $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < 1$.

那么归纳可知对 $p \geqslant 2$ 都存在 $N_p \geqslant N_{p-1}+1$, 使得对任意 $m > n \geqslant N_p$, 有 $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \frac{1}{p^3}$. 那么这样就定义了一个单调递增趋于无穷大的数列 $\{p_n\}$. 令

$$b_k = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant N_1 \\ \dfrac{1}{n}, & p_n < k \leqslant p_{n+1} \end{cases} \tag{1}$$

以及

$$a_n = \frac{u_n}{b_n}, n \geqslant 1 \tag{2}$$

显然 $u_n = a_n b_n$, 且 b_n 是满足条件 (1) 的, 下面只需证明 a_n 满足条件 (2), 也就是证明对任意 $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ 有界. 当 $1 \leqslant N \leqslant N_1$ 时, $a_n = u_n$, 于是存在常数 $L > 0$, 使得对这样的 N 有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} u_n < L.$$

如果 $N > N_1$, 存在 n 使得 $p_n < N < P_{n+1}$, 由定义 (1) 和 (2) 可得 (其中 $N_0 = 1$)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{N} a_i\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=N_k}^{N_{k+1}} a_i + \sum_{i=N_n}^{N} a_i\right| \\
&< \left|\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=N_k}^{N_{k+1}} a_i\right| + \left|\sum_{i=N_n}^{N} a_i\right| < L + \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{1}{k^3} + n \frac{1}{n^3} \\
&= L + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < L + 2.
\end{aligned}$$

证毕.

例 94 设 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ 是单增无穷正数列, 且存在常数 K, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 < K a_n^2 (n \geqslant 1)$. 求证: 存在常数 K', 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k < K' a_n$.

解 [原创] 首先由条件得

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{m=2}^{n} \sum_{k=1}^{m-1} a_k^2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} a_k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, a_k^2} \\
&< \boxed{\sum_{m=2}^{n} K a_m^2} = K \left(\sum_{m=2}^{n-1} a_m^2 + a_n^2\right) \\
&< K\left(K a_n^2 + a_n^2\right) = \left(K^2 + K\right) a_n^2 = K_1 a_n^2 \ \ (K_1 = K^2 + K).
\end{aligned}$$

进一步有

$$\boxed{\sum_{m=2}^{n} \sum_{k=1}^{m-1} (m-k)\, a_k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} (m-k)\, a_k^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a_k^2<\boxed{\sum_{k=2}^{n}K_1a_k^2}\\
&=K_1\left(\sum_{m=2}^{n-1}a_k^2+a_n^2\right)<K_2a_n^2\ \ (K_2=K_1^2+K_1)
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 不等式又有

$$
\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(n-k)(n-k+1)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a_k^2\right)\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2.
$$

而

$$
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(n-k)(n-k+1)}=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)<2.
$$

那么取 $K'=\sqrt{2K_2}$ 就有

$$
\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2<\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)a_k^2<2K_2a_n^2=\left(K'a_n\right)^2
$$

例 95 求极限

$$
\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+1}{\mathrm{e}-1}\right).
$$

解 对固定的 k, 我们有

$$
\begin{aligned}
\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}&=\left(1-\frac{k}{2n}+\frac{k^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n\\
&=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{k}{2n}+\frac{k^2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&=\exp\left(n\left(-\frac{k}{2n}-\frac{k^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}\left(1-\frac{k^2}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+1}{\mathrm{e}-1},\quad\sum_{k=1}^{\infty}k^2\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}=\frac{\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}}{\left(\sqrt{\mathrm{e}}-1\right)^3}
$$

因此

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+1}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{12n}\frac{\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}}{\left(\sqrt{\mathrm{e}}-1\right)^3}+o\left(\frac{1}{n}\right).
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{\sqrt{e}+1}{e-1}\right)=-\frac{e+\sqrt{e}}{12\left(\sqrt{e}-1\right)^3}$$

例 96 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x,$$

并且当且仅当 $f(x)=cx$ 时等号成立, 其中 c 是常数.

解

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_0^1\left(\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^x\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

从柯西不等式的取等条件来看, 等号成立当且仅当 $f'(x)\equiv c$ 恒成立, 又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)=cx$.

例 97 求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!}$.

解

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n}B(n,n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1-4x(1-x))}{x(1-x)}\mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x\\
&= -2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{x}\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{1-x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\mathrm{Li}_2(1)=-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-2x)}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{2-t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n \ln t \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

于是最后得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!} = \frac{\pi^2}{2}$.

