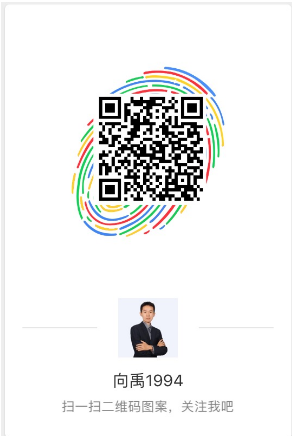
Pretty Hard Problems

Mathematical Analysis

数学分析 变态难题



不积跬步，无以至千里。

作者：向禹

博客: yuxtech.github.io

微博: 向老师玩转数学

微信公众号: 向老师讲数学

Version: 2.10

温馨提示

本习题集翻译自 Biler 波兰数学分析习题集 Problems in mathematical analysis. 难度相当变态, 笔者也只会少数, 读者应当自用, 切勿到考研群传播, 谢谢合作!

第 1 章 实数与复数

1. 证明一个无理数的无理次幂可以是有理数.

2. 如果 $c > \dfrac{8}{3}$, 证明对每一个正整数 n, 存在实数 θ 使得 $[\theta^{c^n}]$ 是一个素数.

3. 设 $\{a_n\}$ 是任意一个不小于 1 的整数列. 证明: 任意实数 $x \in [0,1)$ 都可以表示成 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}$, 其中 $x_k \in \{0, 1, \cdots, a_k - 1\}$. 给出同一个数 x 具有两个这种表示方法的充要条件.

4. 证明任意 $x \in (0,1]$ 可以表示成 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n_k}$, 其中 $\{n_k\}$ 是一个正整数列, 且 $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \in \{2,3,4\}$.

5. 如果 $a_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 证明对任意实数 x 都存在整数列 $\{k_n\}, \{m_n\}$ 使得 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n a_n$ 以及 $x = \prod\limits_{n=1}^{\infty} m_n a_n$.

6. 如果对每个自然数 n ,$0 < a_n < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, 证明对每个 $x \in (0,1)$ 都存在子列 $\{k_n\}$ 满足 $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{k_p} = x$.

7. 给定 $(0,1)$ 的一个可数子集 C, 求使得对任意 $x \in (0,1)$ 都存在 C 的一个排列 $\{c_k\}$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{2^k} = x$.

8. 如果 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$, 其中 n_k 是正整数, 证明 $n_k \leqslant 5 \cdot 2^{k-2} - 1$.

9. 对 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{p^n}, x_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, 定义 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{q^n}$, 其中 $1 < p \leqslant q$ 是正整数, 计算 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

10. 考虑数集 $\{0, 1, , \cdots, 9\}$ 的一个置换 σ, 定义函数 $f: [0,1) \to [0,1]$, 如果 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{10^n}$ 是 x 的十进制展开式, 则 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma(x_n)}{10^n}$. 研究函数 f 的连续性和可

微性，计算积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

11. 证明对每个严格单调增的自然数列 $\{n_k\}$, 如果 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k^{2^{-k}} = +\infty$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ 是无理数.

12. 对任意整数 $a, |a| > 1$, 证明:$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a^{-n})$ 是无理数.

13. 对每个自然数列 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{a_n}}{a_n}$ 是无理数.

14. 证明存在无穷多个有理数 θ, 使得 $g(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\theta}{n(n+\theta)}$ 是无理数.

15. 给定正整数 k 和 m, 证明 $S(m,k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(mn+k)}$ 是有理数当且仅当 m 整除 k.

16. 设 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 对任意正整数 N, 证明:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left\{x+\frac{n}{N}\right\}-\frac{1}{2}\right) = \{Nx\}-\frac{1}{2}.$$

17. 设 a, b 是两个互素的正整数, 证明

$$\int_0^1\left(\{ax\}-\frac{1}{2}\right)\left(\{bx\}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12ab}.$$

18. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是正整数,$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\{a_k x\}-\frac{1}{2}\right)$, 计算 $\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$, 证明:

$$\int_0^1 S_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sum_{1\leqslant k,m\leqslant n}\frac{(a_k,a_m)}{[a_k,a_m]}.$$

19. 设 S_n 是具有 n 个元素的对称群, 求 $\max\limits_{\sigma\in S_n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\sigma(k)-k|$.

20. 证明: 任意一个有 n^2+1 项的实数列都包含一个有 $n+1$ 项的单调子列.

21. 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调增的自然数列, 且满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum\limits_{a_k\leqslant n}1 = 1$. 证明:$\{a_n\}$ 包含一个两两互素的子列.

22. 设 $f_n(x)=\min\{\left|x-\frac{m}{n}\right|: m\in\mathbb{Z}\}, n=1,2,\cdots$. 对怎样的实数 x, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛? 如果 $f_n(x)=\min\left\{\left|x-\frac{p}{q}\right|: p,q\in\mathbb{Z},|q|\leqslant n\right\}$ 呢?

23. 考虑 2 的连续次幂的首位数字:$1,2,4,8,1,3\cdots$, 试问这个数列是否包含数字 7? 哪一个数字出现的频率更高:7 还是 8?

24. 设 $\{r_n\}$ 是所有有理数的一个排列. 证明:

$$\mathbb{R}\backslash\cup_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{1}{n^2},r_n+\frac{1}{n^2}\right)\neq\emptyset.$$

是否存在所有有理数的一个排列 $\{s_n\}$ 使得

$$\mathbb{R}\backslash\cup_{n=1}^{\infty}\left(s_n-\frac{1}{n},s_n+\frac{1}{n}\right)\neq\emptyset.$$

25. 证明: 存在 $(0,1)$ 内所有有理数的一个排列 $\{x_n\}$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ 发散.

26. 是否存在子集 $S\subset\mathbb{R}$ 使得 $\inf\{a>0: S+a=\mathbb{R}\backslash S\}=0$.

27. 证明: 所有的实数不存在任何可数分割, 使得每个部分都是闭集.

28. 证明: 对自然数 $0<a_1<\cdots<a_n$, $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{x^{a_i}-x^{a_j}}{x^i-x^j}$ 是一个多项式.

29. 求出 $(x+a)^n$ 被 $(x+b)^m$ 除的余数.

30. 证明: 一个以 $x=1,x=2$ 为根的首一实系数多项式有一个不小于 -2 的系数.

31. 证明: 如果有理系数多项式 p 使得 $p^{-1}(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$, 则 p 一定是线性函数.

32. 证明: 如果复多项式 p 使得 $p(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ 且 $p(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})\subset\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$, 则 p 一定是线性函数.

33. 多项式 $P(X)=x^2+ax+b$ 与 $Q(x)=x^2+px+q$ 有一个公共根. 求一个二次多项式, 使得它的根刚好是 P 和 Q 剩下的两个根.

34. 计算

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{n}\mathrm{i}}}.$$

35. 设 $f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 对 $i\neq j$ 有 $x_i\neq x_j$,$g(x)=x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$. 证明:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{g\left(x_j\right)}{f'\left(x_j\right)}=1.$$

36. 设 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是一个 n 多项式的根, 而 $b_1 \leqslant \cdots b_{n-1}$ 是它的导数的根, 计算

$$\sum_{i,j} \frac{1}{b_i - a_j}.$$

37. 证明: 对每个 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 存在唯一的多项式 $B_n(x)$ 满足性质 $\int_x^{x+1} B_n(x)\mathrm{d}x = x^n$. 求 $B_n(x)$.$B_n = B_n(0)$ 称为伯努利数. 证明: 对 $k > 0$, $B_{2k+1} > 0$ 且 $B_{2k}B_{2k+1} < 0$. 求和式 $s_n(m) = 1^n + 2^n + \cdots + m^n$.

38. 对任意实数 $a_1, \cdots, a_n$, 证明

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_k a_j}{k+j-1}$$

39. 设非负实数 $b_1, \cdots, b_n$ 满足 $b_1 + \cdots + b_n = b$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{k+1} \leqslant \frac{b^2}{4}.$$

40. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是一个面积为 K 的凸 n 边形的边长, 证明

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant 4K\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

41. 设正数 $p_1, \cdots, p_n$ 和 $q_1, \cdots, q_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k$, 证明不等式

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \log q_k.$$

42. 证明: 对正数 $a_1, \cdots, a_n$ 的任一置换 $b_1, \cdots, b_n$ 都有 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geqslant n$. 对怎样的置换可以使得这个和式取到最大值.

43. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是正数,$s_k = s_k(a_1, \cdots, a_n)$, $k = 1, \cdots, n$ 是第 k 个对称多项式,$b_k = \frac{s_k}{\binom{n}{k}}$, 证明以下不等式:

(a) $b_1 \geqslant b_2^{\frac{1}{2}}$

(b) $b_k^2 \geqslant b_{k-1}b_{k+1}$ NewTon 不等式

(c) $b_k^{\frac{1}{k}} \geqslant b_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ Maclaurin 不等式

44. 如果对所有的自然数 n 都有 $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$, 证明:$a+b, a-c, a-d$ 中至少有一个是整数.

45. 对所有的实数 x 和自然数 n, 证明等式:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

46. 对所有的实数 x 和自然数 n, 证明不等式:

$$[nx] \geqslant [x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

47. 设 $q=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 证明: 对每个正整数 n 都有

$$n[q[qn]]+1=\left[q^2 n\right].$$

是否存在另外一个 q 也满足同样的性质?

48. 如果 $x>1$ 是一个无理数, 证明: 集合 $\{[nx]: n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\left\{\left[\dfrac{nx}{x-1}\right]: n \in \mathbb{N}\right\}$ 构成了 $\mathbb{N}$ 的一个分割.

49. 设 $\{u_n\}$ 表示数列 $1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,\cdots$, 其中第一个奇数后面跟两个偶数, 然后接着跟三个奇数,$\cdots$. 证明:

$$u_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right].$$

50. 求集合 $\{\sqrt{n}-\sqrt{m}: m, n \in \mathbb{N}\}$ 的聚点.

51. 设 $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, 求

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty}\left|a^n-b^n\right|^{\frac{1}{n}}.$$

52. 复平面上任一条直线在映射 $z \mapsto z^2$ 下的像都是一条抛物线, 求其顶点.

53. 不存在某个复变函数使得它的第 r 次迭代等于 $az^2+bz+c, a \neq 0, r \geqslant 2$.

54. 对任意多项式 P, Q 和常数 k, 证明:

$$P(D)\left[\mathrm{e}^{kx} Q(x)\right]|_{x=0}=Q(D)[P(x)]|_{x=k}.$$

其中 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

55. 设 D 表示次数不超过 n 的多项式空间中的微分算子 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 求出表达式

$$T=I+D+\frac{D^2}{2!}+\cdots+\frac{D^n}{n!}$$

的一个简化形式.

56. 确定方程 $P(x)=x(x-1)\cdots(x-n)=\lambda$ 的根的最大重数.

57. 证明: 方程 $nz^n=1+z+\cdots+z^n$ 的所有根都在单位圆内部.

58. 设 λ 是多项式 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 的一个根, 其中 $1\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant a_2\cdots\geqslant a_n$. 证明: 如果 $|\lambda|\geqslant 1$, 则 λ 是一个单位根.

59. 定义实多项式 f 和 g:$(1+\mathrm{i}x)^m=f(x)+\mathrm{i}g(x)$. 证明: 对每个实数 a 和 b, $af+bg$ 的根都是实数.

60. 证明: 多项式 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 没有实根, 而多项式 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重根.

61. 求所有的自然数 n 使得方程 $(1+z)^n=1+z^n$ 的非零根都在单位圆内.

62. 设 P_n 是具有 $z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+1$ 形式的所有复多项式构成的集合, 求

$$M_n=\min_{p\in P_n}\left(\max_{|z|=1}|p(z)|\right).$$

63. 计算

$$\min_{z\in\mathbb{C}}\max\left\{|1+z|,\left|1+z^2\right|\right\}.$$

64. 设 $z_j\,(j=1,2,3,4)$ 是模不小于 2 的复数, 计算

$$\min|2-(z_1+z_2)(z_3+z_4)+z_1z_2z_3z_4|.$$

65. 证明: 对每个复数 a, 方程 $\mathrm{e}^z=\dfrac{a+z}{a-z}$ 在第一象限内没有根.

66. 证明: 对任意复数 $z_1,\cdots,z_n$, 存在集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个子集 B 使得

$$\left|\sum_{k\in B}z_k\right|\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

67. 求方程 $(x+1)^x+\cdots+(x+n)^x=(x+n+1)^x, n\geqslant 2$ 的实根个数.

68. 证明: 对每个自然数 k,

$$\sum_{0\leqslant x_i\leqslant n}\min(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{m=0}^{n}m^k, x_i\in\mathbb{N}.$$

69. 设 $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n<1$, 定义

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(a_k t)-\frac{k}{n+1}\right).$$

证明: 对 $t>0$, $f(t)<f(0)$.

70. 设 $a>0$, 证明:

$$\sum_{p,q=1,(p,q)=1}^{\infty}\frac{1}{a^{p+q}-1}=\frac{1}{(a-1)^2}.$$

71. 设 $\{D_n\}$ 表示含于单位圆内半径为 r_n 的不交圆盘. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n<\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n^2<1$.

72. $\{K_n\}$ 是面积为 a_n 的正方形. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$, 则 $\{K_n\}$ 能覆盖整个平面.

73. 设 L_n, A_n 表示分别表示曲线 $r^n=a^n\sin n\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的长度以及由此曲线围成的闭区域的面积, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{n}$.

74. 2^n 个半径为 $\dfrac{1}{2}$, 球心在 $\left(\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm\dfrac{1}{2}\right)$ 的球都嵌在 n 维闭方体 $[-1,1]^n$ 中, 计算球心在 $(0,\cdots,0)$ 且与这些球都相切的小球直径.

75. 抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 相切, 让前者无滑动地沿着后者滚动, 求出滑动过程中前者焦点的轨迹.

76. 求两个自然数互素的概率.

77. 定义数列 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{1+a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$, 是否 a_n 都是整数?

第 2 章 数列

1. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(2k^{\frac{1}{n}}-1\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(2n^{\frac{1}{n}-1}\right)^n.$$

2. 设 $a_n=\int_0^n \mathrm{e}^{\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径.

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x.$$

4. 证明数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}n!n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 单调递减并求其极限.

5. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\sqrt[2n]{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}i^{n-j}j^{n-i}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. 研究数列 $a_n=\sum\limits_{j,k>1,j+k=n}\frac{1}{jk}$ 的渐近性质.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n^n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n^n=b,a,b\in(0,+\infty),$$

设正数 p,q 满足 $p+q=1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n$.

8. 给定实数 $x\in(0,1)$, 设 $f_k(x)$ 表示 x 的倍数 mx 落在区间 $[k,k+1)$ 内的个数,$k,m=1,2,\cdots$. 证明数列 $\sqrt[n]{f_1(x)\cdots f_n(x)}$ 收敛并求其极限.

9. 设 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan nx$, 求 $\lim\limits_{m\to\infty}S(\sin^2(\pi m!x))$.

10. 设 $q_1=x>1,q_{n+1}=2q_n^2-1$. 证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

11. 证明数列 $s_n=\sum_{k=n}^{pn}\frac{1}{k}, n=1,2,\cdots$ 对每个 $p>1$ 都收敛. 考虑数列 $t_n=\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$, 求 $\lim_{n\to\infty}t_n$.

12. 证明数列 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$ 存在极限 u, 并估计 u_n-u 收敛的阶.

13. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$.

14. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$.

15. 求 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

16. 求 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)$.

17. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(\log n)}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$.

18. 设 $a>0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\log^a n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k\log^{1+a}k}$.

19. 给定自然数 p, 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}k^{\frac{p}{n}}\right)^n$.

20. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{ns}}\sum_{k=1}^{n}k^{ns}$.

21. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(kn)^{\frac{1}{n+k}}\right)^{\frac{1}{\log n}}$.

22. 设 $a,b>0$, 判断数列 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^a(n+k+1)^b}$ 的敛散性.

