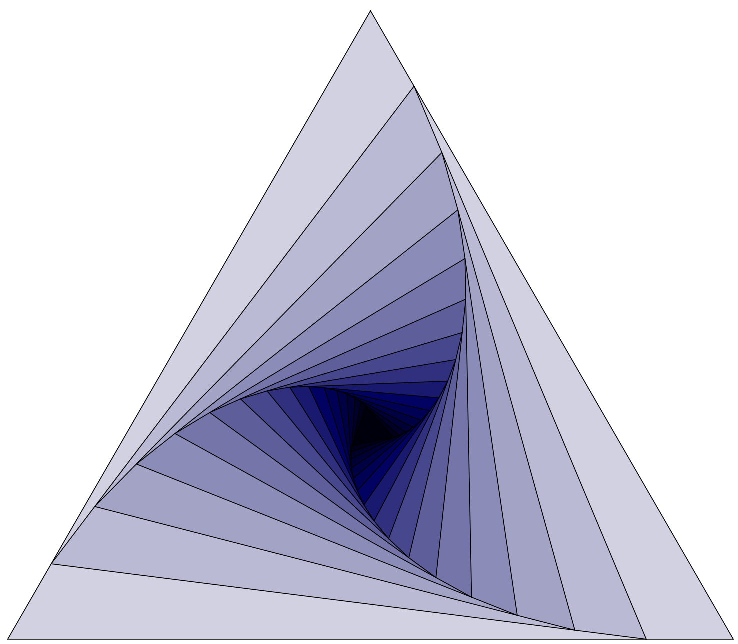
2006-2020 年考研数学二真题解答

向禹 ◎ 著

第一版



yuxtech.github.io

目　次

1　2006 年考研数学二

一　填空题, $1 \sim 6$ 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线为________.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\dfrac{1}{5}$, 故曲线的水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$________.

解 根据连续的定义, 由洛必达法则得 $a=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

3. 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$.

4. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

解 原方程变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x$, 解得 $\ln|y|=\ln|Cx|-\ln \mathrm{e}^x$, 即 $y=Cx\,\mathrm{e}^{-x}$ $(x\neq 0)$, C 为任意常数.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\,\mathrm{e}^y$ 确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=$________.

解 当 $x=0$ 时, $y=1$, 原方程两边对 x 求导得 $y'=-\mathrm{e}^y-x\,\mathrm{e}^y\,y'$, 代入 $x=0$, $y=1$ 得 $y'(0)=-\mathrm{e}$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 由条件可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|2\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2^2=4,$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$, 所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

二　选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (　)

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解　由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>f'(x_0)\Delta x>0, \Delta x>0$, 即 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$, 选 A.

8. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 (　)

A. 连续的奇函数　　B. 连续的偶函数

C. 在 $x=0$ 间断的奇函数　　D. 在 $x=0$ 间断的偶函数

解　首先, 可积函数的变上限积分一定是连续的, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}(-u)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=F(x),$$

因此 $F(x)$ 是连续的偶函数, 选 B.

9. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 则 $g(1)$ 等于 (　)

A. $\ln 3-1$　　B. $-\ln 3-1$　　C. $-\ln 2-1$　　D. $\ln 2-1$

解　$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导得 $h'(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}g'(x)$, 令 $x=1$, 结合 $h'(1)=1, g'(1)=2$, 解得 $g(1)=-\ln 2-1$, 选 C.

10. 函数 $y=C\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{-2x}+x\,\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是 (　)

A. $y''-y'-2y=3x\,\mathrm{e}^x$　　B. $y''-y'-2y=3\,\mathrm{e}^x$

C. $y''+y'-2y=3x\,\mathrm{e}^x$　　D. $y''+y'-2y=3\,\mathrm{e}^x$

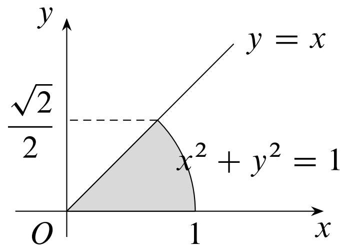
解　由所给解的形式知, 原微分方程对应的齐次方程有特征根 $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$, 即对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2)=\lambda^2+\lambda-2=0$, 故对应的齐次方程为 $y''+y'-2y=0$. 又 $y=x\,\mathrm{e}^x$ 为原微分方程的一个特解, 而 λ_1 为单特征根, 那么非齐次方程的右端应具有形式 $f(x)=k\,\mathrm{e}^x$, 正确答案选 D.

11. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于 (　)

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解 如图, 积分区域是一个 Y 型区域, 则原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 选 C.



第 11 题图

12.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

解 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0, 则

$$\begin{cases} F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases},$$

那么当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0\neq 0, \varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

注意到 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$, 于是 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 选 D.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

解 注意到 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s,$$

因此 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关, 选 A.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

解 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1},$$

因此选 B.

三 解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值, 使得

$$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解 将 e^x 的泰勒展开式 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入题设等式得

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

展开整理得

$$1+(B+1)x+\left(B+C+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3),$$

比较两边同次幂的系数可得

$$\begin{cases}B+1=A\\B+C+\dfrac{1}{2}=0\\\dfrac{B}{2}+C+\dfrac{1}{6}=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 10 分)

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 首先分部积分得

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x&=-\int\arcsin\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}.\end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$, 则 $x=\frac{1}{2}\ln(1-t^2), \mathrm{d}x=-\frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t$, 那么

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C,\end{aligned}$$

因此原积分 $=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C$.

17.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 于是

$$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

18.(本题满分 12 分)

设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解 (1) 因为 $x_2=\sin x_1\in(0,1]$, 那么归纳可知当 $n\geqslant 2$ 时, 均有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在. 在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$ 可得 $a=\sin a$, 此方程的唯一解为 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 令 $t=x_n\to 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\exp\left(\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\exp\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t-t}{t}+1\right)\right]\\&=\exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

证 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x, x\in(0,\pi)$, 则

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,\quad f'(\pi)=0,$$
$$f''(x)=\cos x+x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,$$

因此当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x)>f'(\pi)=0$, 则 $f(x)$ 单调增加, 于是当 $0<a<b<\pi$ 时, $f(b)>f(a)$, 即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

20.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (1) 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 由复合函数偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\&=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 以及 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(2) 令 $f'(u)=p$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=-\dfrac{p}{u}$, 解得 $\ln|p|=\ln\left|\dfrac{C}{u}\right|$, 所以 $f'(u)=p=\dfrac{C}{u}$. 由 $f'(1)=1$ 知 $C=1$, 于是 $f(u)=\ln u+C_2, u>0$. 再由 $f(1)=0$ 知 $C_2=0$, 于是 $f(u)=\ln u, u>0$.

21.(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$.

(1) 讨论 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0,y_0), 并写出切线的方程;

(3) 求此切线与 L (对应于 $x \leqslant x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 (1) 注意到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2-t}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\bigg/(2t)=-\frac{1}{t^3}<0, t\geqslant 0,$$

因此曲线 L 是凸的.

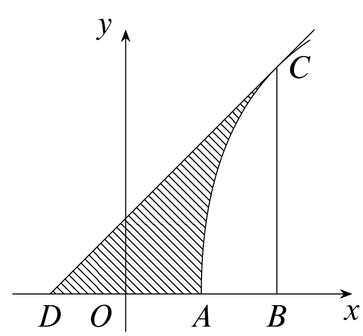
(2) 由 (1) 知, 切线的方程为 $y-0=\dfrac{2-t}{t}(x+1)$. 设 $x_0=t_0^2+1, y_0=4t_0-t_0^2$, 则

$$4t_0-t_0^2=\frac{2-t_0}{t_0}(t_0^2+2),\ \text{即}4t_0-t_0^2=(2-t_0)(t_0^2+2).$$

整理得 $t_0^2+t_0-2=0\Rightarrow t_0=1$ 或 -2 (舍去). 将 $t_0=1$ 代入参数方程, 得切点为 $(2,3)$, 故切线方程为 $y=x+1$.

(3) 所求平面图形如图所示, 其中各点的坐标分别为 $A(1,0), B(2,0), C(2,3), D(-1,0)$. 设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$, 则所求的面积为

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle BCD}-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\times 3\times 3-\int_0^1(4t-t^2)\cdot 2t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$



第 21 题图

22.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_2+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

解 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解, 因此 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$, 即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 又显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A)\geqslant 2$, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&a+1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{pmatrix}.$$

由题设和第一问知, $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2$, 则

$$4-2a = b+4a-5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3.$$

此时 $\bar{\boldsymbol{A}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{\alpha} = (2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, $\boldsymbol{\eta}_1 = (-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

23.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,2,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 即有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}, k \neq 0$;

特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}} + k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}, k_1, k_2$ 不全为零.

(2) 先对 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 进行斯密特正交化,

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

2　2007 年考研数学二

一　选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是　　　　(　　)

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

解　当 $x \to 0^+$ 时,

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x},$$
$$\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1+1\right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x},$$
$$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 函数 $f(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}\right)\tan x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$　　　　(　　)

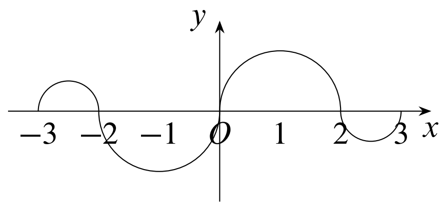
A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

解　$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的无定义点, 即间断点为 $x = 0, 1, \pm\dfrac{\pi}{2}$, 不难得知 $x = 1, \pm\dfrac{\pi}{2}$ 均为第二类的无穷间断点, 而

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}\right)\tan x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}} = 1\cdot(-1) = -1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}\right)\tan x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}} = 1\cdot 1 = 1,$$

因此 $x = 0$ 为第一类的跳跃间断点, 选 A.

3. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )



第 3 题图

A. $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

解 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2)=\frac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆的面积之差, $F(3)=\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3)=\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

解 A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则

$$f(0)=0,\ f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x)=|x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

5. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x)=\infty$, 所以 $x=0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x)=0$, 所以 $y=0$ 为水平渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-x)&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})=0,\end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y=x$, 选 D.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n), n=1,2,\cdots$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

解 如果 $u_2>u_1$, 即 $f(2)>f(1)$, 由于 $f''(x)>0$, 那么 $f'(x)$ 单调递增, 对任意正整数 n,

$$f(n+2)-f(n+1)=f'(\xi_1)>f'(\xi_2)>f(n+1)-f(n),$$

因此 $f(n)$ 单调递增, 且 $f'(x)>f(2)-f(1), x\geqslant 2$, 那么

$$f(n)-f(2)=f'(\xi)(n-2)>[f(2)-f(1)](n-2),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=+\infty$, 即 $\{u_n\}$ 发散, 选 D. 对于 A 和 B 可分别取 $f(n)=n^2$ 和 $f(n)=\dfrac{1}{n}$ 作为反例.

7. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$

解 选项 A, B 分别是连续和偏导数的定义, 这都不是可微的充分条件, 对于 D 选项可取反例 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, 可知 $f(x,y)$ 满足条件, 但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 正确答案选 C, 事实上, C 选项就是可微的定义,

$$\Delta f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=0\cdot f_x'(0,0)x+0\cdot f_y'(0,0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 因此选 C.

8. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 ( )

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解 积分区域 $D:\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\sin x\leqslant y<1$, 也可表示为

$$0\leqslant 1,\pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi,$$

因此 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$, 选 B.

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

解 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

10.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似 B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似 D. 既不合同, 也不相似

解 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,3,3$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $0,1,1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同而不相似, 选 B.

二 填空题, 11 ∼ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x+x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

12.曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

解 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\cos t}{-\sin t - 2\cos t\sin t}$, 于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, 故法线的斜率为 $1+\sqrt{2}$.

13.设函数 $y = \dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$________.

解 $y = (2x+3)^{-1}, y' = -1\cdot 2(2x+3)^{-2}, y'' = -1\cdot(-2)2^2(2x+3)^{-3}$, 归纳可知 $y^{(n)} = (-1)^n n!2^n(2x+3)^{-n-1}$, 从而 $y^{(n)}(0) = \dfrac{1}{3}(-1)^n n!\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

14.二阶常系数非齐次线性方程 $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y =$________.

解 齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, 因此齐次方程的通解为 $Y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}$. 设非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为 $y^* = k\,\mathrm{e}^{2x}$, 代入可得 $k = -2$, 因此原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x}$.

15.设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$________.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) + f_2'\cdot\dfrac{1}{y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_1'\cdot\dfrac{1}{x} + f_2'\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$, 于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(-\frac{y}{x^2}f_1' + \frac{1}{y}f_2'\right) - y\left(\frac{1}{x}f_1' - \frac{x}{y^2}f_2'\right) = -\frac{2y}{x}f_1' + \frac{2x}{y}f_2'.$$

16.设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

解 直接计算可得 $\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(\boldsymbol{A}^3) = 1$.

三 解答题, 17 ～ 24 题, 共 86 分.

17.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

解 等式两边对 x 求导得

$$x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}=f^{-1}[f(x)]f'(x)=xf'(x),$$

因此 $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$, $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)+C, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. 当 $x=0$ 时,

$$\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $f^{-1}(t)\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 因此必有 $f(0)=0$, 即 $C=0$, 所以 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)$.

18.(**本题满分** 11 **分**)

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\ (a>1,0\leqslant x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

(1) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(2) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

解 (1) $V(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\pi y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\pi\left(\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b^2}=\frac{a^2\pi}{\ln^2 a}$, 其中 $b=\dfrac{\ln a}{a}$.

(2) 令 $g(a)=\dfrac{a}{\ln a}$, 则 $g'(a)=\dfrac{\ln a-1}{\ln^2 a}$, $a=\mathrm{e}$ 是唯一驻点, 也是最小值点, 因此 $a=\mathrm{e}$ 时, $V(a)$ 取最小值 $V(\mathrm{e})=\pi\mathrm{e}^2$.

19.(**本题满分** 10 **分**)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 原方程变为 $p'(x+p^2)=p$, 即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\frac{x}{p}=p$$

解得 $x=p(p+C_1)$, 代入 $p(1)=y'(1)=1>0$ 可得 $C_1=0$, 所以 $x=p^2, p=y'=\sqrt{x}$, 进一步得 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+C_2$, 结合 $y(1)=1$ 得 $C_2=\dfrac{1}{3}$, 因此 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{3}$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\,\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定, 设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 在 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 中令 $x=0$ 得 $y=1$, 在方程两端对 x 求导得

$$y'-\mathrm{e}^{y-1}-x\mathrm{e}^{y-1}y'=y'-\mathrm{e}^{y-1}-(y-1)y'=0.$$

代入 $x=0, y=1$ 得 $y'(0)=1$. 上式两端再对 x 求导得

$$-y'^2+(2-y)y''-\mathrm{e}^{y-1}y'=0,$$

代入 $x=0, y=1, y'=1$ 可得 $y''(0)=2$.

又 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$. 进一步,

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}+\sin x\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=0}=f'(0)(2-1)=f'(0)=1.$$

21.(**本题满分 11 分**)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 由题意有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\leqslant x_2, x_1, x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}, g(x_2)=M=\max_{x\in[a,b]}g(x).$$

若 $x_1=x_2$, 令 $c=x_1$, 则 $F(c)=0$.

若 $x_1<x_2$, 因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$, 从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得 $F(c)=0$.

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 有 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

22.(**本题满分 11 分**)

设二元函数

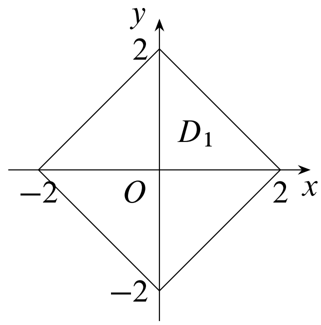
$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2\end{cases},$$

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

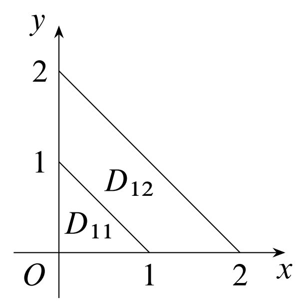
解 区域 D 如图 (1) 所示, 它关于 x, y 轴对称, $f(x,y)$ 关于 x, y 均为偶函数, 得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D_1 是 D 在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成如图 (2) 所示的两部分: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, 其中

$$D_{11}: |x|+|y| \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, \qquad D_{12}: 1 \leqslant |x|+|y| \leqslant 2, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

于是 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{r}\cdot r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

所以

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

23.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \tag{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解 因为方程 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}. \tag{3}$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是当 $a = 1$ 时, 有 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$, 方程组 (3) 有解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 所以 (1)、(2) 的公共解为 $k(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, k \in \mathbb{R}$.