例 98 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)=f(1)=0$ 的连续可微函数, 求证不等式

$$
\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x,
$$

并且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 这里 A 是常数.

解

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(1-2x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((1-2x)f(x)\,|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (1-2x)^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $f'(x)=A(1-2x)$, 即 $f(x)=Ax(1-x)$.

例 99 设 f 是一个 n 次多项式, 且满足条件 $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0, k=1,2,\cdots,n$, 证明:

$$
\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.
$$

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, a_n\neq 0$. 对任意 $t>-1$, 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^t f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(a_0x^t + a_1x^{t+1} + \cdots + a_nx^{t+n}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a_0}{t+1} + \frac{a_1}{t+2} + \cdots + \frac{a_n}{t+n+1} = \frac{p(t)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n+1)},
\end{aligned}
$$

其中 $p(t)$ 是 t 的 n 次多项式. 根据题意有 $p(1)=p(2)=\cdots=p(n)=0$, 因此 $p(t)=A(t-1)(t-2)\cdots(t-n)$. 而

$$
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{p(0)}{(n+1)!} = \frac{A(-1)^n n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n A}{n+1},
$$

所以 $A=(-1)^n(n+1)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 另一方面, 在等式

$$\frac{a_0}{t+1}+\frac{a_1}{t+2}+\cdots+\frac{a_n}{t+n+1}=\frac{p(t)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n+1)}$$

两边乘以 $t+1$, 再令 $t=-1$ 可得

$$a_0=\frac{p(-1)}{n!}=\frac{(-1)^n(n+1)!A}{n!}=(-1)^n(n+1)A=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)f(x)\,\mathrm{d}x\\&=a_0\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

例 100 Pell-Lucas 数 Q_n 满足 $Q_0=2, Q_1=2$, 且 $Q_n=2Q_{n-1}+Q_{n-2}, n\geqslant 2$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_n}\right)\arctan\left(\frac{2}{Q_{n+1}}\right)=\frac{\pi^2}{32}.$$

解 利用特征根方法, 我们很容易得到 $Q_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$, 因此有

$$\begin{aligned}\arctan\frac{2}{Q_{2n}}&=\arctan\frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}\\&=\arctan\frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}}\\&=\frac{\pi}{2}-\left(\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}+\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right)\\&=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1}-\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\\\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n+1}}\right)&=\arctan\frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}\\&=\arctan\frac{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}\\&=\frac{\pi}{2}-\left(\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}+\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\\&=2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

记 $a=\sqrt{2}-1$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_n}\right)\arctan\left(\frac{2}{Q_{n+1}}\right)\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n}}\right)\left[\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n-1}}\right)+\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n+1}}\right)\right]\\=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan a^{2n-1}-\arctan a^{2n+1}\right)\left(\arctan a^{2n-1}+\arctan a^{2n+1}\right)\\=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan^2 a^{2n-1}-\arctan^2 a^{2n+1}\right)\\=&2\arctan^2\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

例 101 对一切单调递增的正实数序列 $x_1,x_2,\cdots,$, 求出下式的最小上界:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{\sqrt{\left(1+x_{n+1}\right)\left(1+x_n\right)}}.$$

解 设 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\cdots<\dfrac{\pi}{2}$, 令 $x_n=\tan^2\theta_n, n\geqslant 1$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{\sqrt{\left(1+x_{n+1}\right)\left(1+x_n\right)}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_n}{\sec\theta_{n+1}\sec\theta_n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\theta_{n+1}\cos\theta_n-\sin\theta_n\cos\theta_{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\end{aligned}$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 上是凹函数, 利用 Jensen 不等式, 可得部分和满足

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\leqslant N\sin\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\right)=N\sin\frac{\theta_{n+1}-\theta_1}{2N}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

等号成立当且仅当 $\theta_{N+1}-\theta_N=\theta_N-\theta_{N-1}=\cdots=\theta_2-\theta_1$ 且 $N\to\infty$. 因此级数的最小上界即为 $\dfrac{\pi}{2}$.

例 102 计算积分

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+y^2\right)}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5\pi^2}{24}-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

解 记 $I(a)=\int_0^1\int_0^1\frac{\ln\left(1+ax^2\right)-\ln\left(1+ay^2\right)}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $I(0)=0$, 且

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{\left(1+ax^2\right)\left(1+ay^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{(1+ax^2)(1+ay^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\frac{x}{1+ax^2}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+ay^2}\\&=\frac{\arctan\left(\sqrt{a}\right)\ln(1+a)}{a\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I&=I(1)=\int_0^1\frac{\arctan\left(\sqrt{a}\right)\ln(1+a)}{a\sqrt{a}}\mathrm{d}a\\&=2\int_0^1\frac{\arctan t\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^1\arctan t\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\\&=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^1\left(\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t\left(1+t^2\right)}+\frac{\arctan t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{5\pi^2}{24}-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2\end{aligned}$$

其中最后分部积分之后得到的积分属于基本积分了.

