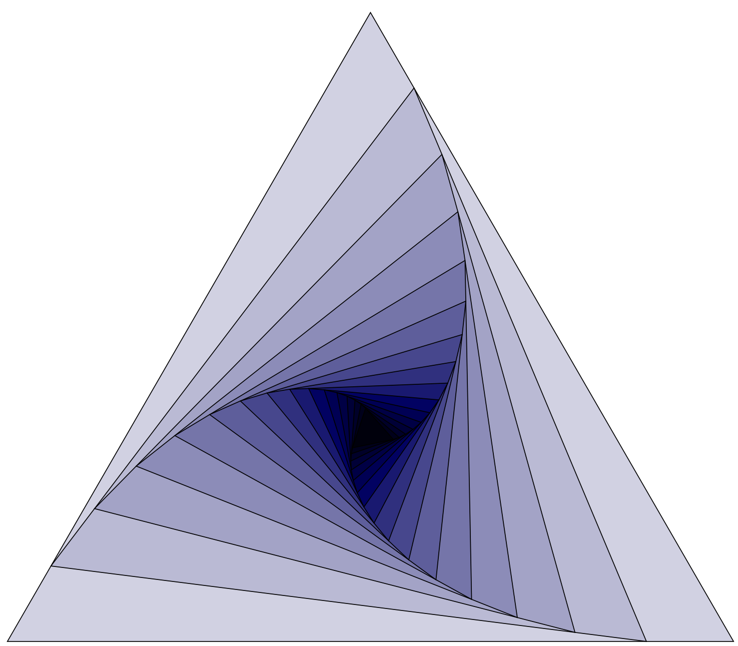
2006-2020 年考研数学三真题解答

向禹 ◎ 著

第一版



yuxtech.github.io

目　次

1 2006 年考研数学一

一 填空题, $1 \sim 6$ 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

解 利用等价无穷小代换得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$

2. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

解 原方程变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x$, 解得 $\ln|y|=\ln|Cx|-\ln \mathrm{e}^x$, 即 $y=Cx\,\mathrm{e}^{-x}$ $(x\neq 0)$, C 为任意常数.

3. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

解 设曲面 $\Sigma_1: z=1\,(x^2+y^2\leqslant 1)$, 取上侧, 则原积分

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad-\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega} 6\,\mathrm{d}V+0=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=2\pi.
\end{aligned}
$$

4. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

解 利用点到平面的距离公式可得所求的距离为

$$
d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\times 2+4\times 1+5\times 0+0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}.
$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 由条件可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|2\boldsymbol{E}| \Rightarrow |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2^2=4,$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$, 所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\left(\max\{X,Y\}\right) \leqslant 1$=________.

解 $P\left(\max\{X,Y\}\right) \leqslant 1 = P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1) = P(X \leqslant 1)P(Y \leqslant 1) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$.

二 选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 ( )

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$ B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$ C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

解 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

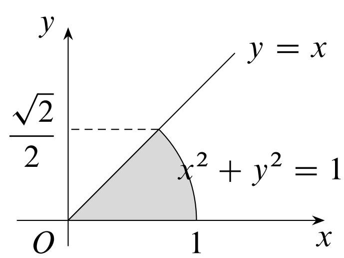
于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>f'(x_0)\Delta x>0, \Delta x>0$, 即 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$, 选 A.

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于 ( )

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ B. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

解 如图, 积分区域是一个 Y 型区域, 则原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 选 C.



第 8 题图

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛 D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

解 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可取反例 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

10.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi_y'(x,y) \neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

解 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0, 则

$$\begin{cases} F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases},$$

那么当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0\neq 0, \varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

注意到 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$, 于是 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 选 D.

11.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

解 注意到 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则

$$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s,$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 选 A.

12.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

解 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1},$$

因此选 B.

13.设 A,B 为随机事件, 且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$, 则必有 ( )

A. $P(A\cup B)>P(A)$ B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$ D. $P(A\cup B)=P(B)$

解 由 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$ 得 $P(AB)=P(B)$, 则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$, 选 C.

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 $P\big(|X-\mu_1|<1\big)>P\big(|Y-\mu_2|<1\big)$, 则必有 ( )

A. $\sigma_1<\sigma_2$ B. $\sigma_1>\sigma_2$ C. $\mu_1<\mu_2$ D. $\mu_1>\mu_2$

解 将 X,Y 标准化, 则 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$, 那么

$$P\big(|X-\mu_1|<1\big)=P\left(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$

$$P\big(|Y-\mu_2|<1\big)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1.$$

因此 $P\big(|X-\mu_1|<1\big)>P\big(|Y-\mu_2|<1\big)\Rightarrow\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1<\sigma_2$, 选 A.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$, 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 于是

$$I=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

16.(本题满分 12 分)

设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解 (1) 因为 $x_2=\sin x_1\in(0,1]$, 那么归纳可知当 $n\geqslant 2$ 时, 均有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 存在. 在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$ 可得 $a=\sin a$, 此方程的唯一解为 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(2) 令 $t=x_n\to 0$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\exp\left(\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}\right) \\
&= \exp\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t-t}{t}+1\right)\right] \\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.
\end{aligned}
$$

17.(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{2}{3(2-x)} - \frac{1}{3(1+x)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+x} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n}+(-1)^{n+1}\right]x^n, \qquad |x|<1.
\end{aligned}
$$

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (1) 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 由复合函数偏导数公式得

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\&=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\\\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 以及 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(2) 令 $f'(u)=p$, 则 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=-\frac{p}{u}$, 解得 $\ln|p|=\ln\left|\frac{C}{u}\right|$, 所以 $f'(u)=p=\frac{C}{u}$. 由 $f'(1)=1$ 知 $C=1$, 于是 $f(u)=\ln u+C_2, u>0$. 再由 $f(1)=0$ 知 $C_2=0$, 于是 $f(u)=\ln u, u>0$.

19.(**本题满分 12 分**)

设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

证 等式 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

令 $t=1$, 则

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y). \tag{$*$}$$

令 $P=yf(x,y), Q=-xf(x,y)$, 由 ($*$) 式得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)-[f(x,y)+yf'_y(x,y)]=0,$$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 因此对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

20.(**本题满分 9 分**)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_2+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

解 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解, 因此 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$, 即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 又显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A)\geqslant 2$, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&a+1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{pmatrix}.$$

由题设和第一问知, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$, 则

$$4-2a=b+4a-5=0\Rightarrow a=2,b=-3.$$

此时 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, $\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

21.(**本题满分 9 分**)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 即有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}, k\neq 0$;

特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}, k_1,k_2$ 不全为零.

