

## 2020 年考研数学一模拟卷二

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: \_\_\_\_\_

题号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总分
满分	32	24	94	150
得分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

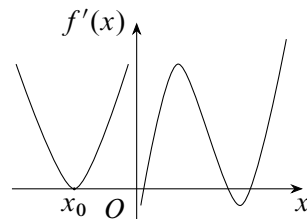
1. 曲线  $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1+x^2}{x}$  ( )
- (A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线                      (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线
- (C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线                      (D) 只有一条斜渐近线

解 首先

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0,$$

因此曲线没有垂直渐近线. 不难得到曲线有一条斜渐近线  $y = x$ , 选 D.

2. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中  $x_0$  处曲线与  $x$  轴相切, 则函数  $f(x)$  与曲线  $y = f(x)$  分别有 ( )
- (A) 4 个极值点和 2 个拐点      (B) 3 个极值点和 2 个拐点
- (C) 4 个极值点和 3 个拐点      (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 2 题图

解 极值点是导函数符号改变的点, 拐点则是导函数图像上单调性改变的点, 选 C.

3. 下列使得闭曲线积分  $\oint_L (x^2y - y) dx - \frac{xy^2}{3} dy$  最大的曲线  $L$  为 ( )
- (A)  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ , 逆时针                      (B)  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ , 顺时针
- (C)  $x^2 + y^2 = 1$ , 逆时针                      (D)  $x^2 + y^2 = 1$ , 顺时针

解 令  $P = x^2y - y$ ,  $Q = -\frac{xy^2}{3}$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2 - \frac{y^2}{3}$ , 则在椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$  内部  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  为正, 在此椭圆之外为负, 利用格林公式可知应当使得曲线为  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$  的逆时针方向, 化为二重积分的被积函数恒为正, 且正的积分区域达到最大, 对应的二重积分也最大, 选 A.

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$  收敛的 ( )
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

解 首先可取  $u_n \equiv 1$ , 则  $u_n - u_{n+1} \equiv 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$  收敛, 因此不是必要条件. 再取  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , 此时  $|u_n - u_{n+1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ , 对应的级数发散, 因此也不是充分条件, 选 D.

5. 设实对称矩阵  $A, B$  具有完全相同的特征向量, 则下列说法正确的是 ( )
- (A)  $A, B$  一定相似 (B)  $A, B$  一定合同  
(C)  $AB = BA$  (D) 如果  $A$  正定, 则  $B$  正定

解 对于选项 A, B, D 可直接取反例  $A = E, B = -E$ , 则所有向量都是  $A, B$  的特征向量, 但二者不相似, 不合同, 正定性也不同. 对于选项 C, 注意到  $A, B$  均为实对称矩阵, 它们一定有  $n$  个线性无关的向量, 也就是存在可逆矩阵  $P$  使得

$$P^{-1}AP = \Lambda_1, P^{-1}BP = \Lambda_2,$$

其中  $\Lambda_1, \Lambda_2$  均为对角阵, 因此

$$AB = P\Lambda_1P^{-1}P\Lambda_2P^{-1} = P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1} = P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1} = P\Lambda_2P^{-1}P\Lambda_1P^{-1} = BA,$$

选 C.

6. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $b$  为  $n$  维列向量, 则下列说法错误的是 ( )
- (A) 如果  $r(A) = m$ , 则方程组  $Ax = b$  一定有解  
(B) 如果  $r(A) = n$ , 则方程组  $Ax = b$  不可能有无穷多解  
(C) 如果  $m = n$ , 则方程组  $A^T Ax = A^T b$  一定有解  
(D) 如果方程组  $Ax = 0$  有非零解, 则方程组  $A^T y = 0$  也有非零解

解 对选项 A, 注意到  $A$  是行满秩的, 增广矩阵  $(A, b)$  的行数为仍  $m$ , 于是

$$m = r(A) \leq r(A, b) \leq m \Rightarrow r(A) = r(A, b) = m,$$

因此  $Ax = b$  一定有解. 对于 B 选项, 如果  $A$  是列满秩, 则  $Ax = b$  要么无解, 要么只有唯一解, 不可能有无穷多解. 对于 C 选项, 利用基本的矩阵秩的等式与不等式可得

$$r(A^T A) \leq r(A^T A, A^T b) = r[A^T(A, b)] \leq r(A^T) = r(A) = r(A^T A),$$

因此不等式中的所有等号均成立, 即  $r(A^T A) = r(A^T A, A^T b)$ , 所以方程组  $A^T Ax = A^T b$  一定有解. D 选项中  $Ax = 0$  有非零解的充要条件是  $r(A) < n$ , 如果  $m < n$ , 则方程组  $A^T y = 0$  的系数矩阵可以是列满秩的, 此时只有零解, 选 D.