例 103 计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\ln x}\int_0^x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\ln x}\int_0^x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\ln x}\int_0^x\int_0^v\frac{\mathrm{e}^v-\mathrm{e}^u}{v-u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)}\int_0^x\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^u}{x-u}\mathrm{d}u\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{1-\mathrm{e}^{u-x}}{x-u}\mathrm{d}u\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-x\left(1-\frac{u}{x}\right)}}{1-\frac{u}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{u}{x}\right)\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-x(1-t)}}{1-t}\mathrm{d}t\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{x\to\infty} x\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 2.
\end{aligned}
$$

例 104 设 f 是 $[1,\infty)$ 上凸的连续可微函数, 满足 $f'(x)>0, \forall x\geqslant 1$. 证明:反常积分 $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\big(f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n\big)$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立.

解 由题意知 f' 单调增, 且 $f(x)\geqslant f'(1)(x-1)+f(1)$, 这意味着 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 因此 $f\big([1,+\infty)\big)=[f(1),+\infty)$, 且反函数 f^{-1} 是连续可微的, 且在 $[f(1),+\infty)$ 上严格单调递增.

给定 $\varepsilon>0$, 对任意正整数 n, 我们定义 $x_n=f^{-1}(f(n)+\varepsilon)>n$. 利用拉格朗日中值定理, 存在 $s_n\in\big(f(n),f(x_n)\big)$ 使得

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n &= f^{-1}(f(x_n))-f^{-1}(n) \\
&= D\left(f^{-1}\right)(x_n)\left(f(x_n)-f(n)\right)=\frac{\varepsilon}{f'(t_n)},
\end{aligned}
$$

其中 $t_n=f^{-1}(s_n)\in(n,x_n)$.

因此对任意 $x\in[1,n]$ 有 $f'(t_n)\geqslant f'(n)\geqslant f'(x)$, 如果反常积分收敛, 则

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\left(f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n\right)=\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{f'(t_n)}\leqslant\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}=\varepsilon\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)},
$$

因此级数收敛.

另一方面, 如果级数收敛, 通项 $f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n=x_n-n\to 0$ 且 $x_{n+1}-x_n=\big(x_{n+1}-(n+1)\big)-(x_n-n)+1\to 1$. 那么对任意整数 n, 存在 $M\geqslant 1$ 使得 $0<x_{n+1}-x_n\leqslant M$.

而且对 $x\in[x_n,+\infty)$ 有 $f'(t_n)\leqslant f'(x_n)\leqslant f'(x)$, 这意味着

$$
\frac{M}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n\right)=M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(t_n)}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}=\int_{x_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)},
$$

于是反常积分收敛.

例 105 设非零实数 x,y,z 满足 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z=2+\mathrm{e}^{x+y+z}$, 求极限

$$
\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{x+y+z}{12}\right).
$$

解 由条件得

$$
(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^y-1)+(\mathrm{e}^z-1)=\mathrm{e}^{x+y+z}-1,
$$

令 $a=\mathrm{e}^{x}-1, b=\mathrm{e}^{y}-1, c=\mathrm{e}^{z}-1$, 则 $a+b+c=(a+1)(b+1)(c+1)-1$, 化简即得 $abc+ab+bc+ca=0$, 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$. 因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{x+y+z}{12}\right)\\
=&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}+\frac{1}{y}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}+\frac{1}{z}-\frac{1}{\mathrm{e}^{z}-1}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
=&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-1-x}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}+\frac{\mathrm{e}^{y}-1-y}{y\left(\mathrm{e}^{y}-z\right)}+\frac{\mathrm{e}^{z}-1-z}{z\left(\mathrm{e}^{z}-1\right)}\right)-1\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 106 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n+\mathrm{e}^{-x_n}, x_1=1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{x_n-\ln n}{\ln n}$.