(2) 先对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行斯密特正交化,

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22.(本题满分 9 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$, 令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解 (1) Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$. 当 $y\leqslant 0$ 时, $F_Y(y)=0$. 当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\left(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)=P\left(-\sqrt{y}\leqslant X<0\right)+P\left(0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y}.\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 4$ 时, $F_Y(y)=1$, 因此 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(2)

$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2},4\right)&=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant4\right)=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant4\right)\\&=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant2\right)=P\left(-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right)\\&=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

23.(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$,其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

解 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N},$$

取对数得 $\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{N}{n}$, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

2 2007 年考研数学一

一 选择题, 1 ～ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ D. $1-\cos\sqrt{x}$

解 当 $x \to 0^+$ 时,

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x},$$
$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1+1\right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x},$$
$$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

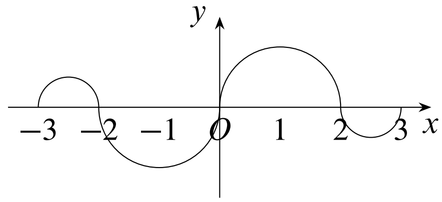
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x) = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1.$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0,\end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y = x$, 选 D.

3. 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3,-2], [2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0], [0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )



第 3 题图

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

解 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2) = \frac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆的面积之差, $F(3) = \frac{1}{2}\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

解 A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0) = 0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则

$$f(0) = 0,\ f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x) = |x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n), n = 1, 2, \cdots$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

解 如果 $u_2 > u_1$, 即 $f(2) > f(1)$, 由于 $f''(x) > 0$, 那么 $f'(x)$ 单调递增, 对任意正整数 n,

$$f(n+2) - f(n+1) = f'(\xi_1) > f'(\xi_2) > f(n+1) - f(n),$$

因此 $f(n)$ 单调递增, 且 $f'(x) > f(2) - f(1), x \geqslant 2$, 那么

$$f(n) - f(2) = f'(\xi)(n-2) > [f(2) - f(1)](n-2),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, 即 $\{u_n\}$ 发散, 选 D. 对于 A 和 B 可分别取 $f(n) = n^2$ 和 $f(n) = \dfrac{1}{n}$ 作为反例.

6. 设曲线 $L: f(x,y) = 1$ ($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第二象限内的点 M 和第四象限内的点 N, Γ 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧, 则下列小于零的是 ( )

A. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s$　　D. $\int_\Gamma f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y$

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + 2\boldsymbol{\alpha}_1$

解 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

解 由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0, 3, 3$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $0, 1, 1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同而不相似, 选 B.

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p\ (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ( )

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$　　C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

解 "第 4 次射击恰好第 2 次命中" 表示第 4 次射击命中目标, 前 3 次中只有 1 次命中目标, 因此所求的概率为 $C_3^1 p^2(1-p)^2 = 3p^2(1-p)^2$, 选 C.

10. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ( )

A. $f_X(x)$ B. $f_Y(y)$ C. $f_X(x)f_Y(y)$ D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

解 因为 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 故 X 与 Y 相互独立, 于是 $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$, 因此选 A.

二 填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11.$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=$________.

解 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$

12.设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

解 由复合函数的偏导数公式得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\cdot y^x\ln y.$

13.二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

解 齐次方程 $y''-4y'+3y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$, 特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$, 因此齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$. 设非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为 $y^*=k\,\mathrm{e}^{2x}$, 代入可得 $k=-2$, 因此原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

14.设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\displaystyle\oiint_\Sigma(x+|y|)\,\mathrm{d}S=$________.

解 曲面关于 yOz 面对称, 因此 $\displaystyle\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=0$. 曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$ 满足轮换对称性, 于是

$$\begin{aligned}\oiint_\Sigma(x+|y|)\,\mathrm{d}S&=\oiint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma|z|\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma|z|\,\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma(|x|+|y|+|z|)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

15.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

解　直接计算可得 $\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 故 $r(\boldsymbol{A}^3)=1$.

16.在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

解　这是一个几何概型, 设 x,y 为所取的两个数, 则样本空间 $\Omega=\{(x,y)|0<x,y<1\}$, 记

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega,|x-y|<\frac{1}{2}\right\}.$$

于是所求概率为 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{3}{4}$, 其中 S_A,S_Ω 分别表示 A 与 Ω 的面积.

三　解答题, 17 ～ 24 题, 共 86 分.

17.(本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

解　在区域 D 内, 令 $\begin{cases}f'_x=2x-2x^2y=0\\f'_y=4y-2x^2y=0\end{cases}$, 得开区域内的可能极值点为 $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$, 其对应的函数值为 $f\left(\pm\sqrt{2},1\right)=2$.

由当 $y=0$ 时, $f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值为 4, 最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4,y>0,-2<x<2$ 时, 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$

解方程组

$$\begin{cases}F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0\\F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0\\F'_\lambda=x^2+y^2-4=0\end{cases}$$

得可能的极值点为 $(0,2)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, 其对应函数的值为 $f(0,2)=8$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$. 比较以上各个函数值, 可知 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 8, 最小值为 0.

18.(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

解 补充曲面 $\Sigma_1: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, z=0$, 取下侧, 则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, D 为平面区域 $x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1$. 由于区域 D 关于 x 轴对称, 因此 $\iint\limits_{D}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. 于是

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)\,\mathrm{d}z=\pi.$$

其中 $D_z: x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1-z$.

19.(**本题满分 11 分**)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 由题意有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\leqslant x_2, x_1, x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}, g(x_2)=M=\max_{x\in[a,b]}g(x).$$

若 $x_1=x_2$, 令 $c=x_1$, 则 $F(c)=0$.

若 $x_1<x_2$, 因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$, 从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得 $F(c)=0$.

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 有 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.(**本题满分 10 分**)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

(1) 证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$;
(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

解 (1) 记 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

代入 $y''-2xy'-4y=0$ 得

$$\begin{aligned}
y''-2xy'-4y&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0.
\end{aligned}$$

因此 $(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n=0$, 即 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$.
(2) 由初值条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 知 $a_0=0, a_1=1$, 那么由递推关系可得

$$a_{2n}=0, a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{1}{n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!}.$$

因此

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=x\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

21.(**本题满分 11 分**)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解 因为方程组 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}. \tag{3}$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变换得

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是当 $a=1$ 时, 有 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$, 方程组 (3) 有解, 此时

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 所以 (1)、(2) 的公共解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbb{R}$.
当 $a=2$ 时, $r(A)=r(\bar{A})=3$, 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 即 (1)、(2) 的公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. $\alpha_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $B=A^5-4A^3+E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 B.

解 (1) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1=A\alpha_1=\alpha_1, A^3\alpha_1=\alpha_1, A^5\alpha_1=\alpha_1$, 故

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5-4A^4+E)\alpha_1 \\ &= A^5\alpha_1-4A^4\alpha_1+\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1. \end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E}$, 及 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 得 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=1,\mu_3=1$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

其基础解系为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征向量为 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}},k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k_1\neq 0,k_2,k_3$ 不全为零.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\0, & 其他\end{cases}.$$

(1) 求 $P(X>2Y)$;

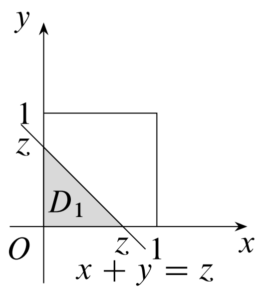
(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 (1) $P(X>2Y)=\displaystyle\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{2y}^{1}(2-x-y)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$.