当 $a = 2$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为 $(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 即 (**??**)、(**??**) 的公共解为 $(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

24.(**本题满分 11 分**)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$ 得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1&=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1\\&=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E}$, 及 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 得 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=1,\mu_3=1$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

其基础解系为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征向量为 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}},k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k_1\neq 0,k_2,k_3$ 不全为零.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3　2008 年考研数学二

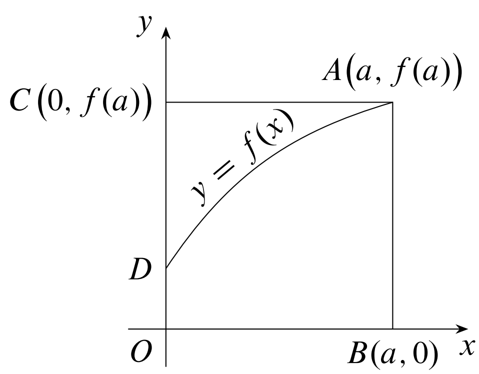
一　选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x+2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为　(　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　注意到 $f(0)=f(1)=f(-2)=0$, 因此由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(-2,0)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 且由定义知 $f'(0)=0$. 而 $f'(x)$ 为三次多项式, 因此 $f'(x)$ 有且只有 3 个零点, 选 D.

2. 如图, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于　(　)



第 2 题图

A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积　　B. 梯形 $ABOD$ 的面积

C. 曲边三角形 ACD 的面积　　D. 三角形 ACD 的面积

解　由分部积分知

$$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a x\,\mathrm{d}f(x)=af(a)-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积, $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 为曲边三角形 ACD 的面积, 选 C.

3. 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ( )

A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$
B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解 从通解形式可知微分方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2\,\mathrm{i}$. 因此对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda^2+4) = \lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4 = 0$, 故对应的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y = 0$, 选 D.

4. 设函数 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有 ( )

A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点
B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
C. 2 个跳跃间断点
D. 2 个无穷间断点

解 直接计算可知 $x = 0$ 是可去间断点, $x = 1$ 是跳跃间断点, 选 A.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ( )

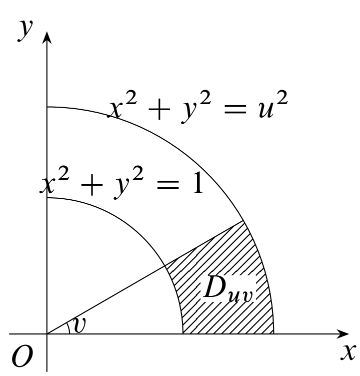
A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛
D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

解 对 B 选项, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. A 选项可取反例

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2+x^2}, & x \geqslant 0 \\ -1 - \dfrac{1}{2+x^2}, & x < 0 \end{cases}, x_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

C 和 D 选项可取反例 $f(x) = \arctan x, x_n = n$, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \displaystyle\iint\limits_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u} =$ ( )



第 6 题图

A. $vf(u^2)$ B. $\frac{v}{u}f(u^2)$ C. $vf(u)$ D. $\frac{v}{u}f(u)$

解 利用极坐标可得

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^v \mathrm{d}v\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}r\,\mathrm{d}r=v\int_1^u f(r^2)\,\mathrm{d}r,$$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$, 选 A.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆 B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^3=0$, 即 $\lambda=0$. 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$, 则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$,

记 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}$, 则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)=0,$$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$, 正负关系指数相同, 选 D.

二 填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$, 则 $f(0)=$________.

解 利用等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2f^2(x)}{x^2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2}=1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$, 又 $f(x)$ 连续, 可知 $f(0)=2$.

10.微分方程 $(y+x^2\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解为 $y=$________.

解 原方程变形得 $y' - \dfrac{y}{x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$, 于是 $\left(\dfrac{y}{x}\right)' = \dfrac{xy'-y}{x^2} = \mathrm{e}^{-x}$, 因此 $\dfrac{y}{x} = -\mathrm{e}^{-x} + C$, 即方程的通解为 $y = x(C-\mathrm{e}^{-x})$.

11.曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

解 原方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)(y+xy') + \dfrac{y'-1}{y-x} = 1$, 代入 $x=0, y=1$ 得 $y'(0)=1$, 因此曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

12.曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

解 $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1+x)$, 于是拐点的坐标为 $(-1,-6)$.

13.设 $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$________.

解 $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}(\ln y - \ln x)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}(\ln y-\ln x)}\left(\dfrac{\ln y - \ln x}{y} - \dfrac{1}{y}\right)$, 代入 $x=1, y=2$ 可知 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

14.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$, 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda=$________.

解 $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8\times 2\times 3\lambda = 48\lambda = -48$, $\lambda = -1$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\sin x}{\sin^4 x} = \frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \displaystyle\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2t\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ x\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2t\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ 得 $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, 积分并由条件 $x\big|_{t=0}=0$ 得 $\mathrm{e}^x = 1+t^2$, 即

$x=\ln(1+t^2)$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2t\ln(1+t^2)}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\&=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1].\end{aligned}$$

17.(**本题满分** 9 **分**)

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解

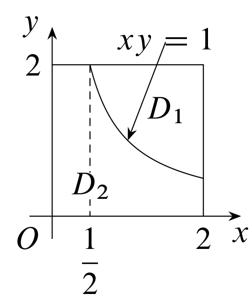
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,\mathrm{d}(\sin 2t)\\&=\frac{\pi^2}{16}-\left.\frac{t\sin 2t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

18.(**本题满分** 11 **分**)

计算 $\displaystyle\iint\limits_D\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2, 于是

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_{D_1}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\int_{\frac12}^2\mathrm{d}x\int_{\frac1x}^2xy\,\mathrm{d}y+\int_0^{\frac12}\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y+\int_{\frac12}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac1x}\mathrm{d}y\\=&\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.\end{aligned}$$



第 18 题图

19.(**本题满分** 11 **分**)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$, 直线 $x=0,x=t$, 曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴

旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$, 由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

上式两端对 t 求导, 得 $f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$, 即 $y'=\sqrt{y^2-1}$, 由变量分离法解得

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=t+C_1,$$

即 $y+\sqrt{y^2-1}=C\,\mathrm{e}^t$. 将 $y(0)=1$ 代入知 $C+1$, 故

$$y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^t,\quad y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}),$$

于是所求函数为 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

20.(**本题满分 11 分**)

(1) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$.

(2) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$, 使得 $\varphi''(\xi)<0$.

证 (1) *方法一* 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值, 即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[a,b],$$

由定积分的性质, 有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\Rightarrow m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M,$$

由连续函数的介值定理可知, 至少存在一点 $\eta\in[a,b]$, 使得

$$f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$.

方法二 令 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, x\in[a,b]$, 则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 由拉格朗日中值定理知存在 $\eta\in(a,b)$[1] $\subset[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)=f(\eta)(b-a).$$

[1]事实上, 这里的结论更强.

(2) 由 (1) 知, 至少存在一点 $\eta \in (2,3)$, 使得

$$\int_2^3 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta).$$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2), \varphi(\eta) < \varphi(2)$, 得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0, \qquad 1 < \xi_1 < 2,$$
$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} < 0, \qquad 2 < \xi_2 < \eta < 3.$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0, \quad \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (1,3).$$

21.(**本题满分 11 分**)

求函数 $u = x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z = x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

解 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4),$$

令

$$\begin{cases} F_x' = 2x+2\lambda x+\mu = 0 \\ F_y' = 2y+2\lambda y+\mu = 0 \\ F_z' = 2z-\lambda+\mu = 0 \\ F_\lambda' = x^2+y^2-z = 0 \\ F_\mu' = x+y+z-4 = 0 \end{cases},$$

解方程组得 $(x_1,y_1,z_1) = (1,1,2), (x_2,y_2,z_2) = (-2,-2,8)$, 所求最大值为 72, 最小值为 6.

22.(**本题满分 12 分**)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 从第 2 行开始, 第 k 行减去上一行的 $\dfrac{k}{k+1}$ 倍, $k = 2, 3, \cdots, n$, 可得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} \\
&= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n}{n-1}a \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)\,a^n.
\end{aligned}
$$

(2) 由克拉默法则知当 $a \neq 0$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1 = \dfrac{D_{n-1}}{D_n} = \dfrac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 容易得到 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = n-1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $\boldsymbol{x} = (0, 1, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}} + k(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, k \in \mathbb{R}$.

23.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解 (1) 设存在数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘 (1) 两边, 并由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$ 得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

(1) − (2), 得

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$. 代入 (1) 得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 (1) 知 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4　2009 年考研数学二

一　选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为　(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

解　显然 $f(x)$ 的间断点为所有整数, 且 $x=0, x=\pm 1$ 为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.

2. 当 $x \to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则　(　)

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1, b=\dfrac{1}{6}$　　C. $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

解　首先当 $x \to 0$ 时, $g(x)=x^2\ln(1-bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

$$f(x)=x-\sin ax=x-\left(ax-\frac{a^3}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o\left(x^3\right),$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $\begin{cases} 1-a=0 \\ \dfrac{a^3}{6}=-b \end{cases}$, 因此 $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$, 选 A.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$　(　)

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的极值点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

解　由 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$ 知 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}+C$, 因此点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

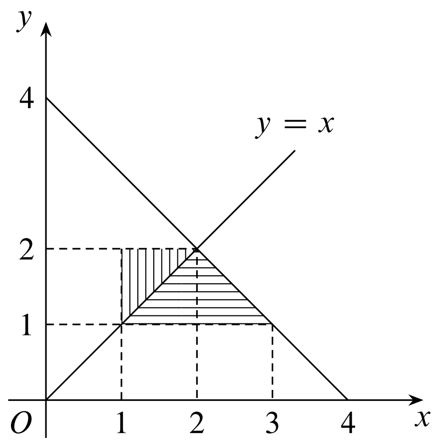
4. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$　(　)

A. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

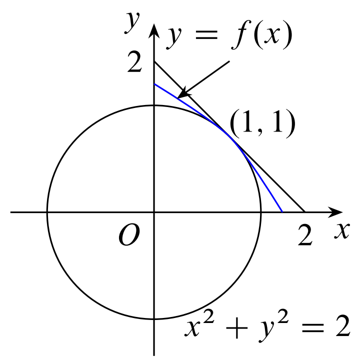
C. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解　由题意可知积分区域有两部分: $D_1=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2\}, D_2=\{(x,y)|1\leqslant y\leqslant 2, y\leqslant x\leqslant 4-y\}$, 如图, 两部分区域可以用 Y 型区域表示为

$D = \{(x, y)|1 \leqslant y \leqslant 2, 1 \leqslant x \leqslant 4 - y\}$, 选 C.



第 4 题图



第 5 题图

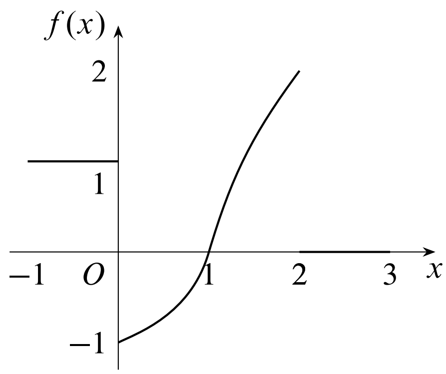
5. 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内 ( )

A. 有极值点, 无零点　　B. 无极值点, 有零点

C. 有极值点, 无零点　　D. 无极值点, 无零点

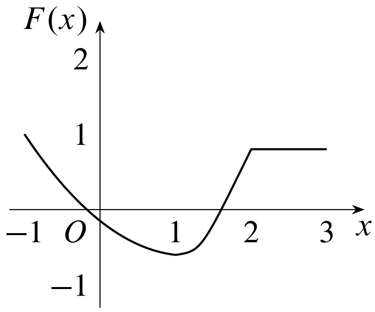
解 如图, 由曲率圆的概念知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处与曲率圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 且二者具有相同的凹凸性和曲率, 于是由 $f(1) = 1, f'(1) = -1$ 易求得 $f''(1) = -2 < 0$. 因为 $f''(x)$ 不变号, 所以有 $f''(x) < 0$. 从而 $f'(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, $f'(x) < f'(1) = -1 < 0$, 进而 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, 故 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内没有极值点. 且曲线 $y = f(x)$ 为凸曲线, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的下方, 即 $f(x) < 2 - x(1 < x < 2)$, 故 $f(2) < 0$. 由连续函数的零点定理知 $y = f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 选 B.

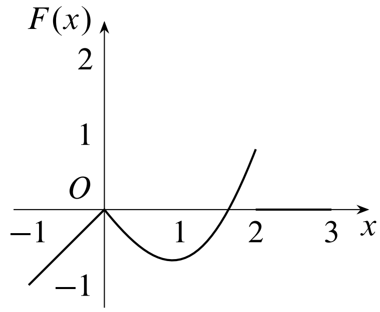
6. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示,

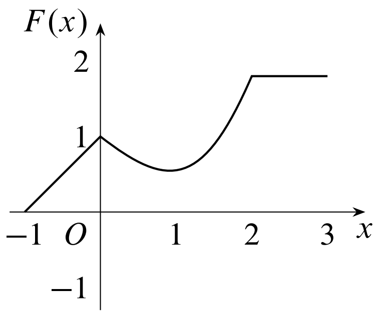


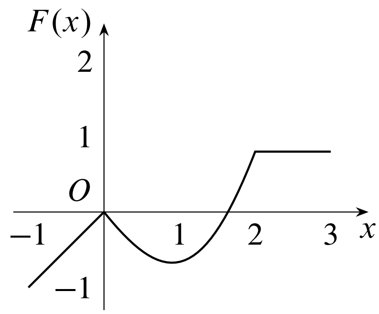
第 6 题图

则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

解 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$ 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

解 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解 由题意可知把 $\boldsymbol{P}$ 的第二列加到第一列上得到 $\boldsymbol{Q}$, 因此有 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}$. 记 $\boldsymbol{E}_{21}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]=\boldsymbol{E}_{21}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

解 $(0,0)$ 点对应的参数 $t=1$, 曲线在这一点处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t\ln\left(2-t^2\right)-\frac{2t^3}{2-t^2}}{-\mathrm{e}^{-(1-t)^2}}\right|_{t=1}=2,$$

于是切线方程为 $y=2x$.

10.已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\,\mathrm{d}x=1$, 则 $k=$________.

解 显然有 $k<0$, 且 $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=-\frac{2}{k}$, 因此 $k=-2$.

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=$________.

解 首先 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\left(\cos nx\right)=\frac{1-\mathrm{e}^{-1}\cos n}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x$, 则根据无穷小乘以有界量知此极限为 0.

12.设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$________.

解 原方程中令 $x=0$ 得 $y=0$, 方程两边对 x 求导得 $y+xy'+\mathrm{e}^yy'=1$, 代入 $x=y=0$ 得 $y'=1$. 方程两边继续对 x 求导得 $y'+y'+xy''+\mathrm{e}^yy'^2+\mathrm{e}^yy''=0$, 代入 $x=y=0, y'=1$ 得 $y''=-3$, 即 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-3$.

13.函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

解 求导得 $y'=2x^{2x}(\ln x+1)$, 不难知最小值点就是 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 最小值为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.

14.设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

解 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2.$

提示: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

三 解答题, 15 ∼ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x+\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2}\right)=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

16.(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

解 令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}>1$, 则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x&=\int\ln(1+t)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)\\
&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{2(t+1)}+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right) \\
&\quad -\frac{\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}+C.
\end{aligned}
$$

17.(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 直接求全微分得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= f_1'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+f_2'\cdot(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+f_3'\cdot(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y) \\
&= \left(f_1'+f_2'+yf_3'\right)\mathrm{d}x+\left(f_1'-f_2'+xf_3'\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

由于 f 具有二阶连续偏导数, 所以 $f_{21}''=f_{12}'', f_{31}''=f_{13}'', f_{23}''=f_{32}''$. 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+f_2'+yf_3'\right) \\
&= f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y\left(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}''\right) \\
&= f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'.
\end{aligned}
$$

18.(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解 当 $x>0$ 时, 原方程即 $y''-\dfrac{y'}{x}=-\dfrac{2}{x}$, 于是 $\left(\dfrac{y'}{x}\right)'=\dfrac{xy''-y'^2}{x^2}=-\dfrac{2}{x^2}$, $y'=C_1x+2$, 再次积分得 $y=C_2x^2+2x+C_3$. 因为 $y(0)=0$, 那么令 $x\to 0^+$ 可得 $C_3=0$, 因此 $y=C_2x^2+2x$. 由题意有 $\displaystyle\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(C_2x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{C_2}{3}+1=2$, 于是 $C_2=3$, $y=3x^2+2x$. D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$
V=2\pi\int_0^1 xy(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(3x^3+2x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}\pi.
$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

解 *方法一* 积分区域可表示为 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}, 0\leqslant r\leqslant 2(\cos\theta+\sin\theta)\right\}$, 故

$$
\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta) \\
&= \frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

方法二　作换元 $u=x-1, v=y-1$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u, \mathrm{d}y=\mathrm{d}v$, 积分区域化为 $D_1=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 2, v\geqslant u\}$, 于是

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

20.(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时, 曲线上任一点处的法线过原点; 当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

解　当 $-\pi<x<0$ 时, 曲线 $y=y(x)$ 上任一点 (x,y) 处的法线方程为 $Y=-\frac{1}{y'}(X-x)+y$, 而此法线过原点, 因此 $y'=-\frac{x}{y}$, 积分可得 $x^2+y^2=C$. 由 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 可得 $C=\pi^2$, 于是 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}(-\pi<x<0)$.