解 首先借助数学归纳法与函数 $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$ 的单调性容易证明 $x_n>\ln(n+1)$, 因此

$$\begin{aligned}
x_{n+1}&=x_n+\mathrm{e}^{-x_n}<x_n+\mathrm{e}^{-\ln(n+1)}=x_n+\frac{1}{n+1}\\
&<x_1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

即 $\ln(n+1)<x_n<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. 设 $y_n=x_n-\ln n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 代入递推式得

$$\begin{aligned}
y_{n+1}&=y_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\mathrm{e}^{-y_n}}{n}\\
&=y_n-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}y_n+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&=\frac{n-1}{n}y_n+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

于是 $ny_{n+1}=(n-1)y_n+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 对 n 叠加可知 $ny_{n+1}\sim\frac{1}{2}\ln n$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{x_n-\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny_n}{\ln n}=\frac{1}{2}.$$

例 107 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{2n+1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=4G-\pi\ln 2$, 其中 $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

解

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{2n+1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x\int_0^1 y^{2n}\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(y^{2n}-x^ny^{2n})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-xy^2}}}{1-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{\pi t-2\arcsin t}{1-t^2}\mathrm{d}t=4G-\pi\ln 2.
\end{aligned}
$$

例 108 对每个正整数 n, 设 $s_n=-2\sqrt{n}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, 即 Ioachimescu 常数. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{n!}$.

解 由于 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
s_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{n}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}-\sqrt{\frac{k-1}{n}}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\left|s_n-s-\int_n^{\infty}\frac{1}{4x^{3/2}}\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}-\int_{k-1}^{k}\frac{1}{4x^{3/2}}\mathrm{d}x\right|\\
&=\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}+\frac{2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)\right|\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{2\sqrt{k}\sqrt{k-1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}\\
&\leqslant\frac{1}{16}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^{5/2}}\leqslant\frac{1}{16}\int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{x^{5/2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{24(n-1)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

因此 $s_n - s = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + O(1/n^{3/2})$. 而由 Stirling 公式有

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n! \leqslant \mathrm{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

这意味着

$$(2\pi n)^{\frac{1}{4n}}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} \leqslant (n!)^{\frac{1}{2n}} \leqslant \left(\mathrm{e}\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{2n}}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - n)(n!)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

例 109 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$, 证明 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cos^{2k}\frac{j\pi}{2n+2} = \frac{1}{2}$.

解

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cos^{2k}\frac{j\pi}{2n+2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{j\pi}{2n+2}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\frac{j\pi}{2n+2}\mathrm{i}}\right)^{2k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{2n+2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{(2k-p)j\pi}{2n+2}\mathrm{i}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\mathrm{e}^{\frac{(p-k)j\pi}{n+1}\mathrm{i}} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}\mathrm{i}}\right)^j \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\left[\frac{1-\left(-\mathrm{e}^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}\mathrm{i}}\right)^{n+1}}{1-\left(-\mathrm{e}^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}\mathrm{i}}\right)} - 1\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\left[\frac{1+(-1)^{n+p-k}}{1+\cos\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)} - 1\right]
\end{aligned}$$

由于所求的和为实的, 最后的求和的虚部必然为零, 而

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+(-1)^{n+p-k}}{1+\cos\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)} - 1\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n+p-k}.$$

因此所求的和为

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p} + \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(-1)^p\right]$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{2k}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-k}\cdot 0=\frac{1}{2}.$$

例 110 证明:

$$\frac{1}{\binom{2n}{1}}-\frac{1}{\binom{2n}{2}}+\frac{1}{\binom{2n}{3}}-\cdots+\frac{1}{\binom{2n}{2n-1}}-\frac{1}{\binom{2n}{2n}}=-\frac{n}{n+1}.$$

解

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\,k!\,(2n-k)!}{(2n)!}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(2n-k+1)}{\Gamma(2n+2)}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\,B(k+1,2n-k+1)\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^k(1-x)^{2n-k}\,\mathrm{d}x\\&=(2n+1)\int_0^1\left[x(1-x)^{2n}-x^{2n+1}\right]\mathrm{d}x\\&=(2n+1)\left(\int_0^1 y^{2n}(1-y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 x^{2n+1}\mathrm{d}x\right)\\&=(2n+1)\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}\right)=-\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

例 111 设

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$.