7. 设随机事件  $A, B$  满足  $P(A|B) > P(\bar{A}|B)$ , 则下列说法正确的是 ( )

- (A)  $2P(A) > P(B)$       (B)  $2P(\bar{A}) > P(B)$       (C)  $2P(B) > P(A)$       (D)  $2P(\bar{B}) > P(A)$

解 题目条件即等价于  $P(AB) > P(\bar{A}B)$ , 而  $P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B)$ , 因此

$$2P(A) \geq 2P(AB) > P(B),$$

选 A.

8. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P(X=1) = P(X=-1) = P(X=0) = \frac{1}{3}$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 则向量组  $X\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - X\alpha_2$  线性无关的概率为 ( )
- (A) 1      (B)  $\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D) 0

解 注意到  $(X\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - X\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix}$ , 则此向量组线性无关等价于

$$\begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = 1 - X^2 \neq 0,$$

即  $X \neq \pm 1$ , 因此线性无关的概率为  $P(X=0) = \frac{1}{3}$ , 选 C.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线  $y = e^x$  上曲率最大点处的曲率半径为 \_\_\_\_\_.

解 要想曲率最大, 也就是对应的曲率半径最小, 曲线  $y = e^x$  上任一点  $(x, y)$  处的曲率半径为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x} = \left[ \frac{(1 + e^{2x})^3}{e^{2x}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

令  $t = e^{2x} > 0$ ,  $f(t) = \frac{(1+t)^3}{t} = t^2 + 3t + 3 + \frac{1}{t}$ , 则

$$f'(t) = 2t + 3 - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3 + 3t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}.$$

易知  $f(t)$  在  $t = \frac{1}{2}$  处取最小值  $\frac{27}{4}$ , 此时对应的最小曲率半径为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

10. 曲面  $xyz = 2$  上任一点处的切平面与坐标轴的交点以及原点所构成的四面体的体积为 \_\_\_\_\_.

解 设  $(x_0, y_0, z_0)$  为曲面  $xyz = 2$  上任一点, 由于  $\text{grad}(xyz) = (yz, xz, yz)$ , 所以点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的一个法向量为  $(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$ , 此处的切平面方程为

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0.$$

化为截距式即为  $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3$ , 因此切平面在三个坐标轴上的截距分别为  $3x_0, 3y_0, 3z_0$ , 于是所求直角四面体的体积为  $V = \frac{1}{6}|3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0| = \frac{9}{2}|x_0y_0z_0| = 9$ .

11.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4 - \sin 2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4 - \sin 2x} dx \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{4 - \sin(\pi - 2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{4 - \sin(2t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{4 - \sin 2x} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x - \cos x)}{3 + (\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{3 + u^2} = \int_0^1 \frac{du}{3 + u^2} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

12. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  条件收敛, 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x + 1)^n$  的收敛区间为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

解 由条件知幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = -1$  处条件收敛, 幂级数条件收敛的点一定是收敛区间的端点, 这说明这个幂级数的收敛半径为 1. 而幂级数逐项求导以后的收敛半径不变, 也就是幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x + 1)^n = (x + 1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x + 1)^{n-1}$  的收敛半径也是 1, 因此它的收敛区间为  $(-2, 0)$ .

13. 设四阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 且  $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \mathbf{0}$ , 向量  $\beta = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 则方程组  $Ax = \beta$  的通解为  $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \mathbf{0}$  说明齐次线性方程组  $Ax = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)x = \mathbf{0}$  有一个特解为  $(1, 3, 2, 1)^T$ , 且  $r(A) < 4$ . 又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以  $r(A) \geq 3$ , 故  $r(A) = 3$ . 显然  $Ax = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  的一个特解为  $(0, 1, 1, 1)^T$ , 故它的通解为  $(0, 1, 1, 1)^T + k(1, 3, 2, 1)^T, k \in \mathbb{R}$ .

14. 设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_9$  与  $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$  是来自总体  $X$  的独立的简单随机样本, 如果  $k \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_9)^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}$  服从  $F$  分布, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 首先  $X_1 + X_2 + \dots + X_9 \sim N(0, 9\sigma^2)$ , 于是  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_9}{3\sigma} \sim N(0, 1)$ , 而  $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$ , 于是  $\frac{Y_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ , 进一步有  $\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$ , 那么

$$\frac{\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_9}{3\sigma}\right)^2 / 1}{\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}{\sigma^2} / 9} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_9)^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2} \sim F(1, 9),$$

因此  $k = 1$ .