当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 函数 $y=y(x)$ 满足二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+y+x=0$, 其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x$. 而曲线 $y=y(x)$ 光滑, 因此 $y(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 于是

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-}\sqrt{\pi^2-x^2} = \pi, \\
y'(0) &= y'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x} = 0.
\end{aligned}
$$

由此可解得 $C_1=\pi, C_2=1$, 当 $0\leqslant x<\pi$ 时, $y=\pi\cos x+\sin x-x$, 因此最后所求的函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$.

21.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 则

$$F(b)-F(a)=\left(f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b\right)-\left(f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a\right)$$
$$=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0,$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf'(\xi)}{x}=\lim_{\xi\to0}f'(\xi)=A.$$

提示: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

22.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解 (1) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$, 从而 $\xi_2=(-k,k,1-2k)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数.

$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $x_1=-\frac{1}{2}-u, x_2=u, x_3=v$, 即 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-u,u,v\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 u,v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k, u, v 有

$$|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$, 恒有 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

23.(**本题满分 11 分**)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)\big(\lambda - (a+1)\big)\big(\lambda - (a-2)\big),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为两正一零, 显然 $a-2 < a < a+1$, 因此必有 $a = 2$.

5　2010 年考研数学二

一　选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为　(　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　函数 $f(x)$ 的间断点只有 $x=0,\pm1$, 不难判断 $x=-1$ 是无穷间断点, $x=0$ 是跳跃间断点, $x=1$ 是可去间断点, 因此只有一个无穷间断点, 选 B.

2. 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则　(　)

A. $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　B. $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

C. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　D. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

解　$\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次方程的解, 则 $\lambda+\mu=1$, 而 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次方程的解, 则 $\lambda-\mu=0$, 因此 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

提示: 如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是非齐次方程的 n 个解, 则线性组合 $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=1$, $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=0$.

3. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq0)$ 相切, 则 $a=$　(　)

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

解　设两条曲线的切点为 (x_0,x_0^2), 则 $a\ln x_0=x_0^2$, 且切点处的切线斜率相同, 即 $2x_0=\dfrac{a}{x_0}$, 解得 $x_0=\sqrt{\mathrm{e}},a=2\mathrm{e}$, 选 C.

4. 设 m,n 是正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性　(　)

A. 仅与 m 的取值有关　　B. 仅与 n 的取值有关

C. 与 m,n 的取值都有关　　D. 与 m,n 的取值都无关

解　任取 $c\in(0,1)$, 原反常积分 $I=\displaystyle\int_0^c\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_c^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=$

I_1+I_2. 对 I_1 而言, $x=0$ 是瑕点, 当 $x\to 0^+$ 时, $\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 而 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$, 所以 $\displaystyle\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 由比较判别法知 I_1 收敛.

对 I_2 而言, $x=1$ 是瑕点, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$, 积分 $\displaystyle\int_c^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 于是 I_2 收敛, 所以原积分 I 收敛, 与 m,n 的取值都无关, 选 D.

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

A. x B. z C. $-x$ D. $-z$

解 方程两边分别关于 x 和 y 求偏导得 $\begin{cases}F_1'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\\ F_1'\cdot\dfrac{1}{x}+F_2'\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$, 于是解得 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yF_1'}{xF_2'}+\dfrac{z}{x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}\end{cases}$, 因此 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, 选 B.

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$ B. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$ D. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

选 D.

7. 设向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是 ( )

A. 若向量组 I 线性无关, 则 $r\leqslant s$ B. 若向量组 I 线性相关, 则 $r>s$

C. 若向量组 II 线性无关, 则 $r\leqslant s$ D. 若向量组 II 线性相关, 则 $r>s$

解 因为向量组 I 被向量组 II 线性表示, 所以 $r(\mathrm{I}) \leqslant r(\mathrm{II})$, 因此当向量组 I 线性无关时, $r = r(\mathrm{I}) \leqslant r(\mathrm{II}) \leqslant s$, 选 A.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解 由 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 -1. 又 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, -1, -1, 0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则它相似于 $\mathrm{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ ________.

解 原方程的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0$, 因此特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}, \lambda_3 = 2$, 方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \mathrm{e}^{2x}$.

10. 曲线 $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为________.

解 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} (y - 2x) = 2 \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = 2 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x}{x^2 + 1} = 0$, 所以曲线的渐近线方程为 $y = 2x$.

11. 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$________.

解 由 n 阶麦克劳林公式得

$$f(x) = \ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(-2x)^n}{n} + o(x^n),$$

而 x^n 的系数应为 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 即 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \dfrac{(-2)^n}{n}$, 因此 $f^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!$.

12. 当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时, 对数螺线 $r = \mathrm{e}^\theta$ 的弧长为________.

解 由极坐标系下曲线的弧长公式得对数螺线 $r = \mathrm{e}^\theta$ 的弧长为

$$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi \mathrm{e}^\theta\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}(\mathrm{e}^\pi - 1).$$

13. 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3 cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12$ cm, $w = 5$ cm 时, 它的对角线增长的速率为________.

解 对角线的长为 $L=\sqrt{l^2+w^2}$, 由全导数公式得 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial L}{\partial l}\cdot\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial L}{\partial w}\cdot\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2l+3w}{\sqrt{l^2+w^2}}$, 于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right|_{\substack{l=12\\w=5}}=\dfrac{2\times 12+3\times 5}{\sqrt{12^2+5^2}}=3\,\mathrm{cm/s}$.

14.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

解

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

解 $f(x)=x^2\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, $f'(x)=2x\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. 分析 $f'(x)$ 的零点及正负可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$, 极小值为 $f(-1)=f(1)=0$, 极大值为 $f(0)=\displaystyle\int_1^0(0-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

16.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n=\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解

(1) 当 $0<t<1$ 时, $0<\ln(1+t)<t$, 所以 $|\ln t|\,[\ln(1+t)]^n<t^n\,|\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0<t<1$ 时, $0<\displaystyle\int_0^1|\ln t\ln^n(1+t)|\mathrm{d}t<\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$. 由分部积分得

$$\int_0^1|\ln t|\,t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0<u_n<\dfrac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

17.(本题满分 11 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导

数, 且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}, \psi'(1)=6$, 已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

解 利用参数方程求导得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{2(1+t)}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4(1+t)}\left(\frac{\psi''(t)}{1+t}-\frac{\psi'(t)}{(1+t)^2}\right),$$

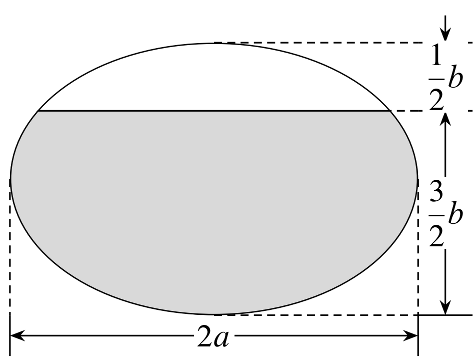
由题设条件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ 可得 $\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{1+t}\right)=\frac{1}{1+t}\left(\psi''(t)-\frac{\psi'(t)}{1+t}\right)=3,$$

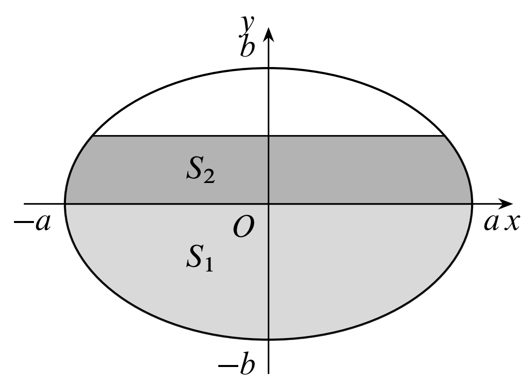
于是 $\psi'(t)=(3t+C_1)(1+t)$, 由 $\psi'(1)=6$ 得 $C_1=0$, 则 $\psi'(t)=3t(1+t), \psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3+C_2$. 由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$ 得 $C_2=0$, 所以 $\psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3, t>-1$.

18.(**本题满分 10 分**)

一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中右面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时 (如图 1), 计算油的质量.(长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 $\rho\,\mathrm{kg/m^3}$.)



第 18 题图 1



第 18 题图 2

解 以椭圆长轴为 x 轴, 短轴为 y 轴建立坐标系, 用 S_1 和 S_2 分别表示在 x 轴下方和 x 轴上方的阴影部分的面积, 则 $S_1=\dfrac{\pi}{2}ab$, 而

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{2a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y\xlongequal{y=b\sin t}\frac{2a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{6}}b^2\cos^2t\,\mathrm{d}t\\&=ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\end{aligned}$$

因此油的质量为 $M=(S_1+S_2)l\rho=\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho\,\mathrm{kg}$.

19.(本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ 确定 a,b 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

解 利用多元复合函数的偏导公式得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\\
&=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\\
&=a\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},
\end{aligned}
$$

把以上各式代入题设等式得

$$
\left(5a^2+12a+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(5b^2+12b+4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0,
$$

根据条件有 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\10ab+12(a+b)+8\neq 0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-2\end{cases}$.

20.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\right.$ $\left.0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$

解 积分区域用直角坐标可表示为 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$, 则

$$
I=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2+y^2}\Big|_0^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}
$$

21.(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

解 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$, 则根据条件有 $F(0)=F(1)=0$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$$
\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}F'(\xi) \\ F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f'(\xi)-\xi^2\right) \\ -F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f'(\eta)-\eta^2\right) \end{cases},
$$

两式相加得 $f'(\xi)+f'(\eta)-\xi^2-\eta^2=0$, 即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

22.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 (1) 因为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})<3$, 于是

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0,
$$

因此 $\lambda=\pm 1$. 当 $\lambda=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $r(\boldsymbol{A})=1, r(\bar{\boldsymbol{A}})=2$, 方程组无解, 因此 $\lambda=1$ 舍去. 当 $\lambda=-1$ 时, 对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix},
$$

因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 所以 $a=-2$.

(2) 当 $\lambda=-1, a=-2$ 时, $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}+k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$, 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵. 若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $a, \boldsymbol{Q}$.

解 设 $\boldsymbol{\xi}_1\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的特征向量, 则

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow\begin{cases}0+(-2)+4=\lambda_1 \\ -1+6+a=2\lambda_1 \\ 4+2a+0=\lambda_1\end{cases} \Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2 \\ a=-1\end{cases}.$$

由 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)=0$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=5, \lambda_3=-4$.

对 $\lambda_2=5$, 解方程 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 得特征值 5 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

对 $\lambda_3=-4$, 解方程 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 得特征值 -4 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\{2,5,-4\}$.

6　2011 年考研数学二

一　选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当 $x \to 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 (　)

A. $k = 1, c = 4$　　B. $k = 1, c = -4$　　C. $k = 3, c = 4$　　D. $k = 3, c = -4$

解　利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) = 4x^3 + o\left(x^3\right) \sim 4x^3,$$

因此 $k = 3, c = 4$, 选 C.

提示: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ (　)

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

解　注意到 $f(0) = 0$, 利用导数定义得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x) - 2f\left(x^3\right)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0),\end{aligned}$$

因此选 B.

3. 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 (　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　因为 $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

由 $f'(x) = 0$ 得 $3x^2 - 12x + 11 = 0$, 解得 $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 因此有两个驻点.

4. 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}(\lambda > 0)$ 的特解形式为 (　)

A. $a\left(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$ B. $ax\left(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$

C. $x\left(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$ D. $x^2\left(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$

解 齐次方程的特征方程为 $r^2-\lambda^2=0$, 特征根为 $r_1=\lambda, r_2=-\lambda$, 则方程 $y''-\lambda^2 y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的特解形式为 $y_1^*=ax\mathrm{e}^{\lambda x}$, 方程 $y''-\lambda^2 y=\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $y_1^*=bx\mathrm{e}^{-\lambda x}$, 由叠加原理知原方程的特解形式为 $x\left(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$, 选 C.

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0, f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0)>1, f''(0)>0$ B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$ D. $f(0)<1, f''(0)<0$

解 由 $z=f(x)\ln f(y)$ 可知 $z_x'=f'(x)\ln f(y), z_y'=\dfrac{f(x)}{f(y)}, z_{xx}''=f''(x)\ln f(y), z_{xy}''=\dfrac{f'(x)}{f(y)}f'(y), z_{yy}''=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-f'^2(y)}{f^2(y)}$. 在点 $(0,0)$ 处, $z_{xx}''=f''(0)\ln f(0), z_{xy}''=0, z_{yy}''=f''(0)$. 由二元函数极小值的充分条件, 需要满足 $f''(0)\ln f(0)>0, f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)>0$, 因此 $f(0)>1, f''(0)>0$, 选 C.

6. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 I,J,K 的大小关系是 ( )

A. $I<J<K$ B. $I<K<J$ C. $J<I<K$ D. $K<J<I$

解 当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x<\cos x<\cot x$, 即 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$, 因此 $I<K<J$, 选 B.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$, 选 D.

8. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个向量 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=3$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$, 所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$. 再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有三个线性无关的向量, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是线性无关的, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

解 先取对数得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2^x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x-1}{2}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}=\frac{\ln 2}{2},$$

因此原极限为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{2}}=\sqrt{2}$.

10.微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

解 由条件得 $\mathrm{e}^x(y'+y)=(y\mathrm{e}^x)'=\cos x$, 于是 $y\mathrm{e}^x=\sin x+C$. 由 $y(0)=0$ 得 $C=0$, 因此 $y\mathrm{e}^x=\sin x$, $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

11.曲线 $y=\displaystyle\int_0^x\tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________.

解 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

12.设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, $\lambda>0$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\xlongequal{\lambda x=t}\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

13.设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

解 利用极坐标计算得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta)^4\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{2}{3}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\right]=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

14.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为________.

解 利用配方可得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2, \end{aligned}$$

因此 f 的正惯性指数为 2.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$, 试求 α 的取值范围.

解 显然由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 可知 $\alpha>0$, 由题设及洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\alpha x^{\alpha-1}},$$

这里要求 $\alpha>1$, 否则不可能使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, 且在 $\alpha>1$ 的条件下有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{\alpha-1}\left(1+x^2\right)}=0.$$

再由等价无穷小得

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x t^2\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{3x^\alpha},$$

此时必有 $\alpha<3$ 才能有 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$, 因此综合起来 α 的范围是 $1<\alpha<3$.

16.(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解 利用参数方程求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^3}.$$

令 $y'=0$ 得 $t=\pm1$. $t=1$ 时, $x=\dfrac{5}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, 此时 $y''>0$, 所以 $y\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$ 是极小值. 当 $t=-1$ 时, $x=-1$, $y=1$, 此时 $y''<0$, 所以 $y(1)=1$ 是极大值.

17.(本题满分 9 分)

设函数 $z=f\big(xy,yg(x)\big)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\big(xy,yg(x)\big)\cdot y+f_2'\big(xy,yg(x)\big)\cdot g'(x)\cdot y$, 所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y)$. 故

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[yf_1'(y,y)\right]\right|_{y=1}\\&=\left[f_1'(y,y)+y\left(f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)\right)\right]\Big|_{y=1}\\&=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).\end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角, 若 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

解 因为曲线 $y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点, 所以 $\alpha(0)=\dfrac{\pi}{4}, y(0)=0, y'(0)=1$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可知 $\alpha=y+C_1$, 代入 $y(0)=0,\alpha(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 可得 $C_1=\dfrac{\pi}{4}$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$ 分离变量解得 $x=\ln(\sin\alpha)+C_2$, 取 $x=0$ 可得 $C_2=-\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln\sqrt{2}$, 所以 $x=\ln(\sin\alpha)+\ln\sqrt{2}=\ln\left[\sqrt{2}\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$, 因此 $y(x)=\arcsin\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\pi}{4}$.