解 首先我们有三角恒等式

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha-\cos^2\beta&=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\\&=\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha).\end{aligned}$$

于是

$$a_n=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)-\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\\
&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}-1\right)=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}\\
&=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin^3\frac{\pi}{2n}}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{n^3\sin^3\frac{\pi}{2n}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^3=\frac{8}{\pi^3}.
$$

例 112 求出所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得其满足如下函数方程:

$$
f(-x)=1+\int_0^x\sin(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t.
$$

解 由所给的等式可知 $f(x)$ 具有足够可导性, 且 $f(0)=1$. 换元 $x-t=u$ 可得

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=1+\int_0^x\sin(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u\\
&=1+\boxed{\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u}.
\end{aligned}
$$

等式两边求导得

$$
-f'(-x)=\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u,
$$

于是 $f'(0)=0$. 再求导得

$$
\begin{aligned}
f''(-x)&=\boxed{-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u+\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u}+f(x)\\
&=f(x)-f(-x)+1.
\end{aligned}
$$

于是 $f''(0)=f(0)=1$, 且 $f''(x)=f(-x)-f(x)+1=2-f''(-x)$. 等式两边再继续求导得

$$
\begin{aligned}
-f'''(-x)&=f'(x)+f'(-x),\\
f^{(4)}(-x)&=f''(x)-f''(-x)=2-2f''(-x),
\end{aligned}
$$

即 $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(x)+2f''(x)=1$, 解此四阶常系数线性微分方程可得 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

例 113 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 单调增加且 $f(x)\geqslant 0$. 记

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

(1) 证明 $s\geqslant \frac{1}{2}$.

(2) 比较 $\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的大小.(可以用物理或几何直觉)

解 这题我很早前在贴吧见过解答. 第一问属于比较简单的问题, 第二问则是非常难, 当然, 如果是只要猜答案, 应该时可以用直觉猜出来的, 我们给出严格的证明. 对于这样的积分不等式问题, 函数的连续性条件往往是多余的, 这里直接去掉这个条件进行证明.

(1) 由 Chebyshev 不等式得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 我们先猜一下答案, 考虑一根在区间 $[0,1]$ 上的密度为 $f(x)$ 的棒, s 就是其重心所在的位置, 重心的左右两侧保持杠杆平衡, 也就是满足重力与重力臂的乘积相等, $F_1l_1=F_2l_2$. s 的左边更长, 其力臂更长, 对应的重力小一些, 也就是质量轻一点, 因此 $\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 下面我们来严格证明:

$$\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_s^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由题意知 $F(x)$ 是单调递增的(下)凸函数, 为方便, 我们不妨假定

$$F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

于是有

$$s=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x,$$

那么原不等式则等价于

$$F(s)\leqslant 1-F(s).$$

等价于证明 $f(s)\leqslant\frac{1}{2}$. 那么由 Jensen 不等式得

$$F(s)=F\left(1-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\right)=F\left(\int_0^1 (1-F(x))\,\mathrm{d}x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 F\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \int_x^1 F\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 1\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

例 114 证明以下等式:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)} = 2$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^2} = 4 - 4\ln 2$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^3} = 4\ln^2 2 - 8\ln 2 - \frac{\pi^2}{3} + 8$.

解 首先我们有

$$
\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} = \frac{1}{1-x}.
$$

于是两边从 0 到 x 积分得

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2 - 2\sqrt{1-x}.
$$

取 $x = 1$ 得等式 1. 等式两边除以 x 再从 0 到 x 积分得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)^2} &= \int_0^x \frac{2 - 2\sqrt{1-t}}{t}\mathrm{d}t \\
&= 4 - 4\ln 2 + 4\ln\left(1 + \sqrt{1-x}\right) - 4\sqrt{1-x}.
\end{aligned}
$$

取 $x = 1$ 得等式 2. 两边再除以 x, 再从 0 到 1 积分得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(n+1)^3} &= 4\int_0^1 \frac{1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \sqrt{1-x}\right) - \sqrt{1-x}}{x}\mathrm{d}x \\
&= 4\ln^2 2 - 8\ln 2 - \frac{\pi^2}{3} + 8.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{gathered}
\int_0^1 \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{\sin^2 t} 2\sin t \cos t\,\mathrm{d}t = 2 - 2\ln 2. \\
\int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1-x}\right) - \ln 2}{x}\mathrm{d}x = \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{12}.
\end{gathered}
$$

其中最后一个积分参见我的积分级数文档 34 题.

例 115 对实数 $\lambda < \mathrm{e}$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} < \pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}}.$$

解 首先, 我们将两边均展开为级数的形式:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z - \lambda z} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-\lambda z\,\mathrm{e}^{-z}}\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \lambda^n z^n \mathrm{e}^{-(n+1)z}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-\lambda)}} &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\left(1-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n \\ &= \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n.\end{aligned}$$

注意, 上述结果只对 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 成立. 当 $|\lambda| < \mathrm{e}$ 时, 要证明原不等式, 只需要证明

$$\frac{n!\lambda^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{\pi}{\mathrm{e}}\sqrt{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}}\right)^n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. 令

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\pi}{\mathrm{e}^{n+1}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