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx.$

解 令  $t = \arctan \sqrt{x-1}$ , 则  $\sqrt{x-1} = \tan t$ ,  $x = \sec^2 t$ ,  $dx = 2 \sec^2 t \tan t$ , 则原积分

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan t \cdot t}{\sec^2 t} \cdot 2 \sec^2 t \tan t dt = 2 \int t \tan^2 t dt = 2 \int (t \sec^2 t - t) dt \\ &= -t^2 + 2 \int t d(\tan t) = -t^2 + 2t \tan t + 2 \ln |\cos t| + C \\ &= -\arctan^2 \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln x + C. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设函数  $z = z(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 变换  $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$  把方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ , 试确定  $a$  的值.

解 由复合函数偏导法则可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{a}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sqrt{y}} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{a}{\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \right), \end{aligned}$$

代入方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (2-a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

于是有  $1 - \frac{a^2}{4} = 0, 2-a \neq 0$ , 所以  $a = -2$ .

17. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  的定义域为  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 1, f(x) > 0$ , 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{x \cos^2 x + \tan x}.$$

试求  $f(x)$  以及  $f(x)$  的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} &= \exp \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + h \cos^2 x) - \ln f(x)}{h} \right) \\ &= \exp \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + h \cos^2 x) - \ln f(x)}{h \cos^2 x} \cos^2 x \right) \\ &= \exp \left( [\ln f(x)]' \cos^2 x \right) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)} \cos^2 x}. \end{aligned}$$

由条件得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cos^2 x = x \cos^2 x + \tan x, \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \tan x \sec^2 x.$$

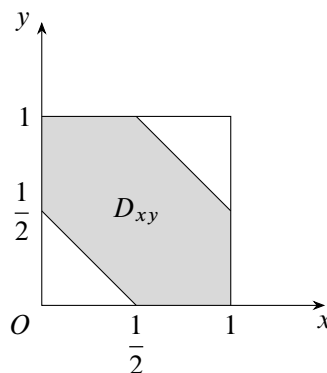
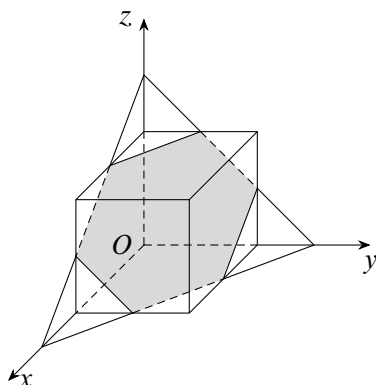
积分可得  $\ln |f(x)| = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |C|$ , 即  $f(x) = C e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \tan^2 x}$ . 由  $f(0) = 1$  得  $C = 1$ , 故  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \tan^2 x}$ . 又  $f'(x) = (x + \tan x \sec^2 x) e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \tan^2 x}$ , 令  $f'(x) = 0$  得  $x = 0$ . 不难得知  $f(x)$  的极小值为  $f(0) = 1$ .

18. (本题满分 10 分)

设空间曲线  $C$  由立方体  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的表面与平面  $x + y + z = \frac{3}{2}$  相截而成, 从  $z$  轴正向往负向看, 方向为逆时针, 试计算曲线积分

$$\oint_C (z^2 - y^2) dx + 2(x^2 - z^2) dy + 3(y^2 - x^2) dz.$$

解 如图, 设曲线  $C$  所围成的平面区域为  $\Sigma$ , 它的法向量为  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ ,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy}$ , 利用斯托克斯公式得原积分



第 18 题图

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - y^2 & 2(x^2 - z^2) & 3(y^2 - x^2) \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} [6y - (-4z) + 2z - (-6x) + 4x - (-2y)] dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (10x + 8y + 6z) dS \end{aligned}$$

由对称性可知  $\iint_{\Sigma} x \, dS = \iint_{\Sigma} y \, dS = \iint_{\Sigma} z \, dS$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{24}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} x \, dS = 8\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3}x \, dx \, dy \\ &= 24 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} x \, dx \int_{\frac{1}{2}-x}^1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \, dx \int_0^{\frac{3}{2}-x} dy \right) \\ &= 9. \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内二阶可导, 且满足  $f(0) = 0, f(1) = 2, \int_0^1 f(x) \, dx = 2$ , 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ;
- (2) 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) = -12$ , 并给出一个满足条件的函数  $f(x)$ .

**证明** (1) 由积分中值定理知存在  $\zeta \in (0, 1)$  使得  $2 = \int_0^1 f(x) \, dx = f(\zeta) = f(1)$ , 再由罗尔定理可知存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'(\xi) = 0$ .