23. 判断数列 $x_n=\sqrt{1!\sqrt{2!\cdots\sqrt{n!}}}$, $y_n=\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{n}}}$ 的敛散性.

24. 研究式子 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log(n-k)}{k}-\log^2 n$ 的渐近性质.

25. 设

$$s_n=1+\frac{n-1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}+\cdots+\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdots\frac{1}{2n},n=1,2,\cdots$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

26. 设 $\{a_n\}$ 是实数列且满足对某个实数 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}n^x a_n=a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^x\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a\mathrm{e}^x.$$

27. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{12}}.$$

28. $\{a_n\}$ 是一个正项等差数列, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}{a_1+\cdots+a_n}.$$

29. 设 A_n,G_n 分别表示 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n}$ 的算术和几何平均数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2,\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

30. 给定实数 $a_1,\cdots,a_k$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[k]{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}-n\right].$$

31. 给定两个正数 a_1,a_2 分别取算术平均和几何平均 $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$,$a_4=\sqrt{a_2a_3}$,$\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

32. 设数列 a_n,b_n 满足 $a_0=a$,$b_0=b$,$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$,$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, 证明 a_n,b_n 有相同的极限 ℓ, 且

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}=\frac{\pi}{2\ell}.$$

33. 求 $\varliminf|\sin n|^{\frac{1}{n}}$.

34. 求出数列 $p_1=1,p_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}p_kp_{n+1-k}$ 的一个通项公式.

35. 定义数列 $\{x_n\}$:$x_2=1,x_3=2,x_n=(n-1)(x_{n-1}+x_{n-2})$, 求 x_n.

36. 如果 $0<y_0<\dfrac{1}{c}$ 且 $y_{n+1}=y_n(2-cy_n)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{c}$.

37. 判断数列 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}},b_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ 的敛散性.

38. 求 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}$.

39. 设 $s_1\sqrt{2},s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

40. 设 $a_1,b_1\in(0,1)$ 且 $a_{n+1}=a_1(1-a_n-b_n)+a_n,b_{n+1}=b_1(1-a_n-b_n)+b_n$. 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛并求出它们的极限.

41. 设 $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=2^{\frac{x_n}{2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

42. 设 $a_0=0,a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{n}$.

43. 构造一个区间上的点列 $\{A_n\}$ 使得 $A_{n+2}\in A_nA_{n+1}$ 且 $|A_nA_{n+2}|\cdot|A_{n+1}A_n|=|A_{n+2}A_{n+1}|^2$. 证明数列 $|A_1A_n|$ 收敛并求其极限.

44. 设 $a_0=0,a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{1+a_n+a_{n-1}^3}{3}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

45. 如果 $w_1\geqslant w_2\geqslant\cdots>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n=+\infty$, 且 $\{a_n\}$ 满足条件 $(1+w_n)a_n=-(a_{n-2}+a_{n+2})$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

46. 证明: 对每个 $t>0$ 数列 $\{x_n\}$:$x_0=1,x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2}{n^{1+t}}$ 都存在极限 $f(t)$, 且当 $t\to0$ 时, $f(t)=t+O(t^2)$.

47. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

    (a) $x_n+ax_{n-1}+x_{n-2}=0$.

    (b) $x_n\to+\infty$.

    (c) $x_n\neq0$.

    证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x_nx_{n+1}}=\dfrac{1}{x_0(x_1-\lambda x_0)}$, 其中 λ 是方程 $\lambda^2+a\lambda+1=0$ 的根且 $|\lambda|<1$.

48. 设 $a_0=0,a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-a_n}$.

49. 设 $u_0\in(0,1)$, 且 $u_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{1-u_n}}{2}$, 判断数列 $\{\sqrt{n}u_n\}$ 的敛散性.

50. 设 $c_0>-1,c_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$, 求 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}c_n$. 如果再假定 $|c_0|<1$, 求数列 $a_n=4^n(1-c_n)$ 和 $b_n=4^n\prod\limits_{k=n+1}^{\infty}c_k$ 的极限.

51. 构造一个复数序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $z_n\neq 0,z_{n+1}=z_n^2+z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to-\infty}z_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

52. 如果 $a_0,a_1>0$, 且 $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

53. 对怎样的初值 a_1 能使得递推数列 $a_{n+1}=a_n^2-2$ 收敛.

54. 定义数列 $\{a_n\}$:$a_1=x,a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n-1$. 证明:$\{a_n\}$ 只对唯一的 x 收敛, 求这个 x, 并求 $\{a_n\}$ 的极限.

55. 对不同的参数 a,c, 判断数列 $x_0=0,x_{n+1}=x_n-c(x_n^2-a)$ 的敛散性.

56. 如果 $x_0^m\leqslant D<(x_0+1)^m$, 证明: 递推数列 $x_{n+1}=x_n+\dfrac{D-x_n^m}{m\left(x_n+1\right)^{m-1}}$ 的极限等于 $D^{\frac{1}{m}}$(Hobson 公式).

57. 设 $0<y_0<x_0<1,r>0,s\geqslant 1,x_{n+1}=y_n+x_n^r(x_n-y_n)^s,y_{n+1}=y_n+y_n^r(x_n-y_n)^s$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

58. 如果 a_0,a_1 是实数, 且 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$, 则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛并求其极限.

59. 如果 $a_0=1$ 且 $a_n=a_{[\frac{n}{2}]}+a_{[\frac{n}{3}]}+a_{[\frac{n}{6}]}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{12}{\log 432}$.

60. 构造一个数列 $\{a_n\}$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{nk}a_k=(-1)^n$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{nk}|a_k|<+\infty$ 对所有 n 都成立 (Seeley 引理).

61. 求数列 $b_{n+1}=\displaystyle\int_0^1\min\left(x,a_n\right)\mathrm{d}x,a_{n+1}=\int_0^1\max\left(x,b_n\right)\mathrm{d}x$ 的极限.

62. 求数列

$$a_{n+1}=\int_0^1\min\left(x,b_n,c_n\right)\mathrm{d}x,b_{n+1}=\int_0^1\operatorname{mid}\left(x,a_n,c_n\right)\mathrm{d}x,c_{n+1}=\int_0^1\max\left(x,a_n,b_n\right)\mathrm{d}x$$

的极限.

63. 如果 $c_1\in(0,1)$,$c_{n+1}=c_n(1-c_n)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-nc_n)}{\log n}=1$.

64. 设 $x_1=1$,$x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{\sum_{k=1}^n x_k}$, 证明 $x_n\sim\sqrt{2\log n}$.

65. 设数列 $x_{n+1}=\sin x_n$,$x_1\in(0,\pi)$, 证明 $x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

66. 易知数列 $a_{n+1}=a_n(1-a_n^2)$,$a_1\in(0,1)$ 趋于 0, 估计它趋于 0 的阶.

67. 证明: 对任意实数列 $\{a_n\}$, 下面两种情况是等价的:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k}=t$.

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k}=t$.

68. 设数列 $\{u_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 满足:$u_n\geqslant u_{n-1}-a_{n-1}$,$a_n\geqslant 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$,$u_n\leqslant M<+\infty$. 证明: 数列 $\{u_n\}$ 收敛.

69. 如果 $u_n>0$ 且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 存在 (可以是无穷大), 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log u_n}{\log n}$ 也存在.

70. 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{n}=0$.

71. 对任意正数列 $\{a_n\}$, 证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1+a_{n+1}\right)}{a_n-1}\geqslant 1$, 且右边的 1 是最佳常数.

72. 对任意正数列 $\{a_n\}$, 证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}$.

73. 给定正数列 $\{t_n\}$, 定义数列 $\{a_n\}$:$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+\dfrac{t_n}{a_n}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n$ 收敛.

74. 考虑两个复数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 假定 b_n 收敛且 $b_n=a_n-ta_{n+1}$, 这里 t 是一个固定的复数. 证明: 如果 $|t|>1$ 或 $|t|<1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nt^n=0$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

75. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 且数列 $\{u_n-u_{n-1}\}$ 单调递减, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)=+\infty$.

76. 证明: 如果正数列 $\{t_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n=1$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{Nt_n\}=0$.