利用 Stirling 公式和 Wallis 公式很容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 我们要证明 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, 只需要证明 a_n 单调递减即可. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(n+2)^{n+2}}{\mathrm{e}(n+1)^{n+2}}$$

要证 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 取对数, 则等价于证明

$$\ln(2n+1) - \ln(2n+2) + (n+2)\ln(n+2) - (n+2)\ln(n+1) < 1.$$

也就是

$$\ln(1+2n) - n\ln(1+n) - 3\ln(1+n) + (n+2)\ln\left(1+\frac{n}{2}\right) + n\ln 2 - \ln 2 < 1.$$

令 $f(x)=\ln(1+2x)-x\ln(1+x)-3\ln(1+x)+(x+2)\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+x\ln 2-\ln 2, x>0$, 那么

$$f'(x)=\frac{2}{1+2x}-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}-\frac{3}{1+x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+1+\ln 2,$$
$$f''(x)=-\frac{4}{(1+2x)^2}-\frac{1}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{1}{2+x}=\frac{-7x-5}{(2+x)(1+3x+2x^2)^2}<0.$$

因此 $f'(x)$ 单调递减, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 这说明 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 单调递增. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 所以 $f(x)<1$, 那么到这里就完成了 $|\lambda|<\mathrm{e}$ 部分的证明[1]. 当 $\lambda\leqslant-\mathrm{e}$ 时, 令 $-\lambda=k\mathrm{e}$, 则 $k\geqslant 1$, 原不等式等价于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+k}}{\mathrm{e}^{z-1}+kz}\mathrm{d}z<\sqrt{2}\pi$$

再令 $t=\sqrt{1+k}\geqslant\sqrt{2}$, 则 $k=t^2-1$, 令

$$g(t)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z}\mathrm{d}z,$$

则

$$g'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{(1-t)\mathrm{e}^{z-1}-(t^2+1)z}{[\mathrm{e}^{z-1}+(t^2-1)z]^2}\mathrm{d}z<0,$$

于是 $g(t)$ 单调递减,

$$g(t)\leqslant g\big(\sqrt{2}\big)=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}+z}<\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^{z-1}}=\sqrt{2}\mathrm{e}<\sqrt{2}\pi,$$

证毕.

例 116 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{\frac{2}{3}}}$ 的敛散性.

解 首先这题不满足任意判别法, 包括 A-D 判别法也不满足, 我们只能纯定义出发, 考虑级数的部分和.

$$\begin{aligned}
S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\sin\sqrt{k}}{k^{\frac{2}{3}}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\sqrt{2k}}{(2k)^{\frac{2}{3}}}-\frac{\sin\sqrt{2k-1}}{(2k-1)^{\frac{2}{3}}}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k}-(2k)^{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{2k-1}}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^{\frac{2}{3}}\left(\sin\sqrt{2k}-\sin\sqrt{2k-1}\right)-\sin\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)}{(2k)^{\frac{2}{3}}(2k-1)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

[1] 特别鸣谢积分群 QQ 小冰同学!

$$\triangleq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{2k}-\sin\sqrt{2k-1}\right| &< \left|\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{2k-1}}. \\ \left|\sqrt{2k-1}\left((2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right| &< (2k)^{\frac{2}{3}}-(2k-1)^{\frac{2}{3}} < 1\end{aligned}$$

于是

$$|a_k| < \frac{1}{2\sqrt{2k}\,(2k-1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{(2k)^{\frac{2}{3}}\,(2k-1)^{\frac{2}{3}}}$$

这说明 S_{2n} 收敛于 S. 而 $S_{2n+1} = S_{2n} - \dfrac{\sin\sqrt{2n+1}}{(2n+1)^{\frac{2}{3}}} \to S + 0 = S$, 因此 S_n 收敛于 S, 原级数收敛.

例 117 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}\right)$$

其中 $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k$, 而 γ 是 Euler 常数.