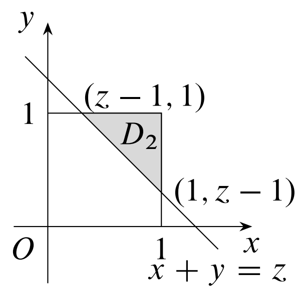
(2) 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$;



$0\leqslant z<1$



$1\leqslant z<2$

当 $0\leqslant z<1$ 时, $F_Z(z)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^z \mathrm{d}y\int_0^{z-y}(2-x-y)\,\mathrm{d}x=z^2-\frac{1}{3}z^3$;

当 $1\leqslant z<2$ 时, $F_Z(z)=1-\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_{z-1}^1 \mathrm{d}y\int_{z-y}^1(2-x-y)\,\mathrm{d}x=$ $1-\frac{1}{3}(2-z)^3$;

当 $z\geqslant 2$ 时, $F_Z(z)=1$. 故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

24.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中参数 θ $(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

解 (1) 总体均值

$$E(X)=\int_0^\theta \frac{x}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta}{4}+\frac{1}{4}(1+\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}.$$

样本均值为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 令 $\bar{X}=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}$, 解得 $\theta=2\bar{X}-\frac{1}{2}$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\bar{X}-\frac{1}{2}$.

(2) $E(4\bar{X}^2)=4E(\bar{X}^2)=4\big[D(\bar{X})+(E\bar{X})^2\big]=4\left[\frac{D(X)}{n}+(EX)^2\right]$, 而

$$E(X^2)=\int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{12}\theta^2-\frac{1}{12}\theta+\frac{5}{48}.$$

故 $E(4\bar{X}^2)=4\left(\frac{D(X)}{n}+(EX)^2\right)=\frac{3n+1}{3n}\theta^2+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+5}{12n}\neq\theta^2$, 所以 $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

3　2008 年考研数学一

一　选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为　(　)

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

   解　求导可得 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)$, 则 $f'(x)$ 的零点只有一个 $x=0$, 选 B.

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于　(　)

   A. $\boldsymbol{i}$　　B. $-\boldsymbol{i}$　　C. $\boldsymbol{j}$　　D. $-\boldsymbol{j}$

   解　直接计算偏导数可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

   于是 $\mathbf{grad}\,f(x,y)\big|_{(0,1)}=f_x'(0,1)\boldsymbol{i}+f_y'(0,1)\boldsymbol{j}=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$, 选 A.

3. 在下列微分方程中, 以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数) 为通解的是　(　)

   A. $y'''+y''-4y'-4y=0$　　B. $y'''+y''+4y'+4y=0$

   C. $y'''-y''-4y'+4y=0$　　D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

   解　从通解形式可知微分方程的特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=\pm 2\,\mathrm{i}$. 因此对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$, 故对应的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$, 选 D.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是　(　)

   A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

   C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   解　对 B 选项, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. A 选项可取反例 $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2+x^2}, & x\geqslant 0\\ -1-\dfrac{1}{2+x^2}, & x<0\end{cases}, x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, C 和 D 选项可取反例 $f(x)=\arctan x, x_n=n$, 选 B.

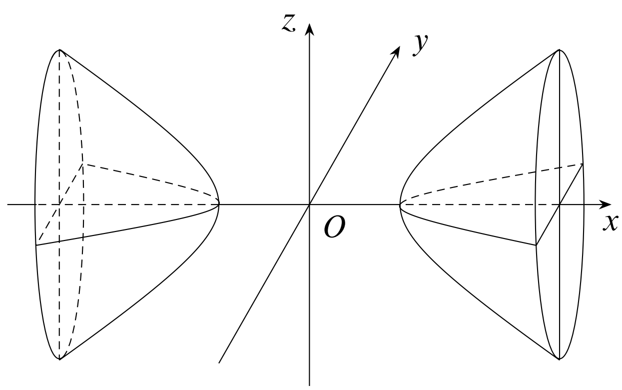
5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则　(　)

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^3=0$, 即 $\lambda=0$. 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 (　　)



第 6 题图

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解 所给曲面是双叶双曲面, 其标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 因此二次型的标准形中, 正的平方项有 1 个, 负的平方项有 2 个, 即正特征值只有 1 个, 选 B.

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 (　　)

A. $F^2(x)$　　B. $F(x)F(y)$

C. $1-[1-F(x)]^2$　　D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

解 由分布函数的定义可得 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(x)&=P(Z\leqslant x)=P\big(\max\{X,Y\}\leqslant x\big)=P(X\leqslant x,Y\leqslant x)\\&=P(X\leqslant x)P(Y\leqslant x)=F(x)F(x)=F^2(x),\end{aligned}$$

选 A.

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则 (　　)

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　B. $P\{Y=2X-1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　D. $P\{Y=2X+1\}=1$

解 由于 X,Y 都服从正态分布, 且 $\rho_{XY}=1$, 所以一定存在常数 a,b 使得 $P(Y=$

$aX+b)=1$, 且 $a>0$. 那么有 $E(Y)=aE(X)+b$, 即 $1=0+b, b=1$. 再由 $4=D(Y)=a^2D(X)=a^2$ 可知 $a=2$, 选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

解 由 $xy'+y=(xy)'=0$ 知 $xy=C$, 代入 $y(1)=1$ 知 $C=1$, 所以方程的解为 $y=\dfrac{1}{x}$.

10. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

解 原方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)(y+xy')+\dfrac{y'-1}{y-x}=1$, 代入 $x=0, y=1$ 得 $y'(0)=1$, 因此曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

11. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

解 由条件知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 在 $x=-2$ 处发散, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2,2]$, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$.

12. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

解 补充曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\ z=0\end{cases}$, 取下侧, 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$, 由 Σ 与 Σ_1 包围的有界区域为 Ω, 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=4\pi.\end{aligned}$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

解 由题意得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$. 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, 则

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$, 因此 A 与 $\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ 相似, A 的非零特征值为 1.

14.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=EX^2\}=$________.