77. 证明: 如果 $\{a_n\}$ 是一个复数列使得对任意正整数 n 都有 $|na_n| \leqslant 1$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0+\cdots+a_n) = 0$.

78. 设实数列 $\{k_n\}$ 满足:$k_1 > 1$,$k_1+\cdots+k_n < 2k_n$ 对 $n \geqslant 2$ 都成立, 证明: 存在 $q > 1$, 使得 $k_n > q^n$ 对所有 n 都成立.

79. 设实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1$. 证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 存在有限的极限 w 且 $nw - 1 < a_n < nw + 1$.

80. 非递减的正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{mn} \geqslant m a_n$ 对所有的 m 和 n 都成立, 且 $\sup\limits_n \dfrac{a_n}{n} < +\infty$ 都成立, 问数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是否收敛?

81. 对实数列 $\{a_n\}$, 令 $s_n = a_0 + \cdots + a_n$. 假定对某个常数 C 和所有 n 都有 $\sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| \leqslant Cn$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_0+\cdots+s_n}{n+1} = s$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_0^2+\cdots+s_n^2}{n+1} = s^2$.

82. 证明: 如果实数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n = 1$.

83. 设 $\{a_n\}$ 是非负数列,$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{s_n} = 1$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 1.

84. 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0$, 且数列 $\{a_n\}$ 满足

   (a) $0 < a_{n+m} < F(a_n, a_m)$,$n$,$m \in \mathbb{N}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_1+\cdots+a_n)}{n} = 0$.

   证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

85. 如果对实数 $a_1,\cdots,a_k$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(na_1)\cdots\sin(na_n) = 0$, 证明: 至少有某个 a_j 是 π 的倍数.

86. 设 $\{u_n\}$ 是严格递增趋于 $+\infty$ 的数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. 证明:$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \log u_k$.

87. 证明: 如果一个级数在 Cesaro 求和意义下收敛, 则存在此级数的一个部分和数列的子列趋于 0.

88. 证明: 给定有界数列 $\{a_n\}$,$a_n \neq 0$, 则一定存在某个子列 $\{b_n\}$ 使得数列 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 收敛.

89. 对给定的数列 $\{x_n\}$ 和正数列 $\{p_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}++\infty$, 定义一个新的数列 $\{y_n\}$:$y_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}$. 证明

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n.$$

90. 证明: 如果 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数, 则递推数列 $x_n=f(x_{n-1})$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=0$.

91. 证明: 如果数列 $\{t_n\}\subset(0,1)$ 不收敛于 0, 则 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^{x_k}t_k)=0$ 对几乎每一个 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{x^k}$ 这里 $x_k\in\{0,1\}$ 都成立.

92. 设 $s_1=\log a$,$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\log(a-s_k)$,$n\geqslant 2$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a-1$.

93. 问函数列 $f_n(x)=\dfrac{\int_0^x\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t}$ 是否收敛?

94. 设 $F_0(x)=x$,$F(x)=4x(1-x)$,$F_{n+1}(x)=F(F_n(x))$, 求 $\displaystyle\int_0^1F_n(x)\mathrm{d}x$.

95. 求所有的 $x_0\in[0,1]$ 使得递推数列 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ 收敛.

96. 设 $f_n(x)=\dfrac{nx-1}{(1+x\log n)(1+nx^2\log n)}$, 计算积分 $I_n=\displaystyle\int_0^1f_n(x)\mathrm{d}x$, 并解释为什么这里 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n\neq\displaystyle\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$.

97. 是否存在一列连续函数列 $f_n:[0,1]\to[0,1]$ 使得对每个 x,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 但 f 处处不连续?

98. 构造一个 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上连续有界的函数, 但不能被 $v(x)u(y)$ 形式的函数一致逼近, 其中 v 是 $[0,1]$ 上的连续函数,u 是 $\mathbb{R}$ 上的连续有界函数.

99. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{n+1}\sin^n x\cos x$.

100. 定义递推数列 $a_1=x$, $a_{n+1}=\log\dfrac{\mathrm{e}^{a_n}-1}{a_n}$. 证明:$1+a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots=\mathrm{e}^x$.

101. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 且对每个自然数 k 都有 $a_k+a_{2k}+a_{3k}+\cdots=0$. 证明:$a_n\equiv 0$.

102. 设 x_k^n 表示多项式 $x(x-1)\cdots(x-n)$ 的导数在区间 $(k,k+1)$ 内的根. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{2n}-n)$.

103. 判断数列 $a_0=1, a_1=x, a_{n+2}=\dfrac{a_n}{1+a_{n+1}}$ 的敛散性.

104. 给定复数 $z, |z|\neq 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}\right)}{1-z\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}}$.

105. 设 $\{a_n\}$ 是一个复数列. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 对每个满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=0$ 的复数列 $\{b_n\}$ 都收敛当且仅当数列 $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ 有界.

106. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n-\left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

第 3 章 级数

1. 证明 Goldbach 定理: 如果 $A=\{k^m : k,m=2,3,\cdots\}$ 是所有自然数幂的集合, 则 $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{1}{n-1}=1$.

2. 设递推数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

   (a) 所有的 a_n 都是两两互素的.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=1$.

3. 设 $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k^2$, 其中 f_k 是第 k 个 Fibonacci 数, $f_0=f_1=1, f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$, 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{S_n}$.

4. 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n\left[\frac{k}{n}\right]}{k(k+1)}=\log n, n\in\mathbb{N}$.

5. 设 $f(n)$ 表示 n 的十进制展开式中 0 的个数, 对怎样的 a 可以使级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{f(n)}}{n^2}$ 收敛?

6. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{n}=\gamma\log 2-\frac{\log^2 2}{2}$, 其中 γ 是欧拉常数.

7. 求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

8. 证明: 对每一个趋于 0 的数列 $\{a_n\}$ 都存在一个递减的数列 $\{b_n\}$ 使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散. 类似地证明对每个发散到正无穷的数列 $\{a_n\}$ 都存在一个递减的数列 $\{b_n\}$ 使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

9. 设 $\Sigma = \left\{ a = \{a_n\} : \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \right\}$. 构造数列 $b \notin \Sigma$ 使得 $\inf_{a\in\Sigma} \sup_n \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$ 并构造一个 $a \in \Sigma$ 使得 $\inf_{b\in\Sigma} \sup_n \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$.

10. 设 $\sum a_n$ 是一个收敛的正项级数, 求存在一个正项数列 $\{b_n\}$ 使得 $\sum \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ 且 $\sum b_n < +\infty$ 的充要条件.

11. 两个发散的级数 $\sum a_n, \sum b_n$ 的通项单调递减趋于 0, 问能否断言级数 $\sum a_n b_n$ 的敛散性.

12. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是对每一个趋于正无穷的数列 $\{p_n\}$, 数列 $\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{p_n}$ 求趋于 0.

13. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意单增的正整数列 $\{m_k\}$ 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对所有的 $n > N, p \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum_{k=1}^{p} a_{n+m_k} < \varepsilon$.

14. 设 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的正数列,$N(x)$ 表示 $\{a_n\}$ 中不小于 x 的项数. 证明: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则 $\lim_{x\to 0} xN(x) = 0$. 它的逆命题是否正确? 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} N(x)\mathrm{d}x$.

15. 设 $\{u_n\}$ 是单增的正数列且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} < +\infty$. 用 $f(x)$ 表示满足 $\sum_{k=i}^{j} u_k \leqslant x$ 的数对 (i, j) 的个数, 证明 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

16. 确定所有的函数 $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 满足存在收敛于 0 的正数列 $\{a_n\}$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) < +\infty$.

17. 假定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$. 证明: 对每个 $p \in (0, 1)$ 都存在常数 C_p 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} < C_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{1-p}$, 并求出最佳常数 C_p.

18. 证明一般形式的 Dini 定理: 对函数 $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 下面的条件等价:

(1) 对每个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F(r_n)$ 都收敛, 其中 $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$.

(2) 存在 $\delta > 0$ 和 $(0, \delta)$ 上单减可积的函数 h 使得 $F \leqslant h$.