19.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 (1) 由拉格朗日中值定理得 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\dfrac{1}{\xi}\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$, 其中 $\xi\in(n,n+1)$, 得证.

(2) 首先有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\&=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,\end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 再将不等式 $\dfrac{1}{k}>\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$ 对 k 从 1 到

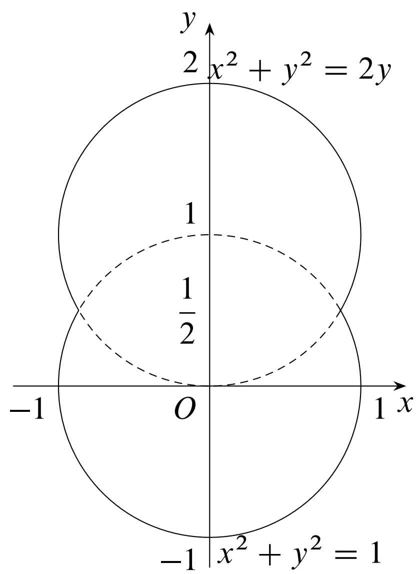
n 求和得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)>\ln n$, 因此 $a_n>0$. 根据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

20.(**本题满分** 11 **分**)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲面由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$, 水的密度为 $10^3\mathrm{kg/m^3}$).



第 20 题图

解 (1) 由旋转体体积公式可得容器的容积为

$$V=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi\left(2y-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{9}{4}\pi.$$

(2) 所求的功分为两部分: 抽出对应于 $y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 部分容器里的水所做的功 W_1 和抽出对应于 $y\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 部分容器里的水所做的功 W_2. 当 $y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时, 功微元 $\mathrm{d}W=(2-y)\rho g\pi(2y-y^2)\mathrm{d}y$; 当 $y\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 时, 功微元 $\mathrm{d}W=(2-y)\rho g\pi\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y$, 因此

$$W=W_1+W_2=\rho g\pi\left[\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)\left(2y-y^2\right)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho g \pi\left[\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(4y-4y^{2}+y^{3}\right) \mathrm{d} y+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(2-y-2y^{2}+y^{3}\right) \mathrm{d} y\right] \\
&= 3375 \pi g .
\end{aligned}
$$

即将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做的功为 $3375\pi g$ J.

21.(**本题满分 11 分**)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y)=0, f(x, 1)=0, \iint\limits_{D} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$ $=a$, 其中 $D=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,0 \leqslant y \leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} x y f_{x y}^{\prime \prime}(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$.

解 由 $f(1, y)=f(x, 1)=0$ 知 $f_{y}^{\prime}(1, y)=f_{x}^{\prime}(x, 1)=0$, 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D} x y f_{x y}^{\prime \prime}(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y=\int_{0}^{1} \mathrm{d} y \int_{0}^{1} x y f_{x y}^{\prime \prime}(x, y) \mathrm{d} x \\
&= \int_{0}^{1} \mathrm{d} y \int_{0}^{1} x y \mathrm{d}\left(f_{y}^{\prime}(x, y)\right)=\int_{0}^{1}\left(x y f_{y}^{\prime}(x, y)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1} y f_{y}^{\prime}(x, y) \mathrm{d} x\right) \mathrm{d} y \\
&= \int_{0}^{1}\left(y f_{y}^{\prime}(1, y)-\int_{0}^{1} y f_{y}^{\prime}(x, 1) \mathrm{d} x\right) \mathrm{d} y=-\int_{0}^{1} \mathrm{d} y \int_{0}^{1} y f_{y}^{\prime}(x, y) \mathrm{d} x \\
&= -\int_{0}^{1} \mathrm{d} x \int_{0}^{1} y f_{y}^{\prime}(x, y) \mathrm{d} y=-\int_{0}^{1} \mathrm{d} x \int_{0}^{1} y \mathrm{d}(f(x, y)) \\
&= -\int_{0}^{1}\left(y f(x, y)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1} f(x, y) \mathrm{d} y\right) \mathrm{d} x=\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\
&= \iint\limits_{D} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y=a .
\end{aligned}
$$

22.(**本题满分 11 分**)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{1}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_{2}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_{3}=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_{1}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{2}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{3}=(3,4, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \boldsymbol{\beta}_{3}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \boldsymbol{\alpha}_{3}$ 线性表示.

解 (1) 首先有 $\left|\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \boldsymbol{\alpha}_{3}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=1 \neq 0$, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \boldsymbol{\alpha}_{3}$ 线性无关.

因此 $\boldsymbol{\alpha}_{1}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_{2}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_{3}=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_{1}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{2}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{3}=(3,4, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示等价于 $\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \boldsymbol{\beta}_{3}$ 线性相关, 于是 $\left|\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \boldsymbol{\beta}_{3}\right|=$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a - 5 = 0$, 所以 $a = 5$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由条件知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且它对应的特征向量为 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}, k_2 \neq 0$. 再由 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 知 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}, k_3 \neq 0$.

(2) 令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 因此

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

7　2012 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$, 所以直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$, 所以 $x=1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x=-1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$　　(　　)

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

解　利用导数的定义得

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\big[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\big)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\end{aligned}$$

选 A.

3. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的　　(　　)

A. 充分必要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

解　由于 $a_n>0$, 所以数列 $\{S_n\}$ 单调递增. 若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. 反之若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 不一定有界, 如取 $a_n=1$ 即可, 因此数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分不必要条件, 选 B.

4. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x(k=1,2,3)$, 则有　　(　　)

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_2<I_1$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_2<I_1<I_3$

解

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x \\
&= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x < I_1, \\
I_3 &= \int_0^{3\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x \\
&= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} \mathrm{e}^{x^2} \sin x \mathrm{d}x \\
&= I_1 + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(2\pi-t)^2} \sin t \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(2\pi+t)^2} \sin t \mathrm{d}t \\
&= I_1 + \int_0^{\pi} \left[\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2} - \mathrm{e}^{(2\pi-t)^2}\right] \sin t \mathrm{d}t > I_1.
\end{aligned}
$$

选 D.

5. 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$, 则使不等式 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 ( )

A. $x_1 > x_2, y_1 < y_2$ B. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ C. $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ D. $x_1 < x_2, y_1 > y_2$

解 由题意知 $f(x,y)$ 关于 x 单调递增, 而关于 y 单调递减, 因此当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时, $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_1) < f(x_2,y_2)$, 选 D.

6. 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm\dfrac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint\limits_D (x^5 y - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ( )

A. π B. 2 C. -2 D. $-\pi$

解 直接化为累次积分计算得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x^5 y - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sin x}^{1} \left(x^5 y - 1\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}x^5 \cos^2 x - 1 + \sin x\right) \mathrm{d}x = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = -\pi.
\end{aligned}
$$

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

解 显然可得 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性相关, 选 C.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = \mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} =$________.

解 令 $x = 0$ 可得 $y(0) = 0$. 原方程两边对 x 求导得 $2x - y' = \mathrm{e}^y y'$, 代入 $x = y = 0$ 得 $y'(0) = 0$. 等式两边再对 x 求导的 $2 - y'' = \mathrm{e}^y y'' + \mathrm{e}^y y'^2$, 代入 $x = y = 0$, $y'(0) = 0$ 得 $y''(0) = 1$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 1$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n^2}\right) =$________.

解 利用定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

11.设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} =$________.

解 由 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ 可知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}f'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}f'$, 于是 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot\frac{1}{x}f' + y^2\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)f' = 0$.

12.微分方程 $y\mathrm{d}x + \left(x - 3y^2\right)\mathrm{d}y = 0$ 满足条件 $y\big|_{x=1} = 1$ 的解为 $y =$________.

解 由条件得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{y} = 3y$, 于是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(xy) = x + y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 3y^2, xy = y^3 + C$. 当 $x = 1$ 时 $y = 1$, 所以 $C = 0, x = y^2, y = \sqrt{x}$ (初值条件是 $y(1) = 1$, 因此舍去 $y = -\sqrt{x}$).

13.曲线 $y = x^2 + x(x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标为________.

解 由条件得 $y' = 2x + 1, y'' = 2$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 0$ (舍去). 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 因此坐标为 $(-1, 0)$.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 3$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*| =$________.

解 记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由题意知 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. 又 $|\boldsymbol{A}| = 3$, 所以 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^2 = 9$, 因此 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*| = -27$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x\to 0} f(x)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $x \to 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值.

解 (1) 由题意得

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

(2) 当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)-a=\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}-1=\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$$
$$\sim\frac{(1+x)(x-\sin x)}{x^2}\sim\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2}=\frac{1}{6}x,$$

因此 $k=1$.

16.(**本题满分 10 分**)

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} f_x'(x,y)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$ 解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$. 记

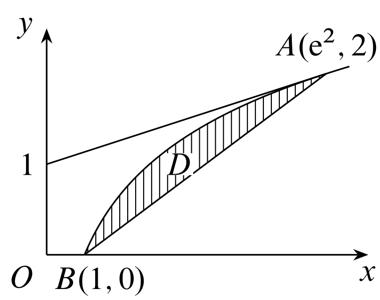
$$A=f''_{xx}(x,y)=x\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, B=f''_{xy}(x,y)=y\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$C=f''_{yy}(x,y)=x\left(y^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在驻点 $(1,0)$ 处, 由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0, A=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0$, 所以 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值. 在驻点 $(-1,0)$ 处, 由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0, A=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$, 所以 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值.

17.(**本题满分 12 分**)

过 $(0,1)$ 点作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线, 切点为 A, 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 设 A 点的坐标为 $(x_0,\ln x_0)$, 则切线的方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0=\dfrac{x}{x_0}-1+\ln x_0$, 代入 $x=0, y=1$ 得 $x_0=\mathrm{e}^2$, 因此切线的方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x+1$, 切点 A 为 $(\mathrm{e}^2,2)$, 而 L 与 x 轴的交点为 $B(1,0)$. 那么区域 D 的面积为



第 17 题图

$$S=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)\cdot 2$$

$$
\begin{aligned}
&= x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x - \left(\mathrm{e}^2-1\right)\\
&= 2\mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e}^2-1\right) - \left(\mathrm{e}^2-1\right) = 2.
\end{aligned}
$$

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^{\mathrm{e}^2} \ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\times 2^2\left(\mathrm{e}^2-1\right)\\
&= \pi x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \pi\int_1^{\mathrm{e}^2} 2\ln x\mathrm{d}x - \frac{4}{3}\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)\\
&= 4\pi\mathrm{e}^2 - 2\pi x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2} + 2\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right) - \frac{4}{3}\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)\\
&= \frac{2}{3}\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right).
\end{aligned}
$$

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

解 化为极坐标系下的累次积分计算得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta} r^3\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\mathrm{d}(\cos\theta)\\
&= -\frac{1}{4}\int_1^{-1}(1+u)^4 u\mathrm{d}u = \frac{16}{15}.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x^2)\displaystyle\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

解 (1) 微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$, 故方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$, $f''(x)=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $2C_1\mathrm{e}^x+5C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^x$, 所以 $C_1=1, C_2=0$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(2) 由 (1) 得到曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+1,\quad y''=2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+2x,$$

令 $y''=0$ 得 $x=0, y=0$. 当 $x>0$ 时, $y''>0$; 当 $x<0$ 时, $y''<0$, 因此点 $(0,0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

20.(**本题满分** 10 **分**)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

证 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x)\geqslant 0, x\in[0,1)$ 即可. 首先有 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x, x\in(0,1)$, 且 $\ln\frac{1+x}{1-x}>0$, $\frac{2x}{1-x^2}>2x>x+\sin x$, 因此 $f'(x)>0, x\in(0,1)$. 而 $f(0)=0$, 则有 $f(x)\geqslant 0, x\in[0,1)$, 证毕.

21.(**本题满分** 10 **分**)

(1) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 x_n, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求此极限.

证 (1) 令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x$, 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^n}<1,\ f(1)=n>1,$$

因此由介值定理知方程 $f(x)=1$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有根. 再由 $f'(x)=nx^{n-1}+\cdots+2x+1\geqslant 1>0$ 知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内为增函数, 因此方程 $f(x)=1$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且只有一个根.

(2) 由题意 $f(x_n)=1$, 由拉格朗日中值定理得 $f(x_n)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$. 因为 $f'(\xi_n)\geqslant 1$, 所以

$$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|f(x_n)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|=\frac{1}{2^n},$$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 行列式按照第一行展开得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}.$$

由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<4$, 因此 $1-a^4=-a-a^2=0$, 解得 $a=-1$, 此时方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

23.(**本题满分 11 分**)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

解 (1) 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=-1$.

(2) 由 $a=-1$ 可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$, 故矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.
当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.
令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 原二次型化为标准形 $f=2y_2^2+6y_3^2$.

8　2013 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\cos x - 1 = x \cdot \sin\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$, 当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x)$　(　)

A. 比 x 高阶的无穷小　　B. 比 x 低阶的无穷小

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小　　D. 与 x 等价的无穷小

解　利用等价无穷小可知当 $x \to 0$ 时, $x\sin\alpha(x) = \cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$, 因此 $\sin\alpha(x) \sim -\dfrac{1}{2}x$. 所以当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x) \to 0$, 于是 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) \sim -\dfrac{1}{2}x$, 即 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小, 选 C.

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1\right] =$ (　)

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

解　当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 两边对 x 求导得 $-\sin(xy)\left(y + xy'\right) + \dfrac{1}{y} \cdot y' - 1 = 0$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = f'(0) = 1$. 则由导数定义可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right] \xlongequal{x=\frac{1}{n}} \lim_{x\to0^+} \frac{f(2x) - 1}{x} = 2\lim_{x\to0^+} \frac{f(2x) - 1}{2x} = 2f'(0) = 2,$$

选 A.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则　(　)

A. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点　　B. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点

C. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导　　D. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

解　首先变上限积分函数一定是连续的, $f(x)$ 在区间 $[0, \pi)$ 和 $(\pi, 2\pi]$ 内都连续, 利用洛必达法则得

$$F'_-(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = 0,$$

$$F'_+(\pi) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = 2.$$

因此 $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$, $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导, 选 C.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e}\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 ( )

A. $\alpha<-2$ B. $\alpha>2$ C. $-2<\alpha<0$ D. $0<\alpha<2$

解 由 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛可知 $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 根据 p 积分与对数 p 积分的敛散性结论知 $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha-1<1$, $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha+1>1$, 解得 $0<\alpha<2$, 选 D.

5. 设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$, 其中函数 f 可微, 则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

A. $2yf'(xy)$ B. $-2yf'(xy)$ C. $\dfrac{2}{x}f(xy)$ D. $-\dfrac{2}{x}f(xy)$

解 利用复合函数求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)\right)+\left(\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right)\\&=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy),\end{aligned}$$

选 A.

6. 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(k=1,2,3,4)$, 则 ( )

A. $I_1>0$ B. $I_2>0$ C. $I_3>0$ D. $I_4>0$

解 根据对称性可知 $I_1=I_3=0$, 而当 $x\in D_2$ 时, $y-x>0$, 因此 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$. 当 $x\in D_4$ 时, $y-x<0$, $I_4<0$, 选 B.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 ( )

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解 对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 选 B.

8. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ( )

A. $a=0, b=2$　　　　B. $a=0, b$ 为任意常数

C. $a=2, b=0$　　　　D. $a=2, b$ 为任意常数

解 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2, b, 0$, 而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\left((\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\right)$, 因此当且仅当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, b, 0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

二　填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

解 先取对数利用等价无穷小可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此原极限为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

10.设函数 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$, 则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$________.

解 由题意知 $f(-1)=0$, $f'(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$, 所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{x=-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

11.设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos3\theta, -\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}$, 则 L 所围平面图形的面积为 ________.

解 利用极坐标系下的面积公式得

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos6\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin6\theta}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}.$$

12.曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 处的法线方程为________.

解 由参数方程求导公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t/\left(1+t^2\right)}{1/\left(1+t^2\right)}=t$. 当 $t=1$ 时, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\ln 2$, 曲线上对应点的法线斜率为 $k=-1$, 因此法线方程为 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\ln 2=-x+\dfrac{\pi}{4}+\ln 2$.

13.已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$, $y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$, $y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y=$________.