解 因为 $X\sim P(1)$, 所以 $EX=DX=1$, 于是 $EX^2=(EX)^2+DX=2$, $P(X=EX^2)=P(X=2)=\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

三　解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot\sin x}{\sin^4x}=\frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\sin2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$, 其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

解 由条件可得

$$\begin{aligned}\int_L\sin2x\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y&=\int_0^\pi\left[\sin2x+2\left(x^2-1\right)\sin x\cos x\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi x^2\sin2x\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}\cos2x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi x\cos2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解 设 $P(x,y,z)$ 为曲线 C 上任意一点, 则点 P 到 xOy 面的距离为 $|z|$, 即原题化为求 z^2 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$, $x+y+3z=5$ 下的最值点. 令

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

解方程

$$\begin{cases} F_x' = 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 = -2z^2 = 0 \\ F_\mu' = x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

可得 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 或 $(-5, -5, 5)$. 因此曲线 C 上距离 xOy 面最远的点是 $(-5, -5, 5)$, 最近的点是 $(1, 1, 1)$.

18.(**本题满分** 10 **分**)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

证 (1) 对任意的 x, 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x). \end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 令 $g(x) = G(x+2) - G(x) = 2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$g'(x) = 2f(x+2) - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0,$$

因此 $g(x)$ 为常函数, $g(x) = g(0) = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 0$, 即 $G(x+2) = G(x)$, 这说明 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19.(**本题满分** 11 **分**)

将函数 $f(x) = 1 - x^2\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

解 把 $f(x)$ 作偶延拓以后再作周期为 2π 的周期延拓得到的函数是连续的偶函数, 其余弦级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. 对 $n = 1, 2, \cdots$ 有

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (1 - x^2)\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{n\pi}\left[\left(1-x^2\right)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}(\cos nx) \\
&= -\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}
$$

而 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$, 所以 $f(x) = 1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.
令 $x=0$ 得 $f(0) = 1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2} = 1$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

20.(**本题满分 10 分**)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) 秩 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则秩 $r(\boldsymbol{A}) < 2$.

证 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶矩阵, 且 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1, r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1$, 因此 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 2$.

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\beta}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = r\big((1+k^2)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\big) = r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1 < 2$.

21.(**本题满分 12 分**)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$
A = \begin{pmatrix}
2a & 1 & & & & \\
a^2 & 2a & 1 & & & \\
 & a^2 & 2a & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a^2 & 2a & 1 \\
 & & & & a^2 & 2a
\end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 从第 2 行开始, 第 k 行减去上一行的 $\dfrac{k}{k+1}$ 倍, $k=2,3,\cdots,n$, 可得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} \\
&= 2a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{3}a\cdots\frac{n}{n-1}a\cdot\frac{n+1}{n}a=(n+1)a^n.
\end{aligned}
$$

(2) 由克拉默法则知当 $a\neq 0$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a=0$ 时, 容易得到 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n-1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,0\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbb{R}$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X=i)=\dfrac{1}{3}\,(i=-1,0,1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 $P\left(Z\leqslant\dfrac{1}{2}\middle|X=0\right)$;

(2) 求 Z 的概率密度.

解 (1)

$$
\begin{aligned}
P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)&=P\left(X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)\\
&=P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(2) Z 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)\\
&=P(X+Y\leqslant z,X=-1)+P(X+Y\leqslant z,X=0)+P(X+Y\leqslant z,X=1)\\
&=P(Y\leqslant z+1,X=-1)+P(Y\leqslant z,X=0)+P(Y\leqslant z-1,X=1)\\
&=P(Y\leqslant z+1)P(X=-1)+P(Y\leqslant z)P(X=0)+P(Y\leqslant z-1)P(X=1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}[P(Y \leqslant z-1) + P(y \leqslant z) + P(Y \leqslant z-1)] \\
&= \frac{1}{3}[F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)],
\end{aligned}
$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leqslant z \leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$
\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2.
$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT.

解 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E\left(\bar{X}^2\right) - \frac{1}{n}E\left(S^2\right) \\
&= \left(E\bar{X}\right)^2 + D\left(\bar{X}\right) - \frac{1}{n}E\left(S^2\right) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2,
\end{aligned}
$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 由于 $\bar{X}$ 与 S^2 独立, 则有

$$
\begin{aligned}
DT &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = D\left(\bar{X}^2\right) + \frac{1}{n^2}D\left(S^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot 2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

4　2009 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则　(　　)

A. $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　B. $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$　　C. $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　D. $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$

解　首先当 $x \to 0$ 时, $g(x) = x^2 \ln(1 - bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

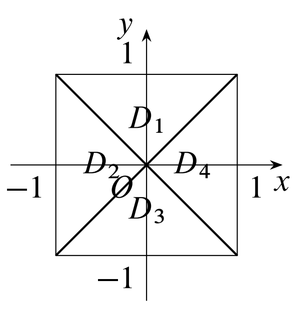
$$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o\big(x^3\big)\right) = (1 - a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o\big(x^3\big),$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $\begin{cases} 1 - a = 0 \\ \dfrac{a^3}{6} = -b \end{cases}$, 因此 $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$, 选 A.

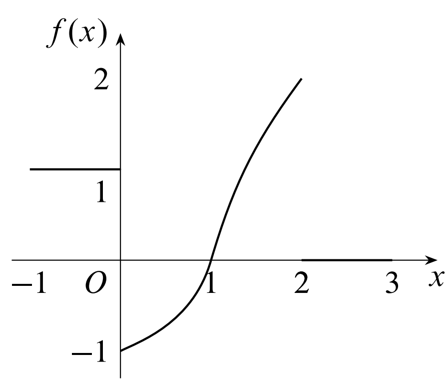
2. 如图所示, 正方形 $\big\{(x, y) \big| |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\big\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint\limits_D y \cos x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 4} I_k =$　(　　)

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4

解　被积函数关于 y 为奇函数, 而 D_2, D_4 关于 x 轴对称, 因此 $I_2 = I_4 = 0$. 当 $(x, y) \in D_1$ 时, $y \cos x > 0$, 当 $(x, y) \in D_3$ 时, $y \cos x < 0$, 因此 $I_1 > 0 > I_3$, 最大的是 I_1, 选 A.

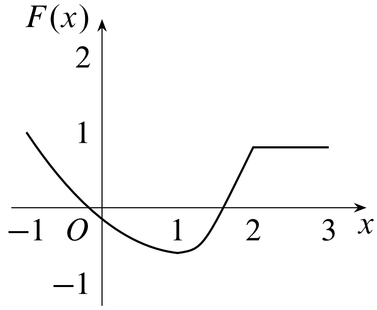


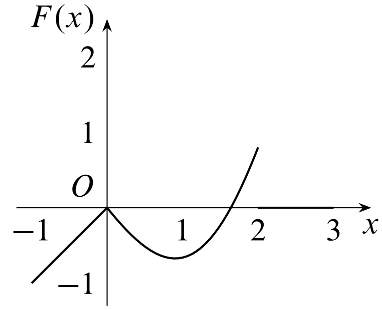
第 2 题图

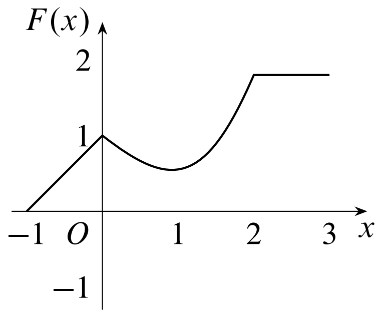


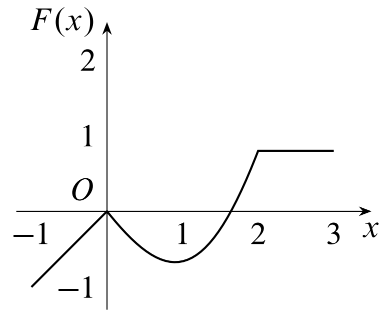
第 3 题图

3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为 (　)

A. 