19. 证明对函数 $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 下面的条件等价:

(1) 对每个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n F(s_n)$ 都收敛, 其中 $s_n=\sum\limits_{m=1}^{n} a_m$.

(2) 存在 $\delta>0$ 和 $(\delta,+\infty)$ 上单减可积的函数 h 使得 $F\leqslant h$.

20. 设 $\{\lambda_n\}$ 是非递减的正数列且 f 是非递减的函数满足 $\int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{tf(t)}<+\infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}}{f(\lambda_n)}<+\infty.$$

21. 设 $\{\lambda_n\}$ 是严格递增趋于正无穷的数列, 且对某个 $M>0$ 和所有的 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant M$. 非负单减的函数 $f\in C[\lambda_1,+\infty)$ 满足 $\int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{tf(t)}<+\infty$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)<+\infty$.

22. 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续非负且严格单增的函数, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ 收敛.

23. 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-\log(\log n)}$ 发散.

24. 设复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 0. 证明: 存在 $\{\mathrm{sign}(\varepsilon_n)\}, \varepsilon_n\in\{-1,1\}$ 的一种选择使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n z_n$ 收敛.

25. 设 σ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个置换使得 $\{\sigma(n)-n\}$ 是一个有界数列. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 也收敛. 如果 $\{\sigma(n)-n\}$ 是无界的结论又如何呢?

26. 是否存在正数列 $\{b_n\}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{kn}=\frac{1}{k}$ 对所有的 $k=1,2,3,\cdots$ 都成立?

27. 设 f_0 是区间 $[a,b]$ 上的有界可积函数, $f_n(x)=\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

28. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}}.$$

29. tao 、数列 $s_n=\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan\left(\frac{x}{2^k}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$ 的敛散性.

30. 设 $a,b,c>0$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ 什么时候收敛?

31. 设 $a,b,x\in\mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^a x^{n^b}$ 的敛散性.

32. 对实数 a,b, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a+2(-1)^n n^b}$ 的敛散性.

33. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n n$ 的敛散性.

34. 定义递推数列 $u_0=1, u_{n+1}=\frac{\sin u_n}{n^p}, p\in\mathbb{R}$. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

35. 对实数 x, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!x)$ 的敛散性.

36. 对实数 x, 函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ 是否有界?

37. 当 $x\to+\infty$ 时, 考虑和式 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right)+\sin\left(\frac{n}{x}\right)\right)$ 的渐进性.

38. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos x}$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛.

39. 证明函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{2\sqrt{n}+\cos x}$ 在 $(-2\pi,2\pi)$ 的紧子集上是一致收敛的.

40. 求所有的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos ny}{\sqrt{n}}$ 收敛.

41. 设 $x>1$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{\log x}}{n}$ 的敛散性.

42. 设 $\{a_n\}$ 是单增的正项数列, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}$ 什么时候收敛.

43. 设 K,L 是自然数的两个子集使得 $\sum_{n\in K}\frac{1}{n}<+\infty$ 且 $\sum_{n\in L}\frac{1}{n}<+\infty$, 是否有 $\sum_{n\in K+L}\frac{1}{n}<+\infty$?

44. 设 $\{k_n\}$ 是单增的自然数列,$\{u_n\}$ 表示 $k_1,\cdots,k_n$ 的公因子, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}<+\infty$.

45. $x\geqslant 0$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 的敛散性.

46. 求级数 $f(x)=\frac{1}{a}+\frac{x}{a(a+d)}+\cdots+\frac{x^n}{a(a+d)\cdots(a+nd)}+\cdots$ 的和.

47. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_1\cdots c_nz^n$ 的收敛半径, 其中 $c_k>0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_k}{k}<+\infty$.

48. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!n^p}$ 的收敛域和绝对收敛域.

49. 证明 $\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\frac{1}{2}$.

50. 求极限 $\lim_{x\to-\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

51. 证明函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+(n+1)^2x}}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 单调递减且 $\lim_{x\to 0}S(x)=\frac{1}{2}$.

52. 求无穷乘积 $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+2^{-2^n}\right)$ 的值.

53. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2k}\right)}$ 的和.

54. 设 $a_1=1$,$a_n=n(a_{n-1}+1)$,$n\geqslant 1$, 求 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$.

55. 证明 $\frac{\mathrm{e}}{2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$.

56. $\{a_n\}$ 是 $(0,1)$ 上的实数列, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散当且仅当 $a_1+a_2(1-a_1)+a_3(1-a_1)(1-a_2)+\cdots=1$.

57. 证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$0<a_n<1$, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_n}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{S_k}\frac{a_{n_1}\cdots a_{n_k}}{(1-a_{n_1})\cdots(1-a_{n_k})}.$$

其中 $\sum\limits_{S_k}$ 表示对所有满足 $0<n_1<\cdots<n_k$ 的 $n_1,\cdots,n_k$ 求和.

58. 证明:$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log t\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

59. 证明:$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{np+1}$.

60. 证明:$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\log x}{x-1}\mathrm{d}x=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n-1)}$.

61. 证明:$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\Gamma(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^t}$.

62. 设 $a>0$, 证明:$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x$.

63. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{a_n^2-1}$, 其中 $a_0=2,a_{n+1}=a_n+\dfrac{3+(-1)^n}{2}$.

64. 证明:$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n(2n)!!}=\log 4$.

65. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ 收敛但不绝对收敛. 求使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^p$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 收敛的 p 的范围.

66. 设 $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+x)}$,$-x\notin\mathbb{N}$. 求 $f(10)$, 研究函数 f 的性质.

67. 设实数 a 和 y 满足条件 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $y=\mathrm{e}^{ay}$. 证明:$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^na^n}{n!}=\frac{1}{1-ay}$.

68. 设 $x\geqslant 0$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^nx]}}{2^n}$.

69. 设 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2\left\{\frac{[2^nx]}{2}\right\}}}{2^n}$.

70. 我们可以通过和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 比较来证明调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性, 其中当 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$ 时,$f(n)=2^{-k}$. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-f(n)\right)$ 的敛散性.

71. 判断数列 $u_n=\prod_{k=2}^{n}\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ 和级数 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

72. 证明: 存在常数 C 和 D 使得对 $n\geqslant 2$ 都有 $C\log n\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\left(1-2^{-k}\right)^n\right)\leqslant D\log n$.

73. 证明级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}$ 收敛.

74. 证明级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n^s}$ 对 $s>\frac{1}{2}$ 收敛, 对 $s<\frac{1}{2}$ 发散.

75. 设 $u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 的敛散性. 证明存在正数 a 使得 $\lim_{n\to\infty}n^a u_n$
$\neq 0$.

76. 设 $a\in\mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^a}\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$ 的敛散性.

77. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin^2 n\pi x}{\tan\pi x}\mathrm{d}x}$ 的敛散性.

78. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

79. 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\cos\left(nt^2\right)\mathrm{d}t$ 的敛散性.

80. 是否存在两个条件收敛的级数的 Cauchy 乘积是绝对收敛的?

81. 设 $a,b>0$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^b}$ 的 Cauchy 乘积的敛散性.

82. 设 $S_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}, k_n=\min\{k: S_k\geqslant n\}$, 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}$.

83. 在调和级数中把通项改成 p 个正数后面跟 q 个负数, 证明新的级数收敛当且仅当 $p=q$.

84. 设 $F(n,a)=\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{x}{x+a}\right)^n\mathrm{d}x$. 证明: 对 $a>b>0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F(n,a)}{F(b,0)}$ 收敛.

85. 设 $-1<x<1$, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(4x)^n$ 的和函数.

86. 构造一个负数序列 $\{a_n\}$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^c$ 对每个 $c>0$ 都发散, 但无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_n\mathrm{e}^{int}\right)$ 对几每个 $t\in(0,2\pi)$ 都收敛.

87. 设 $u_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{m^2-n^2}, & m\neq n\\ 0, & m=n\end{cases}$, 求 $\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}, \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}, \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{m,n}$.

88. 求极限 $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

89. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mn\,(m+n+2)}$.

90. 对怎样的实数 c, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|m+n\mathrm{i}|^c}$ 收敛.