解 因为 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$, $y_2-y_3=\mathrm{e}^{x}$ 是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且 e^{3x} 与 e^{x} 线性无关. 又因为 $y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$.

14.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 由 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$ 可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 -1. 又 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

三 解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

解 当 $x\to 0$ 时, 利用泰勒公式得

$$\begin{aligned}f(x)&=1-\cos x\cos 2x\cos 3x\\&=1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\&=1-\left(1-\frac{1}{2}\left(1+2^2+3^2\right)x^2\right)+o\left(x^2\right)\sim 7x^2,\end{aligned}$$

因此 $a=7,n=2$

提示: 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 是 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ax^n}=1$ 是不能直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{nax^{n-1}}=1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod_{k=1}^{n}(1-\cos a_k x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$.

16.(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$, 求 a 的值.

解 利用旋转体的体积公式得

$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}, V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

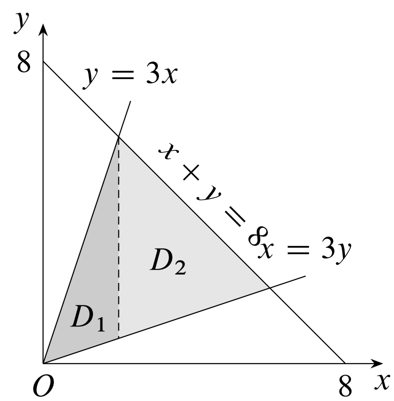
由 $V_y=10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\times\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域可分为两部分

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2,\frac{x}{3}\leqslant y\leqslant 3x\right\},$$
$$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,2\leqslant x\leqslant 6,\frac{x}{3}\leqslant y\leqslant 8-x\right\}.$$



第 17 题图

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 x^2\left(3x-\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x+\int_2^6 x^2\left(8-x-\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{416}{3}.\end{aligned}$$

18.(**本题满分** 10 **分**)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0$, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$, 即 $f'(\xi)=1$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法一 令 $G(x)=f(x)+f'(x)-x$, 则

$$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1),$$
$$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1.$$

由罗尔定理知存在 $\eta \in (-1,1)$ 使得 $G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

方法二 令 $H(x)=\mathrm{e}^x\big(f'(x)-1\big)$, 由 (1) 可知 $f'(\xi)=f'(-\xi)=1$, 因此 $H(\xi)=H(-\xi)=0$, 由罗尔定理知存在 $\eta \in (-\xi,\xi) \subset (-1,1)$ 使得 $H'(\eta)=\mathrm{e}^\eta\big(f''(\eta)+f'(\eta)-1\big)=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(**本题满分** 10 **分**)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

解 设 $M(x,y)$ 为曲线上一点, 该点到坐标原点的距离为 $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^3-xy+y^3-1\right)$, 则

$$\begin{cases} F_x'=2x+\lambda(3x^2-y)=0 \\ F_y'=2y+\lambda(3y^2-x)=0 \\ F_\lambda'=x^3-xy+y^3-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

$(1,1)$ 是唯一的驻点, 且 $d(1,1)=\sqrt{2}$. 考虑边界点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 有 $d(0,1)=d(1,0)=1$, 因此曲线上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$, 最短距离为 1.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

证 (1) 由题意得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$, 则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一驻点, 且当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f_{\min}(x)=f(1)=1$.

(2) 由 (1) 知 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$, 又 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$, 所以 $\dfrac{1}{x_n}>\dfrac{1}{x_{n+1}}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 再由 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 可知 $\ln x_n<1\Rightarrow 0<x_n<\mathrm{e}$, 所以 $\{x_n\}$ 由上界, 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 在等式 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限得 $\ln A+\dfrac{1}{A}\leqslant 1$. 由 (1) 知对任意 $x>0$ 都有 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1$, 等号成立当且仅当 $x=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1$.

21.(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$.

(1) 求 L 的弧长;

(2) 设 D 是由曲线 L, 直线 $x=1,x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

解 (1) 由曲线的弧长公式得 L 的弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right)\bigg|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

(2) 由形心公式得 D 的形心的横坐标为

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}x\,\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}\mathrm{d}y}=\frac{\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x}\\&=\frac{\frac{1}{16}\mathrm{e}^4-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}}=\frac{3\left(\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3\right)}{4\left(\mathrm{e}^3-7\right)}.\end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得方程组

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}. \tag{$*$}$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

由此可知当 $a\neq -1$ 或 $b\neq 0$ 时, 方程组 $(*)$ 无解. 当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时, 方程组 $(*)$ 有解, 且此时方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k_1(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a=-1,b=0$ 时存在矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

23.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

证 (1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2 \\ &= 2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} &= (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = 2\boldsymbol{\alpha}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} &= (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

故 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 2$, 即 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3 = 0$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

9　2014 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是　(　)

   A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,2)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

   解　当 $x \to 0$ 时, $\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, 由题意得 $\alpha > 1, \dfrac{2}{\alpha} > 1$, 因此 $1 < \alpha < 2$, 选 B.

2. 下列曲线中有渐近线的是　(　)

   A. $y = x + \sin x$　　B. $y = x^2 + \sin x$　　C. $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$　　D. $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

   解　可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x} = 0$, 从而直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ 的斜渐近线.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上　(　)

   A. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$　　B. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

   C. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$　　D. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

   解　令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$. 故当 $f''(x) > 0$ 时,$F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处取到, 而 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $F(x) = f(x) - g(x) \leqslant 0$, 选 D.

4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是　(　)

   A. $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　　C. $10\sqrt{10}$　　D. $5\sqrt{10}$

   解　由参数方程求导公式得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{2t+4}{2t}$, 于是

$$\frac{d^2y^2}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{2\cdot 2t - 2(2t+4)}{(2t)^2}\Big/(2t) = -\frac{1}{t^3}.$$

在 $t=1$ 对应的点处有 $y'=3, y''=-1$, 曲率半径为 $\rho=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=10\sqrt{10}$, 选 C.

5. 设函数 $f(x)=\arctan x$, 若 $f(x)=xf'(\xi)$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$ ( )

A. 1 B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{3}$

解 因为 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$, 所以 $\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{3}x^3}{x^2\cdot x}=\frac{1}{3},$$

选 D.

6. 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则 ( )

A. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

B. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

C. $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得, $u(x,y)$ 的最小值在 D 的边界上取得

D. $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得, $u(x,y)$ 的最大值在 D 的边界上取得

解 如果内部有最值点, 那么这一点一定是驻点, 且判别式要满足 $AC-B^2\geqslant 0$. 而在 D 内的任意驻点处有 $B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, 因为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 即 $A+C=0$, 那么一定有 $AC-B^2<0$, 矛盾. 因此 D 的内部没有最值点, 最值都在边界上取到, 选 A.

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ ( )

A. $(ad-bc)^2$ B. $-(ad-bc)^2$ C. $a^2d^2-b^2c^2$ D. $b^2c^2-a^2d^2$

解 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix}=-(ad-bc)^2,$$

选 B.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k,l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

解 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 不一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 如取反例 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 因此选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$________.

解

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{3\pi}{8}.$$

10.设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$________.

解 当 $x\in[0,2]$ 时, $f(x)=\displaystyle\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$, 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 即 $f(x)=x^2-2x$. 又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 故 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

11.设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(\frac12,\frac12)}=$________.

解 原方程中令 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 得 $z=0$. 方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 两边求全微分得 $\mathrm{e}^{2yz}(2y\mathrm{d}z+2z\mathrm{d}x)+\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$, 代入 $x=y=\dfrac{1}{2},z=0$ 得 $\mathrm{d}z+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(\frac12,\frac12)}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$.

12.曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$, 则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

解 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=r\cos\theta=\theta\cos\theta\\ y=r\sin\theta=\theta\cos\theta\end{cases}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $x=0,y=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2}{\pi}$, 则该点处的切线方程为 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$.

13.一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$________.

解 利用质心的横坐标公式得 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\left(-x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(-x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x}=\dfrac{11}{20}$.

14.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是________.

解 由配方法得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-\left(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2\right)+4x_3^2-a^2x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+\left(4-a^2\right)x_3^2,\end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4-a^2\geqslant 0$, 解得 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

三 解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解 当 $t>0$ 时,$t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t>t^2\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)-t=\dfrac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}\Big/\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

提示: 事实上, 洛必达法则适用于 $\dfrac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$, 且 $y(2)=0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

解 由已知等式得 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$, 令 $y'=0$ 得 $y=y(x)$ 的驻点为 $x=\pm1$. 当 $x<-1$ 时, $y'<0$; 当 $-1<x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时, $y'<0$. 原为分方程变量分离得 $(1+y^2)\mathrm{d}y=(1-x^2)\mathrm{d}x$, 积分可得 $y+\dfrac{1}{3}y^3=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$. 由 $y(2)=0$ 可知 $C=\dfrac{2}{3}$. 分别代入 $x=\pm1$ 可得函数 $y(x)$ 的极大值 $y(1)=1$, 极小值 $y(-1)=0$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域关于直线 $y=x$ 对称, 利用轮换对称性与极坐标可得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{y\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{y\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r\\
&=-\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y+f'(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^x\cos y,\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^x\sin y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y-f'(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^x\cos y.
\end{aligned}$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$ 化为

$$f''(\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}=[4f(\mathrm{e}^x\cos y)+\mathrm{e}^x\cos y]\,\mathrm{e}^{2x},$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u)=4f(u)+u$, 此方程的通解为 $f(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{u}{4}$. 由 $f(0)=f'(0)=0$ 得 $C_1+C_2=0, 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0$, 解得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$, 故 $f(u)=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^{-2u}-4u\right)$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(1) $0\leqslant\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $\leqslant g(x) \leqslant 1$, 所以 $0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t = x-a, x \in [a,b]$.

(2) 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+\int_0^x g(u)\mathrm{d}u} f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x) = f(x)\,g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u\right) g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u\right] g(x).$$

由 (1) 知 $a + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant a + x - a = x$, 而 $f(x)$ 单调增加, 所以 $F'(x) \geqslant 0$, 这说明 $F(x)$ 单调增加. 又 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geqslant 0$, 即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0,1]$. 定义函数列 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f\big(f_1(x)\big), \cdots$, $f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$, 记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

解 因为 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $f_1(x) = f(x)$, 所以

$$f_2(x) = f\big(f_1(x) bigr) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x},$$
$$f_3(x) = f\big(f_2(x)\big) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}.$$

依此类推可得 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, x \in [0,1]$. 于是 $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0$, $f_n(x)$ 单调增加. 因为 $f_n(0) = 0$, 所以 $f_n(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$. 因此

$$S_n = \int_0^1 \frac{x}{1+nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\ln(1+n),$$
$$\lim_{n\to\infty} nS_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n^2}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n} = 1.$$

21.(**本题满分** 11 **分**)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y,y) = (y+1)^2 - 2(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x,y) = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

解 由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ 对 y 积分可得 $f(x,y) = y^2 + 2y + \varphi(x)$. 又 $f(y,y) = y^2 + 2y + \varphi(y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 所以 $\varphi(y) = 1 - (2-y)\ln y$. 因此

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 + 2y + \varphi(x) \\ &= y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x = (y+1)^2 - (2-x)\ln x. \end{aligned}$$

则 $f(x,y)=0$ 对应的曲线方程为 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$, 当 $y=-1$ 时, $x=1$ 或 2. 从而所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^2(y+1)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\ln x\mathrm{d}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\\&=\pi\left[\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x-\left(2x-\frac{1}{4}x^2\right)\right]\Bigg|_1^2=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi.\end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(2,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_1\boldsymbol{\alpha},k_1\in\mathbb{R}$; $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(6,-3,-4,0)^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,k_2\in\mathbb{R}$; $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $x=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3\boldsymbol{\alpha},k_3\in\mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},$$

其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

23.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

解 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 且当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为 $\operatorname{diag}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), 0, \cdots, 0\}$.

证 由于 $r(\boldsymbol{A}) = 1$, 所以方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有且只有 $n-1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 且它只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值就是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$. 当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且其相似标准形为 $\operatorname{diag}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), 0, \cdots, 0\}$. 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 1, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵 $\operatorname{diag}\{n, 0, \cdots, 0\}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

10　2015 年考研数学二

一　选择题, $1\sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列反常积分中收敛的是　(　)

A. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　B. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　C. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　D. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

解　直接计算可知 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_2^{+\infty}=3\mathrm{e}^{-2}$, 其他选项都发散, 选 D.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内　(　)

A. 连续型　B. 有可去间断点　C. 有跳跃间断点　D. 有无穷间断点

解　首先有 $x\neq 0$, 且 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{x^2}{t}\frac{\sin t}{x}}=\mathrm{e}^x$,
因此 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$, 选 B.

3. 设函数 $\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则　(　)

A. $\alpha-\beta>1$　B. $0<\alpha-\beta\leqslant 1$　C. $\alpha-\beta>2$　D. $0<\alpha-\beta\leqslant 2$

解　当 $x<0$ 时, $f'(x)=0$, $f'_-(0)=0$, 则

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=f'_-(0)=0,$$

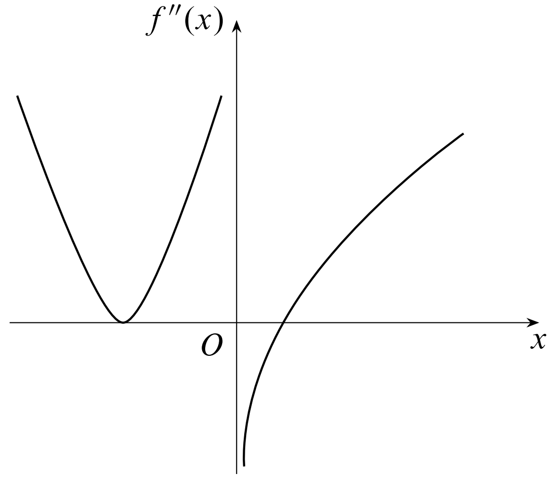
这要求 $\alpha>1$. 当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}.$$

要想 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$$0=f'(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right),$$

因此 $\alpha-\beta-1>0$, 选 A.



第 4 题图

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y=f''(x)$ 在 $x>0$ 时与 x 轴的交点, $x<0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

5. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次为 ( )

A. $\dfrac{1}{2},0$ B. $0,\dfrac{1}{2}$ C. $-\dfrac{1}{2},0$ D. $0,-\dfrac{1}{2}$

解 令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}$, 则 $x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$. 当 $u=v=1$ 时, $x=y=\dfrac{1}{2}$, 从而 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 变为

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

因此 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{2u(1-v)}{1+v}, \dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{(1+v)^2}$, 故 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0, \left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\dfrac{1}{2}$, 选 D.

6. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

A. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$ B. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

解 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得四条曲线分别为 $r = \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta = \dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, 正确答案选 B.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

解 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) < 3$, 利用初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 2, $d = 1$ 或 2, 选 D.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由题意知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$, 于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 选 A.

二　填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$________.

解 利用参数方程求导公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{3+3t^2}{1/(1+t^2)} = 3\left(1+t^2\right)^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{12t\left(1+t^2\right)}{1/(1+t^2)} = 12t\left(1+t^2\right)^2,$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = 48$.

10.函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$________.

解 根据莱布尼茨公式可得

$$f^{(n)}(0) = \mathrm{C}_n^2 \cdot 2\left(2^x\right)^{(n-2)}\Big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2\ln^{n-2} 2 = n(n-1)\ln^{n-2} 2.$$

11.设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$________.

解 由条件 $\varphi(x) = x\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$, 求导得 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t + 2x^2 f(x^2)$, 故 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1, \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$, 则 $f(1) = 2$.

12.设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处取得极值 3, 则 $y(x) =$________.

解 由题意知 $y(0) = 3, y'(0) = 0$. 微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 所以微分方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 代入 $y(0) = 3, y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 1$, 故 $y = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x}$.

13.若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} =$________.

解 令 $x = y = 0$ 可得 $z(0,0) = 0$, 原方程两边同时求全微分得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z) + xy\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y = 0.$$

令 $x = y = z = 0$ 得 $(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z)|_{(0,0)} = 0$, 即 $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = -\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x - \dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

14.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|\boldsymbol{B}| =$________.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$ 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,7,1$, 因此 $|\boldsymbol{B}| = 21$.

三　解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

解 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right), \sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$, 所以

$$
\begin{aligned}
f(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o\left(x^3\right)\\
&=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}
$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)=kx^3$ 当 $x\to 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a=0, b-\dfrac{a}{2}=0, k=\dfrac{a}{3}$, 解得 $a=-1, b=-\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{3}$.

提示: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(**本题满分 10 分**)

设 $A>0$, D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积, 若 $V_1=V_2$, 求 A 的值.