B. 

C. 

D. 

解　首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$, 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

4. 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则 (　)

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛　　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛　　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

解　A 选项不对, 反例可取 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; B 选项和 D 选项不对, 反例可取 $a_n = 0, b_n = 1$; C 选项是对的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 于是当 n 充分大时 $|a_n| < 1, |b_n| < 1$, 此时 $a_n^2 b_n^2 \leqslant |b_n|$, 由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 选 C.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 (　)

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

解 直接观察可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 因此选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

解 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$ ( )

A. 0 B. 0.3 C. 0.7 D. 1

解 X 的概率密度为 $f(x) = F'(x) = 0.3\varphi(x) + 0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$, 其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 + 0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.7, \end{aligned}$$

选 C.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(XY \leqslant z)\\&= P(Y=0)P(XY \leqslant z|Y=0) + P(Y=1)P(XY \leqslant z|Y=1)\\&= \frac{1}{2}P(0 \leqslant z|Y=0) + \frac{1}{2}P(X \leqslant z|Y=1)\\&= \frac{1}{2}P(0 \leqslant z) + \frac{1}{2}P(X \leqslant z) = \begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z), & z \geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $F_Z(z)$ 在 $z=0$ 处有一个跳跃间断点, 选 B.

二　填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$________.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x,xy) + yf_2'(x,xy)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = xf_{12}''(x,xy) + f_2'(x,xy) + xyf_{22}''(x,xy)$.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

解　由齐次方程的通解形式可知 $\lambda=1$ 是特征方程的二重特征根, 因此齐次方程为 $y''-2y'+y=0$. 设非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 的一个特解为 $y^*=Ax+B$, 代入方程可得 $A=1, B=2$, 于是 $y^*=x+2$, 非齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2$. 由条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 得 $C_1=0, C_2=-1$, 故所求的特解为 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$.

11. 已知曲线 $L: y=x^2\left(0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L x\mathrm{d}s =$________.

解　利用一型曲线积分公式得

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

12. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$________.

解　记 D_z 表示平面 $z=z$ 与区域 Ω 相交所得平面区域, 利用切片法可得原积分

$$I = \int_{-1}^{1} z^2\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \pi z^2\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi.$$

13. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

解 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 2$.

提示: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

14.设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$________.

解 由条件得 $E(\bar{X}) = np, E(S^2) = np(1-p)$, 所以 $E(\bar{X} + kS^2) = np^2$ 可得 $np + knp(1-p) = np^2, k = -1$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$ 的极值.

解 令 $\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x(2+y^2) = 0 \\ f_y'(x,y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点为 $\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})} = 2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right), \\ B &= f_{xy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 4xy\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})} = 0, \\ C &= f_{yy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})} = \mathrm{e}, \end{aligned}$$

所以 $AC - B^2 = -2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) < 0$, 且 $A > 0$, 所以 $f(x,y)$ 的唯一极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

16.(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}(n = 1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

解 曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 所围区域的面积

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

于是

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \ln 2.$$

17.(本题满分 11 分)

设椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(2) 求 S_1 与 S_2 之间立体的体积.

解 (1) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2+z^2}{3} = 1$. 过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线方程为 $y = \pm\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$, 所以 S_2 的方程为 $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$.

(2) 记 $y_1 = \frac{1}{2}x - 2$, 由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 记 $y_2 = \sqrt{3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)}$, 则 S_1 与 S_2 之间立体的体积为

$$V = \int_1^4 \pi y_1^2 \mathrm{d}x - \int_1^2 \pi y_2^2 \mathrm{d}x$$
$$= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right)\mathrm{d}x - \pi \int_1^2 \left(3 - \frac{3}{4}x^2\right)\mathrm{d}x = \pi.$$

18.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta > 0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

证 (1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 则

$$F(b) - F(a) = \left(f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b\right) - \left(f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a\right)$$
$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0,$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xf'(\xi)}{x} = \lim_{\xi\to 0} f'(\xi) = A.$$

提示: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解 记 $P=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, Q=\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, R=\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 则原积分为 $I=\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, 那么利用对称性得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{y^2+z^2-2x^2+x^2+z^2-2y^2+x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0.$$

记曲面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=r^2, r$ 充分小使得 Σ_1 包含在 Σ 内, 方向取外侧. 那么由高斯公式可知

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

记 Σ_1 包围的有界闭区域为 Ω, 则

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\oiint\limits_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{r^3}\oiint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}V=\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4\pi r^3}{3}=4\pi.\end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解 (1) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$, 从而 $\xi_2=(-k,k,1-2k)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数.

$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $x_1=-\frac{1}{2}-u, x_2=u, x_3=v$, 即 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-u,u,v\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 u,v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k,u,v 有

$$|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&-k&-\frac{1}{2}-u\\1&k&u\\-2&1-2k&v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\1&k&u\\-2&1-2k&v\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

因此对任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 恒有 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\big(\lambda-(a+1)\big)\big(\lambda-(a-2)\big),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a, \lambda_2=a+1, \lambda_3=a-2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 说明正惯性指数 $p=2$, 负惯性指数 $q=0$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为两正一零, 显然 $a-2<a<a+1$, 因此必有 $a=2$.

22.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X=1|Z=0)$；

(2) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解 (1) $P(X=1|Z=0)=\dfrac{P(X=1,Z=0)}{P(Z=0)}=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{9}$.

(2) 由题意知 X,Y 的所有可能取值均为 $0,1,2$.

$$
\begin{gathered}
P(X=0,Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4},\quad P(X=0,Y=1)=2\times\frac{2}{6}\times 36=\frac{1}{3},\\
P(X=0,Y=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{9},\quad P(X=1,Y=0)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6},\\
P(X=1,Y=1)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9},\quad P(X=2,Y=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36},\\
P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=1)=P(X=2,Y=2)=0.
\end{gathered}
$$

因此 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, 其中参数 $\lambda\,(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量；

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

解 (1) 总体均值 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}$, 令 $\bar{X}=E(X)$, 即 $\bar{X}=\dfrac{2}{\lambda}$, 得 $\lambda=\dfrac{2}{\bar{X}}$, 即 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1=\dfrac{2}{\bar{X}}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$
L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i}\prod\limits_{i=1}^n x_i, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & 其他\end{cases},
$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时, 取对数得 $\ln L = 2n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$, 由 $\frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ 得 $\lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{2}{\overline{x}}$, 即 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2 = \frac{2}{\overline{X}}$.