(2) 先构造一个满足题意的二次多项式  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 由

$$\begin{cases} f(0) = c = 0 \\ f(1) = a + b + c = 2 \\ \int_0^1 (ax^2 + bx + c) \, dx = 2 \end{cases}$$

可得  $a = -6, b = 8, c = 0$ , 于是  $f(x) = -6x^2 + 8x$  就是一个满足条件的函数. 令

$$F(x) = f(x) + 6x^2 - 8x,$$

那么  $F(x)$  满足  $F(0) = F(1) = 0, \int_0^1 F(x) \, dx = 0$ , 由积分中值定理知存在  $\theta \in (0, 1)$  使得  $F(\theta) = 0$ , 由罗尔定理知存在  $\eta_1 \in (0, \theta), \eta_2 \in (\theta, 1)$ , 使得  $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$ , 进一步由罗尔定理知存在  $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1)$  使得  $F''(\eta) = f''(\eta) + 12 = 0$ , 即  $f''(\eta) = -12$ .

20. (本题满分 11 分)

$a, b$  取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解? 在有解的情形下, 求出方程组的所有解.

解 首先系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1).$$

当  $b \neq 0, a \neq 1$  时, 方程组有唯一解, 由克拉默法则不难得知解为

$$x_1 = \frac{1-2b}{b(1-a)}, \quad x_2 = \frac{1}{b}, \quad x_3 = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

当  $b = 0$  时, 方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases},$$

此时显然方程组无解. 当  $a = 1$  时, 方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases},$$

这时系数矩阵行列式为零. 对齐增广矩阵进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果  $b = \frac{1}{2}$ , 则  $b-1 = -\frac{1}{2}$ , 可得一般解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (2-k, 2, k), k \in \mathbb{R}.$$

如果  $b \neq \frac{1}{2}$ , 系数矩阵非零的最高阶子式为  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2b-1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 故其秩为 2, 而其增广矩阵有三级非零子式, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

这时, 方程组无解.

21. (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$  通过正交变换化为标准形  $g(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$ .

(1) 求  $a, b$  的值;



- (2) 求出一个满足题意的正交变换;  
 (3) 指出  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  表示何种曲面?

解 (1) 由题意, 二次型的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2b \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix}$  的特征值为 0, 1, 2, 因此

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2b \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4ab - 4b^2 = 0, |E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -a & -1 \\ -a & 0 & -2b \\ -1 & -2b & 0 \end{vmatrix} = -4ab = 0,$$

于是  $a = b = 0$ .

(2) 对特征值  $\lambda_1 = 0$ , 解方程组  $Ax = 0$  得  $\lambda_1$  的一个单位特征向量  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ ; 对特征值  $\lambda_2 = 1$ , 解方程组  $(E - A)x = 0$  得  $\lambda_2$  的一个单位特征向量  $\xi_2 = (0, 1, 0)^T$ ; 对特征值  $\lambda_3 = 2$ , 解方程组  $(2E - A)x = 0$  得  $\lambda_3$  的一个单位特征向量  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$ .

取正交矩阵  $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 则在正交变换  $x = Qy$  下, 原二次型化为标准形  $y_2^2 + 2y_3^2$ .

(3) 注意到二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  即  $y_2^2 + 2y_3^2 = 1$ , 此曲面为椭圆柱面.

22. (本题满分 11 分)

设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

- (1) 记  $Y = \min\{X_2, X_3\}$ , 求  $Y$  的概率密度;  
 (2) 求  $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\})$ .

解 (1) 参数为 1 的指数分布的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $Y$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\min\{X_2, X_3\} \leq y) = 1 - P(\min\{X_2, X_3\} \geq y) \\ &= 1 - P(X_2 \geq y, X_3 \geq y) = 1 - P(X_2 \geq y)P(X_3 \geq y) \\ &= 1 - [1 - F(y)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

因此  $Y$  的概率密度为  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ .

(2)  $\min\{X_1, X_2, X_3\} = \min\{X_1, Y\}$ ,  $X_1$  与  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned} P(X_1 = \min\{X_1, Y\}) &= P(X_1 \leq Y) = \iint_{x \leq y} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} 2e^{-2y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-2x} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

23. 设总体  $X$  服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

其中参数  $\sigma > 0$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其样本.

- (1) 求  $\sigma^2$  的矩估计量  $\hat{\sigma}_1^2$ ;
- (2) 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}_2^2$ , 并计算  $E(\hat{\sigma}_2^2)$ .

解 (1) 样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 总体均值为

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sigma.$$

令  $\bar{X} = E(X)$ , 解得  $\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2$ , 即  $\sigma^2$  的矩估计量为  $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2$ .

(2) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  所对应的样本值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\sigma^{2n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  时,  $\ln L(\sigma^2) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - n \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$ , 令

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

解得  $\sigma^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 即  $\sigma^2$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 且

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{2} E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$