解 由旋转体的体积公式得

$$
\begin{aligned}
V_1&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2A^2}{4},\\
V_2&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi A.
\end{aligned}
$$

由题意有 $V_1=V_2$, 且 $A>0$, 所以 $A=\dfrac{8}{\pi}$.

17.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x, f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x, f(0,y)=y^2+2y$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

解 由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$ 两边对 y 积分得

$$
f'_x(x,y)=2\left(\frac{1}{2}y^2+y\right)\mathrm{e}^x+\varphi(x)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+\varphi(x).
$$

故 $f'_x(x,0)=\varphi(x)=(x+1)\mathrm{e}^x, f'_x(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x$. 两边再对 x 积分得 $f(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\psi(y)$. 由 $f(0,y)=y^2+2y$ 知 $\psi(y)=0$, 所以 $f(x,y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$.

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases}$ 得驻点 $(x,y)=(0,-1)$. 又

$$f_{xx}''=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+(x+2)\mathrm{e}^x,\ f_{xy}''=2(y+1)\mathrm{e}^x,\ f_{yy}''=2\mathrm{e}^x.$$

当 $x=0,y=-1$ 时, $A=f_{xx}''(0,-1)=1, B=f_{xy}''(0,-1)=0, C=f_{yy}''(0,-1)=2$, 因此 $AC-B^2>0, A>0$, 故 $f(0,-1)=-1$ 为极小值.

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

解 区域 D 关于 y 轴对称, 则由对称性得

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 x^2\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 t\cdot 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}\quad\left(x=\sqrt{2}\sin t\right) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 的零点个数.

解 求导得 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$, 令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$. $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递增, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 是唯一的极小值, 也是最小值. 而 $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)=0$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内有一个零点 $x=1$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 也有一个零点, 共两个零点.

20.(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C. 若要将该物体的温度继续降至 21°C, 还需冷却多长时间?

解 设 t(单位: min) 时刻物体温度为 $x(t)$, 则由题意得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k(x-m)$, 其中比例常数为 $k>0$, 介值温度为 $m=20$°C, 解得 $x(t)=C\mathrm{e}^{-kt}+20$. 代入 $x(0)=120$ 得

$C=100$, 再由 $x(30)=30$ 可得 $k=\dfrac{\ln 10}{30}$, 所以 $x(t)=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$. 令 $x=21$ 得 $t=60$. 因此要降到 21°C, 还需要 30min.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a)=0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. 设 $b>a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(b,f(b)\big)$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$, 证明 $a<x_0<b$.

证 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(b,f(b)\big)$ 处的切线方程为 $y=f(b)+f'(b)(x-b)$, 令 $y=0$ 得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$. 因为 $f'(x)>0$, $f(a)=0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, $f(b)>f(a)$. 又 $f'(b)>0$, 所以 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$. 又 $x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$, 在区间 (a,b) 上应用拉格朗日中值定理得 $f(b)=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, $\xi\in(a,b)$. 所以

$$x_0-a=b-a-\frac{f(b)}{f'(b)}=\frac{f(b)}{f'(\xi)}-\frac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\,\frac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)\,f'(\xi)},$$

因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增, 故 $f'(b)>f'(\xi)$, $x_0>a$, 因此 $a<x_0<b$.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=a^3=0$, 所以 $a=0$.

(2) 由 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$. 由 (1) 知

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=2+b\\2a-3=b\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$.

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得线性无关特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 为对角阵.

11　2016 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $a_1 = x\left(\cos\sqrt{x}-1\right)$, $a_2 = \sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是　(　)

A. a_1, a_2, a_3　　B. a_2, a_3, a_1　　C. a_2, a_1, a_3　　D. a_3, a_2, a_1

解　当 $x \to 0^+$ 时,

$$a_1 = x\left(\cos\sqrt{x}-1\right) \sim x\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$a_2 = \sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x,$$

所以三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 a_2, a_3, a_1, 选 B.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x<1 \\ \ln x, & x \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是　(　)

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x-1), & x \geqslant 1 \end{cases}$　　B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x+1)-1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x+1)+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$　　D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x-1)+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

解 从四个选项中选一个函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ 对任意 x 成立即可, 其中 B 和 C 当 $x>1$ 时 $F'(x) \neq f(x)$, 而 A 不满足 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 反常积分 ① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$, ② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为　(　)

A. ① 收敛, ② 收敛　　B. ① 收敛, ② 发散

C. ① 发散, ② 收敛　　D. ① 发散, ② 发散

解　直接计算得

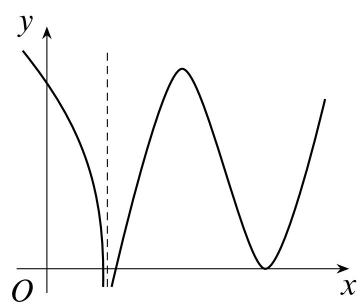
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0^-} = 1,$$

则 ① 收敛, 而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_{0+}^{+\infty}=+\infty,$$

则 ② 发散, 选 B.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ( )



第 4 题图

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点
C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点
D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

解 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中 $y=f'(x)$ 的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

5. 设函数 $f_i(x)\,(i=1,2)$ 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0)<0\,(i=1,2)$, 若两条曲线 $y=f_i(x)\,(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$, 且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 ( )

A. $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$ B. $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$
C. $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$ D. $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$

解 [1] 曲线 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线, 故 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$. 又在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率 K_1 大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率 K_2, 其中

$$K_1=\frac{|f_1''(x_0)|}{\left(1+f_1'^2(x_0)\right)^{\frac{3}{2}}},\ K_2=\frac{|f_2''(x_0)|}{\left(1+f_2'^2(x_0)\right)^{\frac{3}{2}}},$$

[1]作为选择题而言, 建议大家用切线, 凹凸性和曲率的几何意义做.

且 $f_i''(x)<0\,(i=1,2)$, 因此 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$. 由二阶导数的连续性知在 x_0 的某个邻域内都有 $f_1''(x)<f_2''(x)<0$, 由泰勒公式

$$f_i(x)=f_i(x_0)+f_i'(x_0)(x-x_0)+\frac{f_i''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\quad(i=1,2)$$

以及 $g(x)=f_i(x_0)+f_i'(x_0)(x-x_0)$ 可得在 x_0 的某邻域内有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$, 则 ( )

A. $f_x'-f_y'=0$ B. $f_x'+f_y'=0$ C. $f_x'-f_y'=f$ D. $f_x'+f_y'=f$

解 由 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$ 得 $f_x'(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-y)-\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}$, $f_y'(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}$, 故 $f_x'(x,y)+f_y'(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}=f(x)$, 选 D.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似 B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似 D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

解 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 因此

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1},\ \boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P},$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-8\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 不相似.

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 $1,2$, 则 ( )

A. $a>1$ B. $a<-2$ C. $-2<a<1$ D. $a=1$或$a=-2$

解 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$. 由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$, 即正负特征值个数分别为 $1,2$, 因此 $\begin{cases}a+2>0\\a-1<0\end{cases}$, 即 $-2<a<1$, 选 C.

二 填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________.

解

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)\right)=1,$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)\right)=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

10.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

解 利用定积分定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1.\end{aligned}$$

11.以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

解 设一阶非齐次线性微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$, 将特解代入得

$$\begin{cases}2x+x^2p(x)=q(x)\\2x-\mathrm{e}^x+\left(x^2-\mathrm{e}^x\right)p(x)=q(x)\end{cases}.$$

解得 $p(x)=-1,q(x)=2x-x^2$, 故此微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

12.已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)=(x+1)^2+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则当 $n\geqslant 2$ 时, $f^{(n)}(0)=$________.

解 注意到 $f(0)=1$, 且等式两边是可导的, 两边求导得 $f'(x)=2(1+x)+2f(x)$, 则 $f'(0)=4$. 两边再求导得 $f''(x)=2+2f'(x)$, 则 $f''(0)=10$, 两边同时求 $n-2$ 阶导数得到 $f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)$, 则 $f^{(n)}(0)=2f^{(n-1)}(0)=\cdots=2^{n-2}f''(0)=5\cdot 2^{n-1}$.

13.已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对事件的变化率为常数 v_0, 则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时, l 对时间的变化率是________.

解 注意到 $l=\sqrt{x^2+x^6}$, 两边对时间 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$x=1$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$, 所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{x=1}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$.

14.设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a=$________.

解 因为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2)=0$, 得 $a=2$ 或 $a=-1$. 注意到 $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$ 不满足条件, 因此 $a=2$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解 首先有 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}\right)$, 其中

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x-1+1)}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-2\sin^2 x}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\,(x-\sin x)}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{1}{6}x^3}{x^4}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

因此原极限为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解 首先

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ \displaystyle\int_0^1\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1\end{cases},$$

于是 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$. 当 $x\geqslant 1$ 时, $f'(x)=2x>0$; 当 $0<x<1$ 时, 令 $f'(x)=4x^2-2x=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$, 且 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=2>0$, 因此 $x=\frac{1}{2}$ 是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故 $f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

17.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定, 求 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 原方程两边分别对 x,y 求偏导数得

$$2xz+\left(x^2+y^2\right)z'_x+\frac{1}{z}z'_x+2=0 \tag{1}$$

$$2yz+\left(x^2+y^2\right)z'_y+\frac{1}{z}z'_y+2=0 \tag{2}$$

令 $z'_x=z'_y=0$ 得 $\begin{cases}xz+1=0\\ yz+1=0\end{cases}$, 解得 $y=x, z=-\frac{1}{x}$, 代入原方程得 $2x+2+\ln(-x)=0$, 利用求导考虑单调性知此方程的唯一根为 $x=-1$, 于是 $y=-1, z=1$, 点 $(-1,-1)$ 是函数 $z(x,y)$ 的唯一驻点. 等式 (1) 两边分别对 x,y 求偏导数, 等式 (2) 两边对 y 求偏导数并代入 2 得

$$2z+2xz'_x+2xz'_x+\left(x^2+y^2\right)z''_{xx}+\frac{1}{z}z''_{xx}+\left(-\frac{1}{z^2}z'_x\right)z'_x=0 \tag{3}$$

$$2z+2yz'_y+2yz'_y+\left(x^2+y^2\right)z''_{yy}+\frac{1}{z}z''_{yy}+\left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_y=0 \tag{4}$$

$$2xyz'_y+2yz'_x+\left(x^2+y^2\right)z''_{xy}+\left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_x+\frac{1}{z}z''_{xy}=0 \tag{5}$$

代入 $z\,(-1-1)=1$,$z'_x\,(-1-1)=z'_y\,(-1-1)=0$ 得

$$\begin{cases}2z+\left(x^2+y^2\right)z''_{xx}+\frac{1}{z}z''_{xx}=0\\ 2z+\left(x^2+y^2\right)z''_{yy}+\frac{1}{z}z''_{yy}=0\\ \left(x^2+y^2\right)z''_{xy}+\frac{1}{z}z''_{xy}=0\end{cases},$$

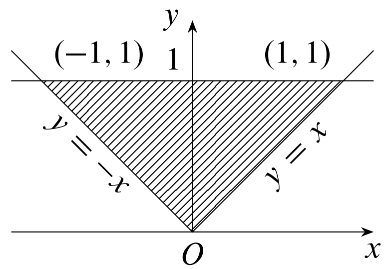
因此 $A=z''_{xx}(-1,-1)=-\frac{2}{3}, B=z''_{xy}(-1,-1)=0, C=z''_{yy}(-1,-1)=-\frac{2}{3}$. 由 $AC-B^2>0, A<0$ 知 $z(-1,-1)=1$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值.

18.(**本题满分 10 分**)

设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 首先

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sin\theta}\right\},$$



第 18 题图

且利用积分区域关于 y 轴对称可得原积分

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}r\mathrm{d}r\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}r\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\cot^2\theta-1\right)\mathrm{d}\theta=1-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

19.(**本题满分** 10 **分**)

已知函数 $y_1(x)=\mathrm{e}^x, y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解, 若 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$, 求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解.

解 由 $y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 得 $y_2'=u(x)\mathrm{e}^x+u'(x)\mathrm{e}^x, y''=u(x)\mathrm{e}^x+2u'(x)\mathrm{e}^x+u''(x)\mathrm{e}^x$, 代入原方程得

$$(2x-1)\mathrm{e}^x\left[u''(x)+2u'(x)+u(x)\right]-(2x+1)\mathrm{e}^x\left(u'(x)+u(x)\right)+2u(x)\mathrm{e}^x=0.$$

即 $(2x-1)u''(x)+(2x-3)u'(x)=0$, 变量分离得到 $\frac{\mathrm{d}u'(x)}{u'(x)}=-\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x$, 两边积分得

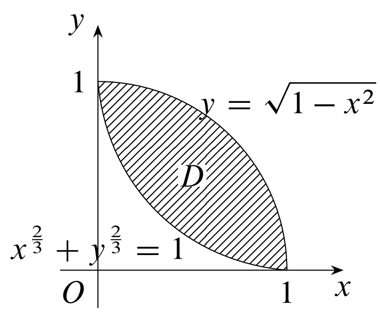
$$\ln\left|u'(x)\right|=-\int\left(1-\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x=-x+\ln|2x-1|+\ln C_1,$$

因此 $u'(x)=C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}, u(x)=-C_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+C_2$. 由 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$ 得 $C_1=1, C_2=0$, 所以 $u(x)=-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$. 由二阶线性微分方程解的结构定理知原方程的通解为 $y=k_1y_1+k_2y_2=k_1\mathrm{e}^x-k_2(2x+1), k_1, k_2$ 为任意常数.

20.(本题满分 11 分)

设 D 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解 上下两条曲线分别记为 $y=y_1(x), y=y_2(x)$, 利用曲线的参数方程得 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为



第 20 题图

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 y_1^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^1 y_2^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,\mathrm{d}t-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^7 t-\sin^9 t\right)\mathrm{d}t=\frac{18\pi}{35}. \end{aligned}$$

旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2 \\ &= 2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\sqrt{3\cos^2 t\,(\sin t)^2+\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{16\pi}{5}. \end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

解 (1) 由题意知 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$, 因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$
\begin{aligned}
\fint_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3\pi}.
\end{aligned}
$$

(2) 由 $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2x-3\pi} = 0$ 得 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内的唯一驻点为 $x = \dfrac{\pi}{2}$. 且当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内的最小值点. 由 $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t < 0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2\pi} > 0$ 结合零点定理与单调性可知 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22.(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 无解.

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ 进行初等行变换得

$$
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & a-2 \end{pmatrix},
$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 无解, 所以 $r(\boldsymbol{A}) < r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$, 可知 $a = 0$.

(2) 由于 $a = 0$, 所以

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},
$$

$$A\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix},$$

方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的增广矩阵 $(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)$ 作初等行变换得

$$(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)=\begin{pmatrix}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$A^{\mathrm{T}}Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\xi=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $A^{\mathrm{T}}Ax=A\beta$ 的特解为 $\eta=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 所以 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的通解为 $x=k(0,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

23.(**本题满分** 11 **分**)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 A^{99};

(2) 设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$, 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解 (1) 首先由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$ 知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程组 $(-E-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=-2$ 时, 解方程组 $(-2E-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\xi_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=0$ 时, 解方程组 $Ax=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\xi_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\Lambda$, 所以

$$\begin{aligned}A^{99}&=(P\Lambda P^{-1})^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 知 $\boldsymbol{B}^{100} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 即 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2^{99} - 2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2^{100} - 2)\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = (1 - 2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1 + (1 - 2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = (2 - 2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1 + (2 - 2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

12　2017 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 (　)

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

解 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, 即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\frac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$, $f(0)=-1$, 且 $f''(x)>0$, 则 (　)

A. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0$　　B. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0$

C. $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

解 由于 $f''(x)<0$, 则函数 $f(x)$ 为凸函数, 从而 $f(x)$ 图像上连接两点的弧在连接着两点的割线的下方, 即

$$f(x)<f(0)+[f(1)-f(0)]x=2x-1, x\in(0,1),$$

因此 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1(2x-1)\mathrm{d}x=0$. 同理有 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x<0$, 选 B.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

解 A 不对, 反例取 $x_n=\pi$; B, C 不对, 反例取 $x_n=-1$; D 是对的, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=x+\sin x=0$, 而方程 $x+\sin x=0$ 的唯一实根就是 $x=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 选 D.

4. 微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$ ( )

A. $A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$ B. $Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

C. $A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$ D. $Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

解 齐次方程的特征根为 $\lambda=2\pm 2\mathrm{i}$, 原方程的非齐次项有两项, 其中 e^{2x} 对应的特解形式 $y_1=A\mathrm{e}^{2x}$, $\mathrm{e}^{2x}\cos 2x$ 对应的特解形式 $y_2=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$, 选 C.