5　2010 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x =$ (　)

A. 1　　B. e　　C. e^{a-b}　　D. e^{b-a}

解　先取倒数和对数得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{(x-a)(x+b)}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x^2+(b-a)x-ab}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{(b-a)x-ab}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\frac{(b-a)x-ab}{x^2}\\ &= b-a,\end{aligned}$$

因此原极限为 e^{a-b}, 选 C.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　)

A. x　　B. z　　C. $-x$　　D. $-z$

解　方程两边分别关于 x 和 y 求偏导得 $\begin{cases}F_1'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\\ F_1'\cdot\dfrac{1}{x}+F_2'\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$, 于是解得 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yF_1'}{xF_2'}+\dfrac{z}{x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}\end{cases}$, 因此 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, 选 B.

3. 设 m,n 是正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性 (　)

A. 仅与 m 的取值有关　　B. 仅与 n 的取值有关

C. 与 m,n 的取值都有关　　D. 与 m,n 的取值都无关

解 任取 $c\in(0,1)$, 原反常积分 $I=\int_0^c\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_c^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$. 对 I_1 而言, $x=0$ 是瑕点, 当 $x\to0^+$ 时, $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 而 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$, 所以 $\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 由比较判别法知 I_1 收敛.

对 I_2 而言, $x=1$ 是瑕点, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$, 积分 $\int_c^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 于是 I_2 收敛, 所以原积分 I 收敛, 与 m,n 的取值都无关, 选 D.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

A. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$ B. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$ D. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\\&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 ( )

A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$ B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$ D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

解 由题意有 $m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=m\leqslant n$, 同理 $r(\boldsymbol{B})=m\leqslant n$, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2+\lambda=0$, 则 $\lambda=0$ 或 -1. 又 $r(\boldsymbol{A})=3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,-1,0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则它相似于 $\operatorname{diag}\{-1,-1,-1,0\}$, 选 D.

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $P(X=1)=$ ( )

A. 0 B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$ D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

解 $P(X=1)=F(1)-F(1^-)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$, 选 C.

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度, 则 a,b 应满足 ( )

A. $2a+3b=4$ B. $3a+2b=4$ C. $a+b=1$ D. $a+b=2$

解 $f(x)$ 需要满足 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_0^3 f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1$, 即 $2a+3b=4$, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\\ y=\displaystyle\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

解 利用参数方程求导公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\ln\left(1+t^2\right)}{-\mathrm{e}^{-t}}=-\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\mathrm{e}^t\frac{2t}{1+t^2}+\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)\right)\mathrm{e}^t,$$

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

10. $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi}t^2\cos t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}(\sin t)\\ &= -2\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t = -\pi\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = -4\pi.\end{aligned}$$

11.已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\big(x\in[-1,1]\big)$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$________.

解 L 可分为两段 l_1 和 l_2, 其中 $l_1: y=1+x, x:-1\to 0, l_2: y=1-x, x:0\to 1$, 故

$$\begin{aligned}I &= \left(\int_{l_1}+\int_{l_2}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_{-1}^{0}\big[x(1+x)+x^2\big]\mathrm{d}x+\int_0^1\big[x(1-x)-x^2\big]\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0}\big(2x^2+x\big)\mathrm{d}x+\int_0^1\big(x-2x^2\big)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

12.设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$________.

解 利用切片法可得

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$, 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a=$________.

解 由条件知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$, 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此 $a=6$.

14.设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!}, k=0,1,2,\cdots$, 则 $E(X^2)=$________.

解 根据概率分布的归一性得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{C}{k!}=C\mathrm{e}=1$, 所以 $C=\mathrm{e}^{-1}$, 则 $X\sim P(1), E(X^2)=(EX)^2+D(X)=2$.

三　解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

解　齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2\lambda=0$, 特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$, 齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$. 非齐次项 $2x\mathrm{e}^x$ 的特解形式可设为 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x$, 于是 $(y^*)'=\big[ax^2+(2a+b)x+b\big]\mathrm{e}^x, (y^*)''=\big[ax^2+(4a+b)x+2(a+b)\big]\mathrm{e}^x$, 代入原方程并约去 e^x 可得

$$\big[ax^2+(4a+b)x+2(a+b)\big]-3\big[ax^2+(2a+b)x+b\big]+2\big(ax^2+bx\big)=2x,$$

即 $-2ax+2a-b=2x$, 故 $a=-1,b=-2$, 所以 $y^*=-(x^2+2x)\mathrm{e}^x$, 原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-(x^2+2x)\mathrm{e}^x$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

解　$f(x)=x^2\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,\ f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. 分析 $f'(x)$ 的零点及正负可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$, 极小值为 $f(-1)=f(1)=0$, 极大值为 $f(0)=\displaystyle\int_1^0(0-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\big(1-\mathrm{e}^{-1}\big)$.

17.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n=\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解　(1) 当 $0<t<1$ 时, $0<\ln(1+t)<t$, 所以 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n<t^n|\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0<t<1$ 时, $0<\displaystyle\int_0^1|\ln t\ln^n(1+t)|\mathrm{d}t<\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$. 由分部积分得

$$\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0<u_n<\dfrac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解　令 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=x^2<1$ 得 $-1<x<$

1, 因此幂级数收敛半径为 1. 当 $x=\pm1$ 时, 根据莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$. 当 $x\in(-1,1)$ 时, 和函数

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right) \\ &= x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\cdot\arctan x. \end{aligned}$$

由幂级数在收敛域内的连续性知 $S(-1)=S(1)=\lim\limits_{x\to1^+}S(x)$, 因此 $S(x)=x\arctan x, x\in[-1,1]$.

19.(**本题满分 10 分**)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C, 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解 $P(x,y,z)$ 是曲面 S 上任一点, S 在 P 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x,2y-z,2z-y)$, 而 xOy 面的法向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 由题意知 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$, 于是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=2z-y=0$, 于是 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ y=2z\end{cases}$.

记 xOy 面的平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant1\right\}$, 曲面 Σ 可表示为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, 在方程 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两边求全微分得 $2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=0$, 因此 $\mathrm{d}z=\dfrac{2x\mathrm{d}x+(2y-z)\mathrm{d}y}{y-2z}$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-z}{y-2z}$, 那么曲面 Σ 的面微元为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

则将曲面积分化为二重积分可得

$$I=\iint_D\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left(x+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi.$$

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

解 (1) 因为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有两个不同的解, 所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) < 3$, 于是

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 当 $\lambda = 1$ 时, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$, 方程组无解, 因此 $\lambda = 1$ 舍去. 当 $\lambda = -1$ 时, 对 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix},$$

因为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 所以 $a = -2$.