91. 给定二重数列 $\{x_{m,n}\}$, 定义 $S_{m,n}=\sum_{h\leqslant m}\sum_{k\leqslant n}x_{h,k}$. 给出一个数列 $\{x_{m,n}\}$ 使得

(1) $x_{m,n}=x_{n,m}$.

(2) $x_{m,2n}=-x_{m,2n+1}=x_{m+1,2n}$ 对 $m\geqslant 2n+1$ 都成立.

(3) $x_{2n,2n}=0$.

(4) $\lim_{m,n\to\infty}S_{m,n}=0$.

(5) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x_{m,n}, \sum_{m=0}^{\infty}x_{m,n}$ 都发散.

再构造数列 $\{x_{m,n}\}$ 使得

(1) 如果 $|n-m|>1$, 则 $x_{m,n}=0$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}x_{m,n}=\sum_{m=0}^{\infty}x_{m,n}=0$ 对所有 m,n 都成立.

(3) 极限 $\lim_{m,n\to\infty}S_{m,n}$ 不存在.

92. 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的密度定义为 $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{n_k}$. 我们知道, 如果 $\{n_k\}$ 是自然数列 $\mathbb{N}$ 的一个子列且 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}<\infty$, 则 $\{n_k\}$ 的密度是 0. 构造一个单增的正数列 $\{b_n\}$

使得 $\dfrac{b_n}{n} \to \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$

$= \infty$, 并且 $\{b_n\}$ 还有一个具有正密度的子列 $\{b_{n_k}\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_{n_k}} < \infty$.

93. 证明 Fejér 定理: 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 可以 Cesáro 求和且 $\sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 < \infty$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛.

94. 证明 Kronecker 引理: 如果 $\{a_n\}$ 是一个复数列且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 收敛, 则 $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0$. 当然反过来是不对的, 但是如果 $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0$, 则对每个 $a > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{1+a}}$ 收敛.

95. 证明: 如果 $\{p_n\}$ 是一个正数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n} < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 p_n}{(p_1 + \cdots + p_n)^2} < \infty$.

96. 设 $\{a_n\}$ 是一个单增的正数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n a_n - (n-1) a_{n-1}}$ 也发散.

97. 证明: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 2\mathrm{e} a_1$.

98. 设 $\{a_n\}$ 是一个正数列满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. 证明: 对每个 $\varepsilon \in (0, \dfrac{1}{2})$, 存在正数列 $\{b_n\}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$, 满足对每个自然数 N 有 $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n > \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

99. 证明 Hardy-Laudau 不等式: 对每个正数列 $\{a_n\}$ 和 $p > 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^{1/p} + \cdots + a_n^{1/p}}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

100. 对 $p = -1$ 证明上面的不等式.

101. 证明 Carleman 不等式: 对正数列 $\{a_n\}$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

102. 证明: 对正数列 $\{a_n\}$ 和每个自然数 k 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$.

103. 证明对每个有界数列 $\{t_n\}$ 和 $a>0$, 证明不等式

$$t_1^{-a}+\sum_{n=1}^{\infty} t_1\cdots t_n t_{n+1}^{-a} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-a}.$$

104. 假定正数列 $\{a_n\}$ 满足对每个自然数 n 有 $a_n<a_{n+1}+a_{n^2}$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

105. 定义函数:$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k}, a_k \geqslant 0$. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n), \sum\limits_{n=1}^{\infty} \log f(n), \sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(1)-f(n)$ 的敛散性.

106. 设 $P_k=\{0,k,2k,\cdots\}$, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{n\in P_k}\frac{x^n}{n!}$.

107. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nx}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{x^k\,(a+n)^k}{n!}$.

108. 设数列 $\{x_n\}$ 是方程 $\tan x=x$ 的所有正实根, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{10}$.

109. 给定正的常数 c 和一个有界函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 使得 $\int_0^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t=\infty$, 定义数列 $\{x_n(c)\}$:
$\int_0^{x_n(c)} f(t)\mathrm{d}t=nc$. 讨论函数 $h(c)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n(c))$ 的性质.

110. 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}\cos n^2 x$ 只在 $x=0$ 处收敛.

111. 对 $x\in(0,1)$, 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 满足 $f(x)+f(1-x)+\log x\log(1-x)=f(1)$.

112. 设 $p,q>0$, 判断无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\left(\frac{x^n}{n^q}\right)$ 的敛散性.

第 4 章 不等式与单变量函数

1. 证明对任意实数 $a, b > 0$ 和自然数 n 有 $\prod_{k=1}^{n}\left(a^k + b^k\right)^2 \geqslant \left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n$.

2. 设 $x_j \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right], j = 1, \cdots, n$, 证明

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^n} \leqslant \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1 - x_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1 - x_j\right)\right)^n}.$$

3. 设 $r_{ij} \in [0, 1], i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$, 证明不等式

$$1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} r_{ij}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - r_{ij}\right)\right).$$

4. 对正实数 $x_j, j = 1, \cdots, n$, 证明不等式

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} x_j^{x_j} \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right)^{\sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

5. 对正实数 $x_1, \cdots, x_n$ 定义函数 $R(x_1, \cdots, x_n) = \dfrac{(x_1 + \cdots + x_n)^{x_1 + \cdots + x_n}}{x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n}}$, 证明

$$R\left(x_1, \cdots, x_n\right) R\left(y_1, \cdots, y_n\right) \leqslant R\left(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n\right).$$

6. 如果 $H(t) = t^t, x = x_1 + \cdots + x_n$ 且 $x_j > 0$, 则

$$\frac{H\left(1 + x\right)}{\prod_{i=1}^{n} H\left(1 + x_i\right)} \leqslant \frac{\Gamma\left(1 + x\right)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1 + x_i\right)} \leqslant \frac{H\left(x\right)}{\prod_{i=1}^{n} H\left(x_i\right)}.$$

7. 对每个 $0 < x_j < \pi$, 以及 $x = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, 证明

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin x_j}{x_j} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

8. 求出 $\mathbb{R}^2$ 上的所有正值函数 f, g 使得

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} f\left(a_j, b_j\right) \sum_{j=1}^{n} g\left(a_j, b_j\right) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)$$

对所有整数 a_j, b_j 成立.

9. 设 $a_0 = 0, a_k = \mathrm{e}^{a_{k-1}}$. 证明: 对任意实数 $t_1, \cdots, t_n$, 和自然数 n, 不等式

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1-t_j\right) \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{j} t_k} \leqslant a_n$$

都成立. 并且等号成立当且仅当 $t_n = a_0, t_{n-1} = a_1, \cdots, t_1 = a_{n-1}$.

10. 如果 $n \geqslant 2$ 且 $x_j > 0, j = 1, \cdots, n$, 证明 $x_1^{x_2} + x_2^{x_3} + \cdots + x_{n-1}^{x_n} + x_n^{x_1} \geqslant 1$.

11. 对正实数 $x_j, j = 1, \cdots, n, n \geqslant 2$ 以及 $r \leqslant n$, 证明

$$r \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n} \frac{x_{j_1} \cdots x_{j_r}}{x_{j_1} + \cdots + x_{j_r}} \leqslant \binom{n}{r}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{r-1}.$$

12. 设 $x_1, \cdots, x_n \in [0,1], n \geqslant 2$. 求 $S_n = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_n - x_1)^2$ 的最大值.

13. 对互异的实数 $x_1, \cdots, x_n$, 证明

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1+x_k^2\right)^{\frac{n}{2}}}{\prod_{j \neq k}\left|x_j - x_k\right|} \geqslant n.$$

何时取等?

14. 对任意正实数 $a_2, \cdots, a_n$, 设 $s = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, 证明:$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}} < s + 2\sqrt{s}$.

15. 设 $x_j > 0, i = 1, \cdots, n, n \geqslant 2$,$s = x_1 + \cdots + x_n$,$0 < c < 1$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s-x_k}{x_k}\right)^c \geqslant (n-1)^{2c} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{s-x_k}\right)^c$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$.