5. 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 且在任意的 (x,y), 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则 ( )

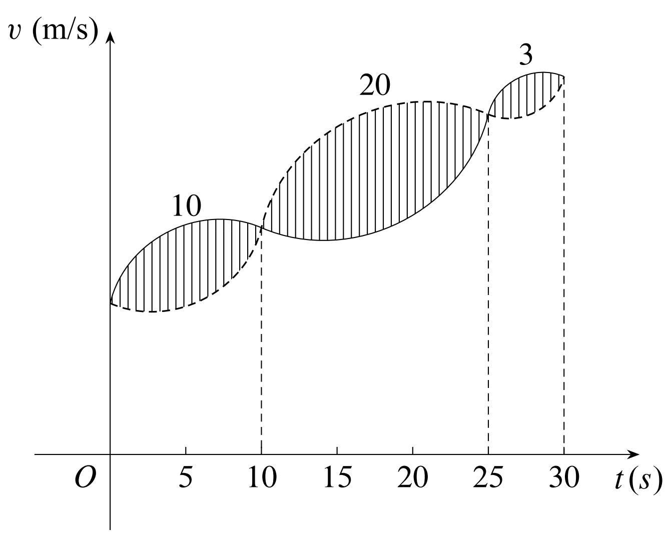
A. $f(0,0)>f(1,1)$ B. $f(0,0)<f(1,1)$

C. $f(0,1)>f(1,0)$ D. $f(0,1)<f(1,0)$

解 由题意可知 $f(x,y)$ 关于 x 递增, 关于 y 递减, 因此 $f(0,1)<f(0,0)<f(1,0)$, 选 D.

6. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则 ( )

A. $t_0=10$ B. $15<t_0<20$ C. $t_0=25$ D. $t_0>25$



第 6 题图

解 从 0 到 t_0 时刻, 甲和乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t$. 要使乙追上甲, 则有 $\int_0^{t_0}(v_2(t)-v_1(t))\mathrm{d}t=10$, 由定积分的几何意义知 $\int_0^{25}(v_2(t)-v_1(t))\mathrm{d}t=20-10=10$, 可知 $t_0=25$, 选 C.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$ ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ C. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

解 根据题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,2$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, 选 B.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似 B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似 D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

解 注意到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都是 $2,2,1$, 要判断 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda=2$ 的情形即可. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. 对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$, 它是不可对角化的, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, 选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

解 直接计算有 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$, 而

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=2,$$

因此斜渐近线方程为 $y=ax+b=x+2$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

解 由参数方程求导公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{-(1+\mathrm{e}^t)\sin t-\mathrm{e}^t\cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3},$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

11.$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)\\&=-\left.\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\left.\frac{1}{1+x}\right|_0^{+\infty}=1.\end{aligned}$$

12.设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$________.

解 容易知道 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy\mathrm{e}^y)$, 因此 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y+C$, 再由 $f(0,0)=0$ 知 $C=0$, 因此 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

13.$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$________.

解 交换二重积分次序可得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln(\cos 1).$$

14.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, 则 $a=$________.

解 由题意得 $\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, 因此 $\lambda=1, a=-1$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

解 令 $u=x-t$, 则 $\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$, 故原极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 由复合函数的偏导数法则可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x f_1'+f_2'(-\sin x)$, 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$. 进而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\mathrm{e}^x f_1'+\mathrm{e}^x\frac{\partial f_1'}{\partial x}-\cos x\cdot f_2'-\sin x\frac{\partial f_2'}{\partial x}\\&=\mathrm{e}^x f_1'+\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x f_{11}''-\sin x\cdot f_{12}''\right)-\cos x\cdot f_2'-\sin x\left(\mathrm{e}^x f_{21}''-\sin x\cdot f_{22}''\right)\\&=\mathrm{e}^x f_1'-f_2'\cos x+\mathrm{e}^{2x}f_{11}''-2\mathrm{e}^x f_{21}''\sin x-f_{22}''\sin^2 x,\end{aligned}$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1)$.

17.(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

解 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

解 将方程中的 y 视为 x 的函数, 两边求导得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$. 令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$, 且 $x=1$ 时 $y=1$, $x=-1$ 时 $y=0$. 等式两边再对 x 求导得

$$2x+2yy'^2+y^2y''+y''=0,$$

从而 $y''=-\dfrac{2(x+yy'^2)}{1+y^2}$. 于是在点 $(1,1)$ 处有 $y''=-1<0$, 从而 $y(1)=1$ 是极大值; 而在点 $(-1,0)$ 处有 $y''=2>0$, 从而 $y(-1)=0$ 是极小值.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

解 (1) 因为极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 且由极限的保号性知存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(\eta)}{\eta}<0$, 即 $f(\eta)<0$. 又 $f(1)>0$, 所以由零点定理知存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$, 即 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有根.

(2) 由于 $f(0)=f(\xi)=0$, 所以根据罗尔定理知存在 $\zeta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\zeta)=0$. 令 $F(x)=f(x)f'(x)$, 则 $F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2$. 那么有 $F(0)=F(\zeta)=F(\xi)=0$, 因此再由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,\zeta),\xi_2\in(\zeta,\xi)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 即方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

20.(本题满分 11 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2y\}$, 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域关于 y 轴对称, 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r+\pi\\ &=\pi+4\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\pi+8\int_0^{\pi}\left(\sin^4\theta-\sin^6\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &=\pi+8\left(\frac{3\pi}{16}-\frac{5\pi}{32}\right)=\frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数, 且 $y(1)=0$. 点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上任意一点, L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_p)$, 法线与 x 轴相交于点 $(X_p,0)$. 若 $X_p=Y_p$, 求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

解 点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$, 令 $X=0$ 可得 $Y_p=-xy'+y$. 法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$, 令 $Y=0$ 可得 $X_p=x+yy'$. 由条件 $X_p=Y_p$ 得 $x+yy'=y-xy'$, 即 $y'=\dfrac{y-x}{y+x}=\dfrac{y/x-1}{y/x+1}$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\dfrac{u-1}{u+1}$, 即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-1}{u+1}-u=-\frac{u^2+1}{u+1}.$$

分离变量得 $\displaystyle\int\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 解得 $\dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)+\arctan u=-\ln x+C\,(x>0)$.

当 $x=1$ 时 $u=0$, 于是 $C=0$, 故

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)+\arctan\frac{y}{x}=-\ln x,$$

即 $\ln\left(x^2+y^2\right)+2\arctan\frac{y}{x}=0$.

22.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 说明 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 即方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 进而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

23.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 首先二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 一定有零特征值, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$, 解得 $a=2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解方程组 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_1=-3$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_2=6$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_3=0$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

13　2018 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 则　　　(　　)

A. $a=\dfrac{1}{2}, b=-1$　　B. $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$　　C. $a=\dfrac{1}{2}, b=1$　　D. $a=-\dfrac{1}{2}, b=1$

解　由条件得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x-1+ax^2+bx\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1+ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+ax^2+bx}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)\,x+\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2)}{x^2},\end{aligned}$$

因此 $b=-1, a=-\dfrac{1}{2}$.

2. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是　　　(　　)

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

解　A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0)=-\dfrac{1}{2}, f'_-(0)=\dfrac{1}{2}$, 选 D.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则　　　(　　)

A. $a=3, b=1$　　B. $a=3, b=2$　　C. $a=-3, b=1$　　D. $a=-3, b=2$

解　即 $f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leqslant -1\\ x-1, & -1<x<0\\ x-b+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 连续, 可得 $a=-3, b=2$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则　　　(　　)

A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

解 考虑 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x)>0$ 时, $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0,1]$ 上进行积分可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, 选 D.

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则　(　)

A. $M>N>K$　B. $M>K>N$　C. $K>M>N$　D. $N>M>K$

解 利用对称性可以计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

6. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y=$　(　)

A. $\frac{5}{3}$　B. $\frac{5}{6}$　C. $\frac{7}{3}$　D. $\frac{7}{6}$

解 注意到积分区域 D 关于 y 轴对称, 由对称性可得

$$I=\iint\limits_{D}(1-xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1\left(2-x^2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}.$$

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为　(　)

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则　(　)

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$　B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$　D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

解 对于 A, 有 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$,

即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan(x)\right]=$________.

解 由拉格朗日中值定理知 $\arctan(x+1)-\arctan(x)=\dfrac{1}{1+\xi^2}$, $x<\xi<x+1$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

10.曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

解 计算可得 $y'=2x+\dfrac{2}{x}$, $y''=2-\dfrac{2}{x^2}$, 由此得曲线的拐点坐标为 $(1,1)$. 曲线在拐点处切线的斜率为 $y'\big|_{x=1}=4$, 故切线方程为 $y=4x-3$.

11.$\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

解

$$\begin{aligned}I&=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x-3)\right]\Big|_5^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

12.曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 ________.

解 直接由参数方程曲率计算公式得 $K=\dfrac{|x''(t)\,y'(t)-x'(t)\,y''(t)|}{\left([x'(t)]^2+[y'(t)]^2\right)^{3/2}}=\dfrac{2}{3}$.

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

解 原方程两边对 x 求偏导数得 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^{z-1}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$, 于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}$, 当 $x=2,y=\dfrac{1}{2}$ 时, $z=1$, 于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 ________.

解 由题意得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2, 即 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

三　解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

解 利用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x-1}\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t&=\int\frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t\\&=\int\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}\\&=\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{t-1}+C\\&=\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C\end{aligned}$$

故 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C_1$.

16.(本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=ax^2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

解 (1) 首先 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$, 因此在方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u = ax^2$ 两边求导得

$$f(x) + xf(x) + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - xf(x) = f(x) + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 2ax.$$

可知 $f(0) = 0$. 注意到等式两边是可导的, 继续求导得 $f'(x) + f(x) = 2a$, 等式两边乘以 e^x 可得 $(\mathrm{e}^x f(x))' = 2a\mathrm{e}^x$, 因此 $\mathrm{e}^x f(x) = 2a\mathrm{e}^x + C$. 由 $f(0) = 0$ 知 $C = -2a$, 因此 $f(x) = 2a - 2a\mathrm{e}^{-x}$.

(2) 根据条件可得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2a\int_0^1 (1-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = 2a\mathrm{e}^{-1} = 1, a = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

17.(**本题满分 10 分**)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 积分区域看成为 X 型区域: $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x) \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$, 化成累次积分得

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\varphi(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(x\varphi(x) + 2\varphi^2(x)\right)\mathrm{d}x \\ &== \int_0^{2\pi}\left((t-\sin t)(1-\cos t) + (1-\cos t)^2\right)\mathrm{d}(t-\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi}\left((t-\sin t)(1-\cos t) + (1-\cos t)^2\right)(1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= 5\pi + 3\pi^2.\end{aligned}$$

18.(**本题满分 10 分**)

已知常数 $k \geqslant 2\ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)\left(x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1\right) \geqslant 0$.

解 原不等式等价于 $\begin{cases} x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1 \geqslant 0, & x \geqslant 1 \\ x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1 \leqslant 0, & x < 1 \end{cases}$.

令 $f(x) = x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{2\ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{x - 2\ln x + 2k}{x}$.

令 $g(x) = x - 2\ln x + 2k$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{2}{x}\begin{cases} > 0, & x > 2 \\ = 0, & x = 2 \\ < 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内

单调递减, 在 $(2,+\infty)$ 内单调递增, $g_{\min}(x)=g(2)\geqslant 2\ln 2>0$. 这就说明 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}>0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 且 $f(1)=0$, 所以

$$\begin{cases} x-\ln^2 x+2k\ln x-1\geqslant 0, & x\geqslant 1 \\ x-\ln^2 x+2k\ln x-1\leqslant 0, & x<1 \end{cases}.$$

成立, 原不等式得证.

19.(**本题满分 10 分**)

[1]将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 设分成的三段依次为 x,y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\dfrac{x}{2\pi},\dfrac{y}{4},\dfrac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{1}{16}y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f'_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0 \\ f'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$, 并且黑塞矩阵 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

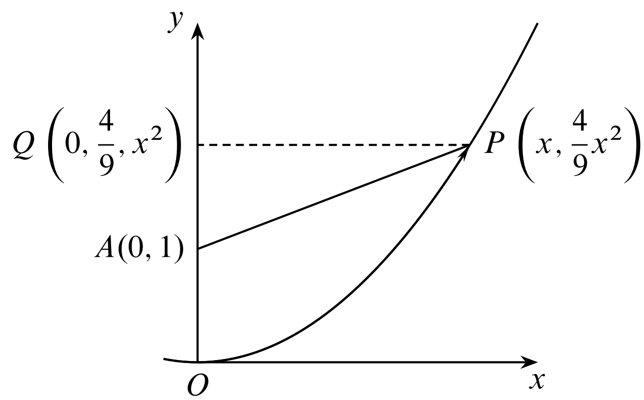
方法二 由柯西不等式 $\left(\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{1}{16}y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\dfrac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\dfrac{x}{2\pi}=\dfrac{y}{16}=\dfrac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 时, $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

20.(**本题满分 11 分**)

已知曲线 $L: y=\dfrac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点,S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成的图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

[1]此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

解 如图所示, 其中 $PQ \perp y$ 轴. 在时刻 t 时, P 运动到 $\left(x, \frac{4}{9}x^2\right)$ 处的速度 v_t 沿着曲



第 20 题图

线 L 在这一点的切线方向. 此时由直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 围成的图形的面积为

$$S = S_{\text{曲边}\triangle POQ} - S_{\triangle PAQ} = \int_0^{\frac{4}{9}x^2} \frac{3}{2}\sqrt{y}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}AQ \cdot QP$$
$$= y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{4}{9}x^2} - \frac{1}{2}x\left(\frac{4}{9}x^2 - 1\right) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 所以此时 S 关于时间 t 的变化率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{x=3} = \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=3} = 4\left.\left(\frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right|_{x=3} = 10.$$

21.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 首先由 $x_1 > 0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \mathrm{e}^{\xi_n} < \mathrm{e}^{x_n},\quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \mathrm{e}^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

22.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解 (1) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a=2$, 则方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=c(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a\neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a\neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

如果 $a=2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

23.(**本题满分 11 分**)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\to\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

14　2019 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$　　(　　)

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

   解　当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为　　(　　)

   A. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $(0, 2)$　　C. $(\pi, -2)$　　D. $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$

   解　先求二阶导数

$$y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x, y'' = \cos x + \cos x - x\sin x - 2\cos x = -x\sin x,$$

令 $y'' = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = \pi$. 当 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$ 时 $y'' < 0$, 当 $\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$ 时 $y'' > 0$. 因此 $(0, 2)$ 不是拐点, $(\pi, -2)$ 是拐点, 选 C.

3. 下列反常积分发散的是　　(　　)

   A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　B. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　C. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

   解　因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$, D 选项是发散的, 其他的都收敛.

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为　　(　　)

   A. $1, 0, 1$　　B. $1, 0, 2$　　C. $2, 1, 3$　　D. $2, 1, 4$

   解　从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 所以 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = \mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = c\mathrm{e}^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.

5. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$, 记

$$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 I_1,I_2,I_3 的大小关系为 ( )

A. $I_3<I_2<I_1$ B. $I_2<I_1<I_3$ C. $I_1<I_2<I_3$ D. $I_2<I_3<I_1$

解 在区域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|<\frac{\pi}{2}\right\}$ 内有 $x^2+y^2<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, 则

$$\sin\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $I_1<I_2$. 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$, 于是

$$1-\cos u-\sin u=1-\sqrt{2}\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0,$$

等号只在 $u=0$ 和 $u=\frac{\pi}{2}$ 成立, 因此

$$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即 $I_2>I_3$, 选 A.

6. 已知 $f(x),g(x)$ 的二阶导函数在 $x=a$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

解 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$, 则当 $x\to a$ 时, $f(x)-g(x)=o\big((x-a)^2\big)$, 利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\sum_{k=0}^{2}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\big((x-a)\big)^k\\&=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^2+o(x-a)^2,\end{aligned}$$

于是有 $f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a)=0,k=0,1,2$. 因此曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切, 且由曲率公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ 可知对应的曲率也相等, 充分性成立.

反之, 如果两曲线在 $x=a$ 对应的点处有相同的切线, 则 $f(a)=g(a), f'(a)=g'(a)$. 再由两者在这一点的曲率相等有 $\dfrac{|f''(a)|}{(1+f'^2(a))^{3/2}}=\dfrac{|g''(a)|}{(1+g'^2(a))^{3/2}}$, 因此 $f''(a)=\pm g''(a)$. 当 $f''(a)=-g''(a)\neq 0$ 时, 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=f''(a)\neq 0.$$

因此必要性不成立, 选 A.