解 我们来计算这个级数的部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{N}\ln(n) - N\gamma - \frac{1}{2}H_N \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{k} - \ln(N!) - N\gamma - \frac{1}{2}\ln(N) - \frac{1}{2}\gamma + O(1/N) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{N-k+1}{k} - \ln(N!) - N\gamma - \frac{1}{2}\ln(N) - \frac{1}{2}\gamma + O(1/N) \\ &= (N+1)H_N - N - \ln(N!) - N\gamma - \frac{1}{2}\ln(N) - \frac{1}{2}\gamma + O(1/N) \\ &= (N+1)\big(\ln(N) + \gamma + 1/(2N) + O(1/N^2)\big) - N \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\ln(2\pi) + (N+1/2)\ln(N) - N + O(1/N)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
=&(N+1)\ln(N)+(N+1)\gamma+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}+O(1/N)-N\\
&-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-(N+1/2)\ln(N)+N-N\gamma-\frac{1}{2}\ln(N)-\frac{1}{2}\gamma+O(1/N)\\
=&\frac{1+\gamma-\ln(2\pi)}{2}+O(1/N)
\end{aligned}
$$

其中我们已经利用了调和级数的部分和渐近展开与 Stirling 公式：当 $N\to\infty$,

$$
\begin{aligned}
H_N&=\ln(N)+\gamma+\frac{1}{2N}+O(1/N^2),\\
\ln(N!)&=\frac{1}{2}\ln(2\pi)+(N+1/2)\ln(N)-N+O(1/N).
\end{aligned}
$$

那么令 $N\to\infty$, 我们得到

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n-\ln(n)-\gamma-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1+\gamma-\ln(2\pi)}{2}.
$$

例 118 证明：

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{H}_{2n}}{n^2}=\frac{3}{4}\zeta(3)
$$

解 首先我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x&=-\int_0^1 x^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\mathrm{d}x\\
&=-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n+k-1}}{k}\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+k)}\\
&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{H_n}{n}.
\end{aligned}
$$

且注意到

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{H}_{2n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}-H_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}.
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\ln(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 x^m \ln^2 x \mathrm{d}x = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^3} \\
&= 2\zeta(3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{H}_{2n}}{n^2} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{2n-1} \ln(1-x)\mathrm{d}x \\
&= -2\int_0^1 \ln(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1-x^2)}{x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)+\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= 4\zeta(3) + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

要求出最后的积分,我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^m x^m \ln^2 x \mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)^3} = 2\cdot\frac{3}{4}\zeta(3) = \frac{3}{2}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

令

$$
A = \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x,
$$

则

$$
\begin{aligned}
A+2\zeta(3)+2B &= \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x^2)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x \quad (x^2 \mapsto x) \\
&= \zeta(3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A+2\zeta(3)-2B &= \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2 \frac{1-x}{1+x}}{x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x \quad (x \mapsto \frac{1-x}{1+x}) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

由以上两个等式我们得到

$$A=\frac{1}{4}\zeta(3),\quad B=-\frac{5}{8}\zeta(3).$$

最后将所有结果相加得到原题的答案

$$4\zeta(3)-2\cdot\frac{5}{8}\zeta(3)-2\zeta(3)=\frac{3}{4}\zeta(3).$$

例 119 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数,满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x.$$

解 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,x\in[0,1]$$

则 $F(0)=0,F(1)=1$,且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 首先我们有

$$\begin{aligned}
& n\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x\\
=& \int_0^1 x\ln(1-x)d[F(x^n)-1]\\
=& x\ln(1-x)[F(x^n)-1]\Big|_0^1-\int_0^1[F(x^n)-1]\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
=& \int_0^1\left(\int_{x^n}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
=& \int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\left(\ln(1-x)+1-\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中我们已经使用了洛必达法则:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-}x\ln(1-x)[F(x^n)-1] &= \lim_{x\to1^-}\ln(1-x)\int_1^{x^n}f(t)\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to1^-}\frac{\int_1^{x^n}f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{\ln(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to1^-}\frac{nx^{n-1}f(x^n)}{\frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to1^-}(1-x)\ln^2(1-x)\cdot nf(x^n)=0
\end{aligned}$$

最后一步利用了 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$.

因此原极限可约化为

$$\begin{aligned}I&\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\int_0^1 x^n f(x^n)\ln(1-x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\left(\ln(1-x)+1-\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于 $|f(t)|\leqslant M$ 是有界的,且

$$\left|\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}[\ln(1-x)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_0^1\int_0^1[|\ln(1-x)|+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

而我们知道上式最后的积分是收敛的,所以

$$\begin{aligned}I&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\int_0^{t^{1/n}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 f(t)\ln(1-t^{1/n})\mathrm{d}t\\&=-\lim_{a\to0^+}\frac{1}{\ln a}\int_0^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\\&=-\lim_{a\to0^+}\frac{1}{\ln a}\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t-\lim_{a\to0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对第一个积分,令 $t^a=u$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t\right|&=\left|\frac{1}{a}\int_0^{a^a} f(u^{1/a})u^{1/a}\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|\\&\leqslant M\frac{1}{a}\left|\int_0^{a^a}(a^a)^{1/a}\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|\\&\leqslant M\left|\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}du\right|\end{aligned}$$