16. 设 $n \geqslant 2$,$0 < x < \dfrac{n}{n+1}$ 证明

$$\left(1 - 2x^n + x^{n+1}\right)^n < \left(1 - x^n\right)^{n+1}.$$

17. 设 $x \geqslant 0, p \geqslant 1$, 证明不等式

$$\sum_{m=0}^{[x]} (x-m)^p \leqslant \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}$$

问何时取等?

18. 对任意 $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, 证明

$$\inf_{0 \leqslant x \leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|x-p_j|} \leqslant 8n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

19. 对自然数 m, n 和实数 $a > 1$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n^m-1} a^k \left[k^{\frac{1}{m}}\right] \leqslant \frac{(n-1)\left(a^{n^m}-a^{n^m/2^m}\right)}{a-1}.$$

20. 设对 $a_k > -1, k = 1, \cdots, n$ 以及每个 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 不等式 $\dfrac{a_1}{1+a_1 x} + \cdots + \dfrac{a_n}{1+a_n x} \leqslant 1$ 成立, 证明:

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \leqslant \mathrm{e}.$$

21. 设 $a > 0, a \neq 1$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}$.

22. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right)$.

23. 当 $x \to 1^-$ 时, $\sqrt{1-x}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{4^n}\right)$ 的极限是否存在?

24. 求 $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{p+1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p x^n$.

25. 设 $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 利用函数 f 给出函数 $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n S_n x^n$ 的一个直接表达式.

26. 证明不等式

$$\frac{n\log n}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

27. 设 $a > 1, x > 0$, 证明: $-\log\left(1-(1-\mathrm{e}^{-x})^a\right) < x^a$.

28. 设 $x>1$, 定义函数

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\log(x+n)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right),$$

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\log\log(x+n)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)\log(x+k)}\right).$$

证明: 当 x 充分大的时候,$xh(x)>\log g(x)$.

29. 对任意实数 x, 证明:$\lim\limits_{t\to\infty}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{tx^2}{(n+t)^2}\right)=\mathrm{e}^{x^2}$.

30. 当 $x\to\infty$ 时, 证明函数 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$ 单调趋于 $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

31. 证明不等式:

$$2\arctan\frac{1}{2n-1}<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

32. 对任意 x, 证明不等式 $\left|\dfrac{\pi}{4}-\arctan x\right|\leqslant\dfrac{\pi}{4}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}$.

33. 设 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 证明:$\sin t\geqslant\dfrac{2}{\pi}t+\dfrac{t}{12\pi}(\pi^2-4t^2)$.

34. 设 $0<x<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, 证明:$(\sin x)^2\leqslant\sin x^2$.

35. 设 $x>0, a>1$, 不等式 $\tanh x>\sin ax$ 是否成立?

36. 设 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi$, 证明 $\cos x+\cos y\leqslant 1+\cos xy$.

37. 设 $(-1)^t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, 证明:$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2(-1)^t\,\mathrm{e}^{(-1)^t x}\mathrm{d}t=\dfrac{\sinh x}{\mathrm{i}\pi x}$.

38. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\displaystyle\int_0^1(bx+a(1-x))^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}$.

39. 设 $[\![x]\!]$ 表示距离 x 最近的整数与 x 的距离, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n[\![\frac{n}{x}]\!]\mathrm{d}x$.

40. 研究函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 的连续性和可微性.

41. 设 $a>0$, 判断积分 $\displaystyle\int_0^\infty x\sin(x^3-ax)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

42. 求 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

43. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

44. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+tx)}.$

45. 设 $a>1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}(x^a-[x^a])\sin x\mathrm{d}x.$

46. 设 $p>0, x\geqslant 0$, 证明:$\frac{2}{\pi}\int_x^{px}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant 1-\frac{1}{p}.$

47. 求 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)}.$

48. 研究函数 $f(t)=\int_0^{\pi}x^t\sin x\mathrm{d}x$ 当 $t\to\infty$ 时的渐进性质.

49. 研究积分 $\int_0^{\infty}\sin t^n\mathrm{d}t$ 当 $n\to\infty$ 时的渐进性质.

50. 研究函数 $I(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin xt}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$ 的可微性和连续性, 证明:$I(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}.$

51. 设 $a>1$, 如果 $f(t)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t}{n^a}\right)$, 证明: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^{1/a}}\log f(t)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{a}}.$

52. 求乘积 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ 和积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

53. 求 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{\pi^2-x^2}\mathrm{d}x.$

54. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x.$

55. 证明 $\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{\cos^2 t}}\right)\mathrm{d}t$. 在这个公式中能否令 $a\to\infty$?

56. 设函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 对实数 s 满足估计 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{sx}\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{s^2}$. 证明: 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{\varepsilon x^2}\mathrm{d}x<\infty.$

57. 求出具有 $\frac{x+b}{cx+d}$ 形式的函数 $f(x)$ 使得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\tan x-f(x)|\mathrm{d}x$ 取到最小值.

58. 证明: 函数 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2k}\cos 2tx\mathrm{d}t, k\in\mathbb{N}$, 满足性质:

(1) $f(x)=0, |x|\geqslant k, f(x)>0, |x|<k$.

(2) $f(x)$ 在每一个具有 $(j, j+1), j=-k,-k+1,\cdots,k-1$ 形式的区间上都是一个次数不超过 $2k-1$ 的多项式.

59. 证明: 如果 f 在 $[1,\infty)$ 一致连续, 则 $f(x)=O(x)$.

60. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上单增的连续函数使得 $f(x)-x$ 是以 1 为周期的周期函数. 用 f^n 表示 f 的 n 重迭代, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^n(x)}{x}$ 存在, 并说明 f 的连续性假设是必要的.

61. 设 u_n 表示多项式 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 的唯一正根, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

62. 设 $0<a_1<\cdots<a_n$ 是多项式 $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0, n\geqslant 2$ 的根. 证明: 对每个 $m\leqslant n$, 多项式 $c_mx^m+\cdots+c_0$ 在区间 $[a_m,\infty)$ 都是不变号的.

63. 设多项式 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, n\geqslant 2$ 的系数满足不等式 $0<a_0<-\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\dfrac{a_{2k}}{2k+1}$. 证明 P 在 $(-1,1)$ 内有一个实根.

64. 证明: 由递推公式 $P_0=1, P_1=x+1, P_{n+1}=P_n+xP_{n-1}$ 定义的多项式 P_n 只有实根.

65. 设 $\prod\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\neq 0$, 是否有可能函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(\cos b_kx+c_k)$ 不变号.

66. 设 f 是 $[0,\pi]$ 上的连续函数, 满足 $\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0$, 则 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

67. 设 f 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nh)=0$ 对任意 $h\in(a,b), 0<a<b$ 都成立, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=0$.

68. 设 $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ 满足对每个 a 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{a}{n}\right)=0$, 是否意味着 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$?

69. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)>0, f(1)<0$, 且存在连续函数 g 使得 $f+g$ 是非递减的, 证明存在 ξ 使得 $f(\xi)=0$.

70. 给定 $[0,1]$ 上的连续函数 f, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kf\left(\dfrac{k}{n}\right)=0$.

71. 设 $f(0,1]\to\mathbb{R}$ 单调递减, 且对某个 a 有 $\int_0^1x^af(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}x^{a+1}f(x)=0$.

72. 设 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 一致连续, 是否有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=1$?

73. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$, 证明 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t) \mathrm{d}t = s$.

74. 设 $f \in C^1[-a,a]$, 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{1-\cos\lambda x}{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

75. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n x^n$, 且 $r \neq 0$ 是幂级数 f 的收敛区间外部的一点. 如果 $s_m(r) < f(r)$ 对 $m = 1, 2, \cdots$ 都成立, 证明 $f'(r) \neq 0$.

76. 证明 Fejér 定理: 如果 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

77. 设 g 是 $\mathbb{R}^+$ 上的正值连续函数,$a > 1$, 证明函数 $f(t) = g(t) \int_0^t g(s)^{-a} \mathrm{d}s$ 无界. 如果 $a = 1$ 的话结论又如何?

78. 证明: 如果 f 是 $\mathbb{R}^+$ 上非负连续的函数, $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \infty$, 则存在 h 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \infty$.

79. 设 f 是 $[0,1]$ 上的正值单减函数, 证明

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

80. 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的连续函数,$g > 0$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x}$.

