

2020 届考研数学全真模拟卷(数学三)

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: _____

题号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总分
满分	32	24	94	150
得分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是 ()
- (A) $f(0) = 0$ (B) $f(0) \neq 0$ (C) $f'(0) = 0$ (D) $f'(0) \neq 0$

2. 设在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 令

$$M = \int_a^b f(x) dx, \quad N = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a), \quad P = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

则 ()

- (A) $M < N < P$ (B) $P < M < N$ (C) $P < N < M$ (D) $M < P < N$

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()
- (A) 1, -2, 1 (B) 1, 0, $\frac{1}{2}$ (C) 2, 1, $\frac{1}{2}$ (D) -2, 1, 2

4. 已知数列 a_n, b_n 均非零, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 ()

- (A) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 (B) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- (C) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 (D) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解是 $A^T A$ 正定的 ()
- (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
- (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

6. 设 α, β 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $A = E + \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$, 则下列说法错误的是 ()
- (A) 1 必为 A 的特征值 (B) 2 必为 A 的特征值
- (C) $E + A$ 为正定矩阵 (D) 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解



7. 已知随机事件 A, B 满足 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(B|A) = 2$, 则 ()
 (A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $P(A|\bar{B}) = 0$ (D) $P(B|\bar{A}) = 1$
8. 已知随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha \in (0.5, 1)$ 时, $P(X < x_\alpha) = \alpha$, 则 $P(Y < x_\alpha^2) =$ ()
 (A) $2\alpha - 1$ (B) $\alpha - \frac{1}{2}$ (C) α (D) $1 - \alpha$

答案 CBDBCDC A

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x^2} =$ _____.

答案 $\frac{\pi}{4}$.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$, 则 $f(x) =$ _____.

答案 $\ln x - e^{-2}x^2$.

11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\int_0^\pi dx \int_0^{-\sin x} f(x) dy$ 的积分顺序的结果为 _____.

答案 $-\int_{-1}^0 dy \int_{-\arcsin y}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$.

12. 差分方程 $\Delta y_x - \Delta y_{x-1} - y_{x-1} = 2^x$ 的通解为 _____.

答案 $y_x = C \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1}$.

13. 设 A 为三阶矩阵, $|\lambda E - A| = \lambda^3 + 2\lambda + 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} =$ _____.

答案 0.

14. 袋子里面有一红一白两个球, 随机从中有放回地取球, 直到两种颜色的球均取到为止, 则取球次数的数学期望为 _____.

答案 3.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) + xf(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

若 $g'(0) = 1$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

解 由题意以及泰勒公式可得

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x) + xf(x)}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + xf(x) - \frac{1}{2}x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x(f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2}f'''(0)x^2) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + f'(0))x + (f''(0) - 1)x^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}f'''(0))x^3 + o(x^3)}{x^3} = 1. \end{aligned}$$

由此得 $1 + f'(0) = f''(0) - 1 = 0$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}f'''(0) = 1$, 所以 $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = \frac{4}{3}$.

16. (本题满分 10 分)

设区域 $D = (x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 计算积分 $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma$.

解 直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为 $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \cos \left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{1}{2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)} d \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] d \left[\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sin \left[\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin 1. \end{aligned}$$

17. (本题满分 10 分)

设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

解 记 $v = \ln r, r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}, \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \cdot f'(v), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \cdot f'(v).$$

进一步计算二阶偏导数得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^4} \cdot f''(v) + \frac{1}{r^2} \cdot f'(v) - \frac{2x^2}{r^4} \cdot f'(v), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^4} \cdot f''(v) + \frac{1}{r^2} \cdot f'(v) - \frac{2y^2}{r^4} \cdot f'(v). \end{aligned}$$

代入条件 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ 并化简得微分方程 $f''(v) = e^{5v}$, 结合初值条件 $f(0) = f'(0) = 0$ 解得 $f(v) = \frac{1}{25}e^{5v} - \frac{1}{5}v - \frac{1}{25}$.

18. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{|\cos x|}$ ($x \geq 0$) 与 x 轴所围成的区域绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解 由旋转体的体积公式得所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{+\infty} e^{-x} |\cos x| dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-x} |\cos x| dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} e^{-x} |\cos x| dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t+k\pi)} |\cos(t+k\pi)| dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}) \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi} - 1}. \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分) 设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0) = 1, F(x)f(x) = \cos 2x, a_n = \int_0^{n\pi} |f(x)| dx$ ($n = 1, 2, \dots$).

(1) 求出 a_n 的表达式;

(2) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - 1} x^n$ 的收敛域与和函数.