提示: 本题还是有一定难度的, 且在此题中有几个值得注意的地方:

- 本题中只需要 $f(x), g(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导即可, 并不需要二阶导数连续.
- 对于必要性的否定, 可以直接举反例 $a=0, f(x)=x^2, g(x)=-x^2$ 即可.
- 在充分性的推导中, 切勿乱用洛必达法则. 如果要用, 应当这么使用: 为方便, 我们记 $h(x)=f(x)-g(x)$. 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{(x-a)^2}=0$ 可知 $h(a)=0$, 且

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}(x-a)=0.$$

由于 $h''(a)$ 是存在的, 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{h'(x)-h'(a)}{x-a}=\frac{h''(a)}{2}=0.$$

这里必须先用定义求出 $h'(a)=0$, 再用洛必达法则求出 $h''(a)=0$ (为什么?).

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$, 因此 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

解 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________.

解 先取对数用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(x+2^x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=2+2\ln 2$, 故原极限为 $4\mathrm{e}^2$.

10.曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线在 y 轴的截距为________.

解 $t = \frac{3}{2}\pi$ 所对应的点是 $\left(\frac{3}{2}\pi + 1, 1\right)$, 该点处切线的斜率为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \left.\frac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi} = -1$. 该点处切线方程为 $y = -x + \frac{3}{2}\pi + 2$, 它在 y 轴上的截距为 $\frac{3}{2}\pi + 2$.

11.设函数 $f(u)$ 可导, $z = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$________.

解 直接计算得 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{y^2}{x}\right) + yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2y}{x}$. 因此 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x\left(-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)+y\left(f\left(\frac{y^2}{x}\right) + yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2y}{x}\right) = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

12.曲线 $y = \ln\cos x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为________.

解 由 $y = \ln\cos x$ 得 $y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, 于是曲线的弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x\mathrm{d}x = \ln\left|\sec x + \tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\ln 3}{2}.$$

13.已知函数 $f(x) = x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$________.

解 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_x^1 \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\int_0^t x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t^2\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^1 t\sin t^2\mathrm{d}t = \frac{\cos 1 - 1}{4}.\end{aligned}$$

14.已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 (i,j) 元的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$________.

解 直接计算可得 $A_{11}-A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$.

三　解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^{x}+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

解　首先有 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x}=1=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\mathrm{e}^x+1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. 而在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 于是 $f'(x)=\begin{cases} x^{2x}(2+2\ln x), & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0 \end{cases}$. 当 $x<-1$ 或 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)<0$, 而当 $-1<x<0$ 或 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)>0$. 于是结合单调性可知 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ 和 $f(-1)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是极小值, $f(0)=1$ 是极大值.

16.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解　利用待定系数法可得

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x&=-2\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\\&=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}\left(x^2+x+1\right)\\&=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln\left(x^2+x+1\right)+C.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 由条件可得 $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(y'-xy) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $e^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x}+C$. 再由 $y(1)=\sqrt{e}$ 可知 $C=0$, 因此 $y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi\int_1^2\left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 xe^{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\left(e^4-e\right).$$

18.(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant y,\left(x^2+y^2\right)^3\leqslant y^4\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

解 区域 D 关于 y 轴对称, 把它化为极坐标形式, $|x|\leqslant y$ 即 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$. $(x^2+y^2)^3\leqslant y^4$ 就是 $r^6\leqslant r^4\sin^4\theta, r\leqslant\sin^2\theta$. 于是

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}rdr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta \\
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d(\cos\theta) \\
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d(\cos\theta) \\
&= -\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{43}{120}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

[1]设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线 $y=e^{-x}\sin x(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积, 求 S_n, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解 利用直角坐标系下的面积公式可得

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{n\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx \\
&= \sum_{k=0}^{n\pi}\int_0^{\pi}e^{-(k\pi+t)}|\sin(k\pi+t)|dt \\
&= \int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt\sum_{k=0}^{n}e^{-k\pi}
\end{aligned}$$

[1]此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

$$= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-n\pi}\right).$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin t \mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$, 最后极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}$.

20.(本题满分 11 分)

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 求 a,b 的值, 使得在变换 $u(x,y) = v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

解 由 $u(x,y) = v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by} + av\left(x,y\right)\mathrm{e}^{ax+by}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by} + bv\left(x,y\right)\mathrm{e}^{ax+by},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ax+by} + a\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by} + a\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by} + av\left(x,y\right)\mathrm{e}^{ax+by}\right)\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{e}^{ax+by} + 2a\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+by} + a^2 v\left(x,y\right)\mathrm{e}^{ax+by},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{e}^{ax+by} + 2b\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+by} + b^2 v\left(x,y\right)\mathrm{e}^{ax+by}.\end{aligned}$$

将上述式子代入 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 整理可得

$$\mathrm{e}^{ax+by}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(4a+3\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(3-4b\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \left(2a^2-2b^2+3a+3b\right)v\right) = 0.$$

依题意有 $\begin{cases} 4a+3=0 \\ 3-4b=0 \end{cases}$, 因此 $\begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

解 (1) 由积分中值定理知存在 $\zeta \in (0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(\zeta) = 1 = f(1)$, 于是由罗尔定理知存在 $\xi \in (\zeta,1) \subset (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 考虑函数 $F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$, 首先有 $F(0) = F(1) = 0$ 且

$$\int_0^1 F\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f\left(x\right) + 3x^2 - 4x\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(3x^2-4x\right)\mathrm{d}x = 0.$$

由积分中值定理可知存在 $\eta_1 \in (0,1)$ 使得 $F(\eta_1) = 0$. 因此由罗尔定理知存在 $\eta_2 \in (0,\eta_1), \eta_3 \in (\eta_1,1)$ 使得 $F'(\eta_2) = F'(\eta_3) = 0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta \in (\eta_2,\eta_3) \subset (0,1)$ 使得 $F''(\eta) = f''(\eta) + 6 = 0$, 从而 $f''(\eta) = -6 < -2$, 证毕.

提示: 这个证法恰到好处的地方在于当我们取 $f(x)=4x-3x^2$ 时, $f(x)$ 刚好满足条件, 且 $f''(x)\equiv -6$, 这个例子说明 $f''(x)$ 能够保证取到的最小值就是 -6. 至于如何构造出这个例子, 只需要待定一组系数 a,b,c 使得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可.

22.(**本题满分 11 分**)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 由于向量组向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=&\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\\
\to&\begin{pmatrix}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&4&a^2-5&a-1&-7-a&a^2-9\end{pmatrix}\\
\to&\begin{pmatrix}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此当 $a=1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$, 两个向量组等价. 当 $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a\neq\pm1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a\neq-1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 当 $a=1$ 时, 由初等行变换得 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

解得 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3, k\in\mathbb{R}$.

当 $a\neq\pm1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, 此时有 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

23.(**本题满分 11 分**) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x-8=-2y\\ -2+x-2=2-1+y\end{cases},$$

解得 $x=3, y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,-1,-2$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$. 故

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 \Rightarrow (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B},$$

因此当取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

15　2020 年考研数学二

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 (　)

A. $\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,\mathrm{d}t$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$

解　首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)}{g(t)}=1$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

于是当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t \sim \int_0^x \sqrt{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{\sin x} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}x^5,$$

正确答案选 D.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　显然, 所有的间断点为 $x=-1,0,1,2$, 其中 $x=-1,1,2$ 都是无穷间断点, 而 $x=0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x=$ (　)

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

解 令 $t=\arcsin\sqrt{x}$, 则 $x=\sin^2 t$,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4},$$

选 A.

4. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 则当 $n\geqslant 3$ 时, $f^{(n)}(0)=$ ( )

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$ B. $\dfrac{n!}{n-2}$ C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$ D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

解 方法一 由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(x^2)^{(n-k)}[\ln(1-x)]^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{2}\mathrm{C}_n^k(x^2)^{(k)}[\ln(1-x)]^{(n-k)}\\ &=x^2\frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}+\mathrm{C}_n^1 x\frac{-(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}+2\mathrm{C}_n^2\frac{-(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}, \end{aligned}$$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0)=-2\mathrm{C}_n^2(n-3)!=-n(n-1)(n-3)!=-\dfrac{n!}{n-2}$, 选 A.

方法二 利用函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式系数的唯一性, 得

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2\ln(1-x)=x^2\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n-2}+o\left(x^{n-2}\right)\right)\\ &=-x^3-\frac{x^4}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n-2}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n), \end{aligned}$$

那么由对应项系数相等可得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\dfrac{1}{n-2}$, 所以 $f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$, 选 A.

5. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0\\ x, & y=0\\ y, & x=0\end{cases}$,给出下列结论:

(1) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$; (2) $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$;

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$; (4) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数为 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

解 直接计算可得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

所以 (1) 正确. 当 $xy \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, 那么

$$\lim_{y\to 0} \frac{f_x'(0,y) - f_x'(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y-1}{y} = \infty,$$

因此 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在, (2) 错误. 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时, $f(x,y)$ 不论取 x, y, 或者 xy, 都是无穷小量, 因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, (3) 正确. 又

$$^{1}\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} xy = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

因此 (4) 正确, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ( )

A. $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$　　B. $\frac{f(0)}{f(-1)} > \mathrm{e}$　　C. $\frac{f(1)}{f(-1)} < \mathrm{e}^2$　　D. $\frac{f(2)}{f(-1)} < \mathrm{e}^3$

解 由 $f'(x) > f(x) > 0$ 可知 $f'(x) - f(x) > 0$, 且 $f(x)$ 单调递增. 令 $F(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$, 则 $F'(x) = \mathrm{e}^{-x}[f'(x) - f(x)] > 0$, 因此 $F(x)$ 单调递增且为正, 于是 $F(0) > F(-1)$, 选 B.

7. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解, 且 $r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 而 $A_{12} \neq 0$ 说明 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 且 $\boldsymbol{A}$ 中对应的三列 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$　　B. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$　　D. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$

解 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

[1]注意这是个累次极限, x 和 y 都是趋于 0 而不等于 0.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$________.

解 由参数方程求导公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t=1$ 可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = -\sqrt{2}$.

10. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x =$________.

解 交换积分次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3+1) = \left.\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

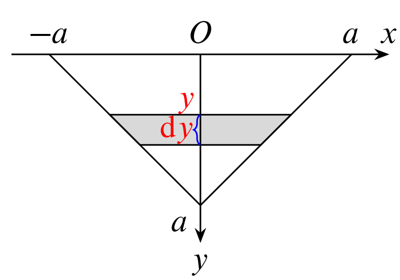
11.设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)} =$________.

解 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},$$

于是 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)} = \pi - 1$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)} = -1$, 因此 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)} = (\pi-1)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

12.斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g, 水的密度为 ρ, 则三角形平板的一侧受到的水压力为________.



第 12 题图

解 如图, 以斜边所在的直线为 x 轴, 斜边中点为原点, 垂直于 x 轴向下的方向为 y 轴, 考虑在深度为 y 处, 宽度为 $\mathrm{d}y$ 的窄条, 压强为 $\rho g y$, 那么窄条一侧承受的压力为 $\rho g y \cdot 2(a-y)\,\mathrm{d}y$, 因此整个平面一侧承受的压力为

$$F = \int_0^a \rho g y \cdot 2(a-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\rho g a^3.$$

13.设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解 方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$, 再由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 可得 $C_1=0, C_2=1$, 因此 $y(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$, $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$.

14.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

解 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4-4a^2.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线.

解 设所求斜渐近线为 $y=ax+b$, 则

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{(1+1/x)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right] \\ &=\lim_{x\to+\infty}x\left[\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[\mathrm{e}^{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right] \\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left[1-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] \\ &=\frac{1}{2\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

因此所求的斜渐近线为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 且 $f(x)$ 连续, 则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

显然 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u & x\neq 0\\ f(0)=0, & x=0\end{cases}$. 当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{1}{x}f(x)-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

当 $x=0$ 时,

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}.$$

因此 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}f(x)-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$, 且

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f\ (u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'\ (0)\,,$$

因此 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.(**本题满分 10 分**)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

于是当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0, B=-1, C=0$, 那么 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 不是极值点; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A=1, B=-1, C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

18.(**本题满分 10 分**)

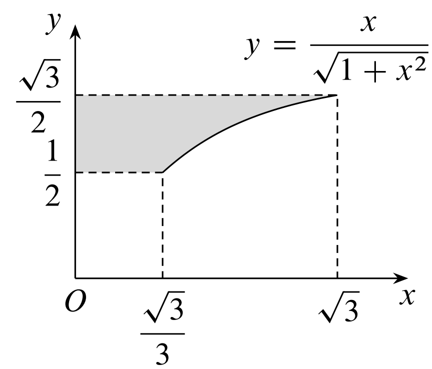
设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$, 并求曲线 $y=f(x), y=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

解　(1) 把已知等式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

与原式联立消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 解得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 如图, 由 $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, 因此所求旋转体的体积为



第 18 题图

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}.$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 D 由 $x=1, x=2, y=x$ 及 x 轴围成.

解　直接化为极坐标计算得

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}r\,\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left.\frac{\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$, 使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2}$.

证　(1) 令 $F(x)=f(x)-(2-x)\mathrm{e}^{x^2}$, 则

$$F(1)=f(1)-\mathrm{e}=-\mathrm{e}<0,\quad F(2)=f(2)-0=f(2)>0,$$

因此由零点定理知存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$.

(2) 令 $g(x)=\ln x$, 则 $f(x), g(x)$ 都在 $[1,2]$ 上可导, 且 $g'(x)\neq 0$, 由柯西中值定理知存在 $\eta\in(1,2)$, 使得 $\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $\frac{f(2)}{\ln 2}=\frac{\mathrm{e}^{\eta^2}}{1/\eta}$, 也就是 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)>0\,(x>0)$. 曲线 $y=f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T, 过点 M 作 MP 垂直 x 轴

于点 P, 且曲线 $y=f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3:2$, 求曲线满足的方程.

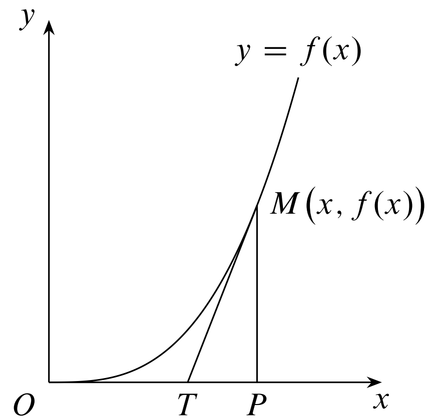
解 设 M 的坐标为 $(x,f(x))$, 则 M 处的切线方程为

$$Y=f'(x)(X-x)+f(x).$$

当 $Y=0$ 时, $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 且

$$S_{\triangle MTP}=\frac{1}{2}f(x)\left[x-\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right]=\frac{f^2(x)}{2f'(x)}.$$

由题意有 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2(x)}{2f'(x)}$, $f(0)=0$. 等式两边求导得



第 21 题图

$$f(x)=\frac{3\left[2f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)\right]}{4f'^2(x)},$$

整理即得 $f(x)f''(x)-\dfrac{2}{3}f'^2(x)=0$, 于是 $f'(0)=0$. 且

$$\left(\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}}\right)'=\frac{y''y^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'^2}{y^{\frac{4}{3}}}=\frac{y''y-\frac{2}{3}y'^2}{y'y^{\frac{4}{3}}}=0,$$

因此 $y'=Cy^{\frac{2}{3}}$. 再分离变量解得 $3y^{\frac{1}{3}}=Cx+C_1$, 即 $y=(C_2x+C_3)^3$. 再由 $y(0)=y'(0)=0$ 知 $C_3=0$, 因此 $y=kx^3$, k 为任意正数, 此即为所求曲线的方程.

22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1,y_2.y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$, $g(y_1,y_2,y_3)$ 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 合同, 所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2$, 因此

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a)(1-a)^2 = 0,$$

于是 $a = 1$ 或 $-\dfrac{1}{2}$. 当 $a = 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = 1$ 舍去, 于是 $a = -\dfrac{1}{2}$.

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3\right)^2 + \dfrac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则在可逆线性变换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{z}$ 下, $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形 $z_1^2 + z_2^2$. 同理, $g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 2y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则在可逆线性变换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}$ 下, $g(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准形 $z_1^2 + z_2^2$. 因此 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 所以

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

解 (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2, -3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.