(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时, $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}} + k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 二次型 f 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 1, 0, 于是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}\{1,1,0\}$, 且矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列就是

属于特征值 0 的特征向量. 设 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则 $x_1 + x_3 = 0$, 解得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量, 于是可取 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 此时有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{1, 1, 0\}$, 于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 1, 0$, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $2, 2, 1$, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y-x)^2-x^2}\mathrm{d}y = A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y = A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}, \end{aligned}$$

于是 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = A\pi \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1,a_2,a_3, 使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

解 由题意可知 $N_1 \sim B(n,1-\theta), N_2 \sim B(n,\theta-\theta^2), N_3 \sim B(n,\theta^2)$. 因为 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量, 所以 $E(T)=\theta$, 即

$$E(T)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)=a_1n(1-\theta)+a_2n\big(\theta-\theta^2\big)+a_3n\theta^2=\theta,$$

解得 $a_1=0, a_2=a_3=\dfrac{1}{n}$. 由于 $N_1+N_2+N_3=n$, 所以 $T=\dfrac{N_2+N_3}{2}=\dfrac{n-N_1}{n}$, 则

$$D(T)=D\left(1-\frac{N_1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(N_1)=\frac{1}{n^2}n(1-\theta)\theta=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

6 2011 年考研数学一

一 选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ( )

A. $(1,0)$ B. $(2,0)$ C. $(3,0)$ D. $(4,0)$

解 首先可知 $1,2,3,4$ 分别是 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一、二、三、四重根, 不难得知 $y'(1)\neq 0, y'(2)=y'(3)=y'(4)=0, y''(2)\neq 0, y''(3)=y''(4)=0, y'''(3)\neq 0, y'''(4)=0, y''''(4)\neq 0$, 因此唯一的拐点是 $(3,0)$, 选 C.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n=1,2,\cdots)$ 无界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ( )

A. $(-1,1]$ B. $[-1,1)$ C. $[0,2)$ D. $(0,2]$

解 由题意知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处发散. 由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛, 即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 那么这两个点就是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间的端点, 因此它的收敛域为 $[-1,1)$, 从而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$, 选 C.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0, f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0)>1, f''(0)>0$ B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$ D. $f(0)<1, f''(0)<0$

解 由 $z=f(x)\ln f(y)$ 可知 $z'_x=f'(x)\ln f(y), z'_y=\dfrac{f(x)}{f(y)}, z''_{xx}=f''(x)\ln f(y), z''_{xy}=\dfrac{f'(x)}{f(y)}f'(y), z''_{yy}=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-f'^2(y)}{f^2(y)}$. 在点 $(0,0)$ 处, $z''_{xx}=f''(0)\ln f(0), z''_{xy}=$

$0, z''_{yy} = f''(0)$. 由二元函数极小值的充分条件, 需要满足 $f''(0)\ln f(0) > 0$, $f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0) > 0$, 因此 $f(0) > 1$, $f''(0) > 0$, 选 C.

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x \mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x \mathrm{d}x$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x \mathrm{d}x$, 则 I, J, K 的大小关系是 ( )

A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

解 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$, 选 D.

6. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

解 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个向量 $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = 3$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$, 所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$. 再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中有三个线性无关的向量, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是线性无关的, 选 D.

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )

A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_2(x)F_1(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

解 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度, 其他都不满足, 选 D.

提示: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x)$, $2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在. 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$ ( )

A. $E(U)\cdot E(V)$ B. $E(X)\cdot E(Y)$ C. $E(U)\cdot E(Y)$ D. $E(X)\cdot E(V)$

解 由于 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 所以 $UV = XY$, 再根据独立性得 $E(UV) = E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, 选 B.

二 填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = \int_0^x \tan t \, \mathrm{d}t \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = $________.

解 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + y'^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, \mathrm{d}x = \ln(\sec x + \tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

10.微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$________.

解 由条件得 $\mathrm{e}^x(y' + y) = (y\mathrm{e}^x)' = \cos x$, 于是 $y\mathrm{e}^x = \sin x + C$. 由 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$, 因此 $y\mathrm{e}^x = \sin x, y = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.

11.设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1 + t^2} \mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}} =$________.

解 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1 + x^2 y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} = \frac{y^2 \cos xy \cdot \left(1 + x^2 y^2\right) - 2xy^3 \sin xy}{(1 + x^2 y^2)^2}$, 因此 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}} = 4$.

12.设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z =$________.

解 曲线 L 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t + \sin t, t : 0 \to 2\pi$, 因此

$$\begin{aligned} &\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z \\ =& \int_0^{2\pi} \left(\cos t(\cos t + \sin t)(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \frac{\sin^2 t}{2}(\cos t - \sin t)\right)\mathrm{d}t \\ =& \int_0^{2\pi} \left(-\sin t \cos^2 t - \frac{\sin^2 t \cos t}{2} + \cos^2 t - \frac{\sin^3 t}{2}\right)\mathrm{d}t = \pi. \end{aligned}$$

13.若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2 = 4$, 则 $a =$________.

解 由题意知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -(a-1)^2 = 0, a = 1$.

14.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E(XY^2)=$________.

解 由条件知 X,Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 于是 $E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu\big((EX)^2+D(X)\big)=\mu(\mu^2+\sigma^2)=\mu^3+\mu\sigma^2$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 先取对数得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1+1\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

16.(本题满分 9 分)

设函数 $z=f\big(xy,yg(x)\big)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\big(xy,yg(x)\big)\cdot y+f_2'\big(xy,yg(x)\big)\cdot g'(x)\cdot y$, 所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y)$. 故

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}&=\left.\frac{d}{dy}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}=\left.\frac{d}{dy}\left[yf_1'(y,y)\right]\right|_{y=1}\\&=\left.\left[f_1'(y,y)+y\big(f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)\big)\right]\right|_{y=1}\\&=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解 令 $f(x)=k\arctan x-x$, 则 $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{k}{1+x^2}-1=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$. 则

- $k\leqslant 1$ 时, $f'(x)\leqslant 0$ (且等号至多在一个点处成立), 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减, 此时 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点, 方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根.

• $k>1$ 时, 由 $f(x)$ 为偶函数, 先考虑 $x>0$ 的情形. 此时 $f'(x)\begin{cases}>0, & 0<x<\sqrt{k-1}\\ <0, & x>\sqrt{k-1}\end{cases}$, 且 $f(0)=0$, $f\left(\sqrt{k-1}\right)>0$, $f(+\infty)=-\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{k-1},+\infty\right)$ 内有一个零点 x_0, 于是 $f(-x_0)=-f(x_0)=0$, 故此时方程 $k\arctan x-x=0$ 有三个实根.