81. 证明: 对任意 $[a,b]$ 上的正值函数 f 和固定的实数 u, 表达式 $\left(\frac{\int_a^b f^{s+u}(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^s(x)\,\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{u}}$ 关于 s 单增.

82. 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的任意连续函数, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\mathrm{d}x\right)^2.$$

给出此不等式的一个几何解释.

83. 设函数 f 满足当 $x < x_0$ 时,$f'(x) < 0 < f''(x)$; 当 $x > x_0$ 时,$f'(x) > 0 > f''(x)$. 证明 f 在 x_0 处不可导.

84. 如果 $f \in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明 $\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

85. 设 $f \in C^1[0,a]$, 证明 $|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$.

86. 设 $f \in C^1[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 证明不等式

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \left(|f(t)| + \left|f'(t)\right|\right)^2 \mathrm{d}t.$$

给出一个例子说明上述常数不能改进.

87. 如果 $f \in C^1[a,b]$, $f(a) = 0$ 且 $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$, 证明

$$\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

88. 设 $f \in C^1[0,1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

并求出取等条件.

89. 证明 Wirtinger 不等式: 如果 f 是 $[0,2\pi]$ 上的绝对连续函数, $f(0) = f(2\pi)$, $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

并且等号成立当且仅当 $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

证明离散 Wirtinger 不等式: 对实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_{n+1} = x_1$, $\sum_{k=1}^n x_k = 0$, 则

$$4\sin^2\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^n x_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^n \left(x_{j+1} - x_j\right)^2.$$

等号成立当且仅当 $x_j = A\cos\frac{2(j-1)\pi}{n} + B\sin\frac{2(j-1)\pi}{n}$.

90. 设 $f \in C^2[a,b]$, $a \leqslant 0$, $b \geqslant 2$, 证明

$$\int_a^b \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}\left(f(0) - 2f(1) + f(2)\right)^2.$$

等号成立当且仅当 $f(x) = A + Bx + C\left(x_+^3 - 2(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3\right)$, 其中 $t_+ = \max\{0, t\}$.

91. 设 $f \in C[a,b] \cap C^2(a,b)$, $f(a) = f(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{a<x<b} \left|f''(x)\right|.$$

进一步如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 则上述常数 $\frac{1}{12}$ 可以用 $\frac{1}{24}$ 代替.

92. 对固定的实数 a, 设 $K = \{f \in C^2[0,1] : f(0) = 0, f'(0) = a, f(1) = 0\}$. 求 $\min\limits_{f\in K}\left\{\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right\}$, 以及取等条件.

93. 给定 $f \in C^2[0,1]$, $f(0) = 0$, 求

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n+1}\right)\right).$$

并应用此结论求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\log 2 - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \frac{2}{2k+1}\right)$.

94. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[f\left(a + \frac{k}{k^2+n^2}\right) - f(x)\right] = \frac{\log 2}{2} f'(a).$$

95. 设 f 是区间 (a,b) 上的连续函数, 如果对任意 $x \in (a,b)$ 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\int_0^h [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\,\mathrm{d}u = 0.$$

证明 f 必为线性函数.

96. 设可微函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, 满足 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$\left|f'(c)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

97. 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$ 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 都成立, $\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1$, 证明存在点 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $|f(x_0)| \geqslant 2^n(n+1)$.

98. 考虑函数 f 在 a 的邻域内带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^{n}.$$

假定对 $j=1,2,\cdots,p-1,f^{(n+j)}(a)=0$ 且 $f^{(n+p)}(a)\neq 0$. 证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\left(\frac{n!p!}{(n+p)!}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

99. 设 $f\in C^{n}[0,1]$ 且 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ 对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 都成立, 证明

$$\int_0^1\left|f^{(n)}(x)\right|^{p}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(2n+1)^{-\max\left\{1,\frac{p}{2}\right\}}}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{p}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|^{p}.$$

100. 设 $f\in C^{n}[0,1]$ 且 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ 对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 都成立, 且 $\int_0^1 x^{k}f(x)\mathrm{d}x=0$ 对 $k=1,\cdots,m$ 都成立, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2}\leqslant(2n+1)\left(\frac{n!m!}{(2n+m+1)!}\right)^{2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^{2}\mathrm{d}x.$$

第 5 章 多变量函数与 Fourier 级数

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\int_0^x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\mathrm{e}^{-x^3}\int_0^x\int_0^{x-u} \mathrm{e}^{u^3+v^3}\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$

3. 设 $f\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$,$a\in\mathbb{R}$,$D\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0\}$,

$$I_n(a)=n^a\int_D(1-x-y)^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 对任意 $c>0$, 证明

$$\int_1^\infty\cdots\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n(\max\{x_1,\cdots,x_n\})^c}<\infty.$$

5. 如果 $f\in L^p(\mathbb{R})$, $p=\frac{n+1}{n}$, 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x_1)\cdots f(x_n)f(x_1+\cdots+x_n)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\leqslant\|f\|_p^{n+1}.$$

6. 证明积分 $\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1)\cdots f(x_n)f(x_1+\cdots+x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ 收敛, 这里 $f(x)=\min\left\{1,\frac{1}{|x|}\right\}$.

证明积分

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sin x_1}{x_1}\cdots\frac{\sin x_n}{x_n}\frac{\sin(x_1+\cdots+x_n)}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

绝对收敛.

证明对 $a_j>0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\sin a_1x_1}{x_1}\cdots\frac{\sin a_nx_n}{x_n}\frac{\sin(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}{x_1+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\pi^n\min\{a_1,\cdots,a_n\}.$$

7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1\cdots\int_0^1\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$

8. 对任意 $N\times N$ 正定矩阵 A 和对称矩阵 B, 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-(x,Ax)-\mathrm{i}(x,Bx)}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi^N}{\det(A+\mathrm{i}B)}}.$$

9. 设 $f \in (C[0,1] \times [0,1])$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2 \int_0^1\int_0^1 (xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10. 设 $f \in (C^1[0,1] \times [0,1])$, 求

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n} f\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)\right).$$

11. 设 $f \in \mathbb{C}([a,b]\times[-1,1])$, 求 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^b f(x,\sin tx)\,\mathrm{d}x$.

12. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 连续, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. 设 $D = \left\{(x_1,\cdots,x_n): \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant r^2\right\}$, 对固定的 $r>0$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_D \prod_{k=1}^{n} f(x_k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

13. 设整数 $p<q$, 实数 $x\neq 0(\mathrm{mod}2\pi)$, 证明 $\left|\sum\limits_{n=p}^{q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\left|\frac{x}{2}\right|}$. 进一步证明: 如果 $c_p \geqslant c_{p+1} \geqslant \cdots \geqslant c_q \geqslant 0$, 则 $\left|\sum\limits_{n=p}^{q} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right| \leqslant \dfrac{c_p}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$.

14. 设数列 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 0, 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 对所有的 $x\neq 0(\mathrm{mod}2\pi)$ 都收敛, 并且这种收敛在任何不包含 2π 整数倍的闭区间是一致的.

15. 设 $c_n \geqslant c_{n+1} \geqslant 0, nc_n \leqslant A$ 对某个 $A>0$ 成立, 证明 $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} c_n\sin nx\right| \leqslant A(\pi+1)$. 利用公式 $\dfrac{\pi-x}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}, 0<x<2\pi$ 证明对所有 x 和 n 有

$$\left|\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}+1.$$

16. 如果 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 0, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\cos nx$ 一致收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\sin nx$ 一致收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 0$.

17. 如果 $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leqslant |\sin x|$, 证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n| \leqslant 1$.

18. 证明 Bernstein 不等式:$\|f'\|_\infty \leqslant N\|f\|_\infty$ 对所有次数不超过 N 的三角多项式都成立.

19. 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}.$$

20. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{n \log n}, 0 < t < \pi$ 是否绝对收敛?

21. 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{inx} \frac{1 + |n|}{\log(2 + n^2)}$ 是否是某个有界函数的 Fourier 级数.

22. 利用 Parseval 等式证明 $\frac{1}{\sin^2 t} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - n\pi)^2}$.