最后的积分也是收敛的,于是

$$\lim_{a\to0^+}\frac{1}{\ln a}\int_0^a f(t)\ln(1-t^a)=0.$$

对 $t\in[a,1]$, 我们有 $a^a\leqslant t^a\leqslant 1$. 且 $\lim\limits_{a\to0^+}a^a=1$, 这意味着 $\lim\limits_{a\to0^+}t^a=1,\forall t\in[a,1]$. 因此,

$$I=-\lim_{a\to0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-t^a)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(1-e^{a\ln t})\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln[-(1+o(1))a\ln t]\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 f(t)\frac{\ln a+\ln(1+o(1))+\ln(-\ln t)}{\ln a}\mathrm{d}t\\
&= -\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t-\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对于上式最后的积分,令 $u=-\ln t$,

$$
\left|\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M\left|\int_0^1 \ln(-\ln t)\mathrm{d}t\right| = M\int_0^{\infty} e^{-u}\ln u\mathrm{d}u<\infty.
$$

最后我们得到

$$
\begin{aligned}
I &= -\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t-\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{\ln a}\int_a^1 f(t)\ln(-\ln t)\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-1.
\end{aligned}
$$

例 120 计算

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+4)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right).
$$

解 首先我们有

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+4)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{2(2n-1)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}-\frac{1}{2(2n)}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}\right).
\end{aligned}
$$

令

$$
a_n=1, b_n=\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}.
$$

利用 Abel 分部求和公式,其部分和为

$$
S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=2n-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= Nb_N + \sum_{n=1}^{N-1} n(b_n - b_{n+1}) \\
&= N\left(\sum_{k=2N-1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2(2N-1)} - \frac{1}{2(2N)}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{4n(n+1)}\right) \\
&= N\sum_{k=2N-1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{N}{2(2N-1)} - \frac{1}{4} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{2n}{(2n-1)^2(2n+1)} + \frac{1}{4n(n+1)}\right) \\
&= N\sum_{k=2N-1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{N}{2(2N-1)} - \frac{1}{4} \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

令 $N \to \infty$,我们有

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left(N\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{N}{2(2N-1)}\right) &= \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=2N-1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{N}} - \frac{1}{4} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{(2N-1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^2}}{\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

其中我们已经用了 Stolz 定理.

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}.
$$

将以上所有结果结合起来,得到最后的答案为

$$
S = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}.
$$

例 121 求极限

$$
\lim_{x\to 1^-}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}
$$

解 首先注意到

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n} &= \left(\frac{1+x}{1+x^0}\right)^{x^0}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{x^1}\left(\frac{1+x^3}{1+x^2}\right)^{x^2}\cdots \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^{1-x}\left(1+x^2\right)^{x-x^2}\left(1+x^3\right)^{x^2-x^3}\cdots \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^{1-x}\left(1+x^2\right)^{x-x^2}\left(1+x^3\right)^{x^2-x^3}\cdots \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln(1+x^n)}.\end{aligned}$$

接下来就只需计算极限

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln\left(1+x^n\right).$$

利用带拉格朗日余项的泰勒公式,当 $0<x<1$ 时,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}},0<\xi<x.$$

由此可知,当 $0<x<1$ 时,对任意正整数 m,有

$$\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k<\ln(1+x)<\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln\left(1+x^n\right) &> \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{kn} \\ &= \sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{(1+k)n-1}-x^{(1+k)n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^{(1+k)n-1}-x^{(1+k)n}}{1-x^{1+k}}\end{aligned}$$

注意到由洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{x^{(1+k)n-1}-x^{(1+k)n}}{1-x^{1+k}} &= \lim_{x\to1^-}\frac{[(1+k)n-1]x^{(1+k)n-2}-(1+k)nx^{(1+k)n-1}}{-(1+k)x^k} \\ &= \frac{1}{1+k}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}-x^n\right)\ln\left(1+x^n\right)\geqslant\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)}$$

对任意正整数 m 都成立. 进一步,令 $m \to \infty$ 可得

$$\underline{\lim}_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln\left(1 + x^n\right) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)} = 2\ln 2 - 1.$$

同理有

$$\overline{\lim_{x \to 1^-}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)}.$$

再令 $m \to \infty$ 得到

$$\overline{\lim_{x \to 1^-}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(1+k)} = 2\ln 2 - 1.$$

所以有

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - x^n\right) \ln\left(1 + x^n\right) = 2\ln 2 - 1.$$

那么原题的答案就是 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.