2020 届考研数学全真模拟卷(数学三)

命题人　向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ～ 8	填空题 9 ～ 14	解答题 15 ～ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 ( )

(A) $f(0)=0$　(B) $f(0)\neq 0$　(C) $f'(0)=0$　(D) $f'(0)\neq 0$

2. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$, 令

$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

则 ( )

(A) $M<N<P$　(B) $P<M<N$　(C) $P<N<M$　(D) $M<P<N$

3. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x+x^2)\mathrm{e}^x$, 则 a,b,c 依次为 ( )

(A) $1,-2,1$　(B) $1,0,\frac{1}{2}$　(C) $2,1,\frac{1}{2}$　(D) $-2,1,2$

4. 已知数列 a_n,b_n 均非零, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, 则 ( )

(A) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　(B) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(C) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散　(D) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的 ( )

(A) 充分而非必要条件　(B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

6. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 1 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值　(B) 2 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵　(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

7. 已知随机事件 A, B 满足 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(B|A) = 2$, 则 ( )

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $P(A|\bar{B}) = 0$ (D) $P(B|\bar{A}) = 1$

8. 已知随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha \in (0.5, 1)$ 时, $P(X < x_\alpha) = \alpha$, 则 $P(Y < x_\alpha^2) =$ ( )

(A) $2\alpha - 1$ (B) $\alpha - \dfrac{1}{2}$ (C) α (D) $1 - \alpha$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x^2} =$________.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - 2x^2 \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x) =$________.

11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{-\sin x} f(x)\,\mathrm{d}y$ 的积分顺序的结果为________.

12. 差分方程 $\Delta y_x - \Delta y_{x-1} - y_{x-1} = 2^x$ 的通解为________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 + 2\lambda + 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} =$________.

14. 袋子里面有一红一白两个球, 随机从中有放回地取球, 直到两种颜色的球均取到为止, 则取球次数的数学期望为________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 令

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) + xf(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

若 $g'(0) = 1$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

16.(本题满分 10 分)

设区域 $D = (x, y)|x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$, 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $u = f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

18.(本题满分 10 分)

求曲线 $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{|\cos x|}\,(x \geqslant 0)$ 与 x 轴所围成的区域绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

19.（本题满分 10 分）设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=1, F(x)f(x)=\cos 2x, a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求出 a_n 的表达式；

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数.

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

21.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 $y=-x^2+2x+3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$；

(2) 求 X,Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(4) 计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为

$$f(x;\mu,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu\\ 0, & x\leqslant\mu\end{cases}.$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty, 0<\theta<+\infty$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求参数 μ,θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1,\hat{\theta}_1$；

(2) 求参数 μ,θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2,\hat{\theta}_2$.