解 (1) 由条件知 $\int F(x)F'(x) dx = \int F(x)f(x) dx = \int \cos 2x dx, F^2(x) = \sin 2x + C$. 由 $F(0) = 1$ 知 $C = 1$, 因此

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{1 + \sin 2x} = |\cos x + \sin x|, |f(x)| = \frac{\cos 2x}{F(x)} = \frac{|\cos^2 x - \sin^2 x|}{|\cos x + \sin x|} = |\cos x - \sin x|, \\ \int_0^{\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

因为 $|f(x)|$ 的周期为 π , 则

$$a_n = \int_0^{n\pi} |f(x)| dx = n \int_0^{\pi} |f(x)| dx = 2n\sqrt{2},$$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2-1} x^n = 2\sqrt{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$, 其收敛域为 $[-1, 1)$. 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2-1} x^n = \sqrt{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \sqrt{2} \left(x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right), \end{aligned}$$

且 $S(0) = 0$. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $-1 \leq x < 1$, 故当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{2} \left[-x \ln(1-x) + \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \\ &= -\sqrt{2} \left(\frac{1+x^2}{2} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} \left(\frac{1+x^2}{2} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} \right), & -1 \leq x < 1 \text{ 且 } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

20. (本题满分 11 分)

设 A 为三阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

- (1) 证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;
- (2) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求秩 $r(A-E)$ 及行列式 $|A+2E|$.

解 (1) 设

$$k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0, \quad (*)$$

由题设 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ($i = 1, 2, 3$), 于是

$$\begin{aligned} A\beta &= A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3, \\ A^2\beta &= \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3, \end{aligned}$$

代入 (*) 式整理得

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0, \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases}$$

其系数行列式非零, 因此必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

(2) 由 $A^3\beta = A\beta$ 有

$$\begin{aligned} A(\beta, A\beta, A^2\beta) &= (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则 P 可逆, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

从而有

$$\begin{aligned} r(A - E) &= r(B - E) = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \\ |A + 2E| &= |B + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

21. (本题满分 11 分)

已知三元二次型 $x^T Ax$ 经过正交变换化为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 又知矩阵 B 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 4E,$$

且 $A^*\alpha = \alpha$, 其中 $\alpha = (1, 1, -1)^T$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 求二次型 $x^T Bx$ 的表达式.

解 由条件知 A 的特征值为 $2, -1, -1$, 则 $|A| = 2$, 因为 A^* 的特征值为 $|A|/\lambda$, 所以 A^* 的特征值为 $1, -2, -2$. 由已知, α 是 A^* 的属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量, 也就是 α 是 A 的属于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量. 由

$$\left(\frac{1}{2}A \right)^* = \left(\frac{1}{2} \right)^2 |A| A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1}$$

得

$$2ABA^{-1} = 2AB + 4E \Rightarrow B = 2(E - A)^{-1},$$

则 B 的特征值为 $-2, 1, 1$, 且 $B\alpha = -2\alpha$. 设 B 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 又 B 是实对称矩阵, α 与 β 正交, 故 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 解出 $\beta_1 = (1, -1, 0)^T$, $\beta_2 = (1, 0, 1)^T$, 令

$$P = (\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 $y = -x^2 + 2x + 3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

- (1) 求 (X, Y) 的联合密度 $f(x, y)$;
- (2) 求 X, Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$;
- (3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$;
- (4) 计算 $\text{Cov}(X, Y)$.

解 (1) 所围区域的面积为

$$S = 2 \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{64}{3},$$

故有

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{64}, & -1 < x < 3, x^2 - 2x - 3 < y < -x^2 + 2x + 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2) X 的边缘密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(-x^2 + 2x + 3), & -1 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Y 的边缘密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{32}\sqrt{4-y}, & 0 < y < 4 \\ \frac{3}{32}\sqrt{4+y}, & -4 < y \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 当 $-1 < x < 3$ 时, 条件密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2(-x^2 + 2x + 3)}, & x^2 - 2x - 3 < y < -x^2 + 2x + 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(4) $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$.

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为

$$f(x; \mu, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x > \mu \\ 0, & x \leq \mu \end{cases}.$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty, 0 < \theta < +\infty$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本.

- (1) 求参数 μ, θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1, \hat{\theta}_1$;
- (2) 求参数 μ, θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2, \hat{\theta}_2$.

解 (1) 总体一阶矩和二阶矩分别为

$$E(X) = \int_{\mu}^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx = \theta + \mu,$$

$$E(X^2) = \int_{\mu}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} dx = 2\theta^2 + \mu^2 + 2\theta\mu = \theta^2 + (\theta + \mu)^2,$$

令

$$\begin{cases} \bar{X} = \theta + \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \theta^2 + (\theta + \mu)^2 \end{cases},$$

$$\text{解得矩估计量 } \hat{\theta}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}, \hat{\mu}_1 = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}.$$

(2) 设 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为对应的样本值, 则似然函数为

$$L(\mu, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}, & x_1, x_2, \dots, x_n > \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > \mu$ 时, $\ln L(\mu, \theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$. 注意到对任意给定的 $\theta > 0$, $L(\mu, \theta)$ 关于 μ 是单调递增的, 但 $x_1, x_2, \dots, x_n > \mu$, 因此当 $\mu = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, L 关于 μ 取最大值. 要求 θ 的最大似然估计值, 令

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0,$$

解得 $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \bar{x} - \mu$, 因此所求最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu}_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_2) = \bar{X} - \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$