18.(**本题满分 10 分**)

(1) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 (1) 由拉格朗日中值定理得 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\dfrac{1}{\xi}\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$, 其中 $\xi\in(n,n+1)$, 得证.

(2) 首先有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\&=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,\end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 再将不等式 $\dfrac{1}{k}>\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$ 对 k 从 1 到 n 求和得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)>\ln n$, 因此 $a_n>0$. 根据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19.(**本题满分 11 分**)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 由 $f(1,y)=f(x,1)=0$ 知 $f'_y(1,y)=f'_x(x,1)=0$, 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xy\mathrm{d}\big(f'_y(x,y)\big)=\int_0^1\left(xyf'_y(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(yf'_y(1,y)-\int_0^1 yf'_y(x,1)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}(f(x,y))\end{aligned}$$

$$= -\int_0^1 \left(yf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a.$$

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (1) 首先有 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示等价于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, 于是 $|\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a - 5 = 0$, 所以 $a = 5$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由条件知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且

它对应的特征向量为 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, k_1 \neq 0$；1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}, k_2 \neq 0$. 再由 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 知 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$,
解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}, k_3 \neq 0$.

(2) 令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$.

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布；

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解 (1) 由于 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 所以 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$, 即 $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$, 于是

$$
\begin{aligned}
P(X = 1, Y = 1) &= P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{3}, \\
P(X = 1, Y = -1) &= P(Y = -1) - P(X = 0, Y = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{3}, \\
P(X = 0, Y = 0) &= P(Y = 0) - P(X = 1, Y = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

因此二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $Z=XY$ 取值只有 $-1,0,1$, 且由 (X,Y) 的概率分布不难得到 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) $E(X)=\frac{2}{3}, E(Y)=0, E(XY)=0, \operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, 因此 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0$.

23.(**本题满分 11 分**)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2>0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(1) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

解 (1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2},$$

取对数得 $\ln L\left(\sigma^2\right)=\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$$

解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$, 故 σ^2 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(2) 首先有 $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$, 所以 $E(\hat{\sigma}^2)=\frac{\sigma^2}{n}E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2$, $D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}$.

7　2012 年考研数学一

一　选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为　　(　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$, 所以直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$, 所以 $x=1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x=-1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$　　(　)

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

解　利用导数的定义得

$$
\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}\big[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\big)=(-1)^{n-1}(n-1)!,
\end{aligned}
$$

选 A.

3. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是　　(　)

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

解　正确的选项是 B, 因为极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 由连续性可知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)=0$, 且在 $(0,0)$ 的邻域内有 $f(x,y)=f(0,0)+0\cdot x+0\cdot y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$,

因此由可微的定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. A 选项可取反例 $f(x)=|x|+|y|$, C 和 D 选项可取反例 $f(x,y)=1$, 因此选 B.

4. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\,(k=1,2,3)$, 则有 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_3<I_2<I_1$ C. $I_2<I_3<I_1$ D. $I_2<I_1<I_3$

解

$$
\begin{aligned}
I_2&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x<I_1,\\
I_3&=\int_0^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=I_1+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi-t)^2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin t\,\mathrm{d}t\\
&=I_1+\int_0^{\pi}\left[\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}-\mathrm{e}^{(2\pi-t)^2}\right]\sin t\,\mathrm{d}t>I_1.
\end{aligned}
$$

选 D.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解 显然可得 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性相关, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ ( )

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P(X<Y)=$ ( )

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

解 由条件可知 X 与 Y 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-x-4y}, & x>0,y>0\\0, & \text{其他}\end{cases}$,

所以

$$P(X<Y)=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-4y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{5},$$

选 A.

8. 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ( )

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -1

解 设截成的两段长分别为 X 和 Y, 则 $Y=1-X$, 因此 X 与 Y 存在线性关系, 且为负相关, 因此 $\rho_{XY}=-1$, 选 D.

二　填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$, 则 $f(x)=$ ________.

解 微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$, 故方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$, $f''(x)=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $2C_1\mathrm{e}^x+5C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^x$, 所以 $C_1=1,C_2=0$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

11. $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$________.

解 令 $f(x,y,z)=xy+\frac{z}{y}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}=y,\frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2},\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{y}$, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)}=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)}=1,\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(2,1,1)}=1$, 因此 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

12. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$________.

解 记 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}y^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

解 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},0,0$, 即 $1,0,0$. 则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 也可以对角化, 且它的特征值为 $0,1,1$, 因此 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2$.

14. 设 A,B,C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$________.

解 由 A 与 C 互不相容可知 $P(AC)=P(ABC)=0$, 于是

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{1/2}{1-1/3}=\frac{3}{4}.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

证 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x) \geqslant 0, x \in [0,1)$ 即可. 首先有 $f'(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0,1)$, 且 $\ln\dfrac{1+x}{1-x} > 0, \dfrac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$, 因此 $f'(x) > 0, x \in (0,1)$. 而 $f(0) = 0$, 则有 $f(x) \geqslant 0, x \in [0,1)$, 证毕.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} f_x'(x,y) = (1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f_y'(x,y) = -xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases}$ 解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$. 记

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}''(x,y) = x\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \\ B &= f_{xy}''(x,y) = y\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \\ C &= f_{yy}''(x,y) = x\left(y^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \end{aligned}$$

在驻点 $(1,0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2\mathrm{e}^{-1} > 0, A = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < 0$, 所以 $f(1,0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值. 在驻点 $(-1,0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2\mathrm{e}^{-1} > 0, A = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > 0$, 所以 $f(-1,0) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值.

17.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 令 $u_n = \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}, \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$, 因此原幂级数的收敛半径 $R = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ 发散, 因此原幂级数收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ 时, 和函数为

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2+2}{2n+1} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' + \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' + \frac{2}{x}\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

而 $S(0) = 3$, 因此 $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 3, & x = 0 \end{cases}$.

18.(本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \left(0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) =$

$0, f'(t) > 0\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

解 由参数方程求导公式知 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\sin t}{f'(t)}$, 因此曲线 L 上任一点 $(x, y) = \big(f(t), \cos t\big)$ 处的切线方程为 $Y - \cos t = -\dfrac{\sin t}{f'(t)}\big(X - f(t)\big)$. 令 $Y = 0$, 得此切线与 x 轴交点的横坐标为 $X = f'(t)\cot t + f(t)$, 由题意得 $\big(f'(t)\cot t\big)^2 + \cos^2 t = 1$. 又 $f'(t) > 0$, 所以 $f'(t) = \sec t - \cot t$, 从而 $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + C$. 再由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$. 以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积为

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\sec t - \cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

19.(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2+y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \oint_L 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y$.

解 取有向线段 L_1 的方程为 $x = 0$, 起点为 $(0,2)$, 终点为 $(0,0)$. 由 L 与 L_1 围成的平面区域记为 D, 则

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y \\
&= \oint_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y - \oint_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3 + x - 2y)\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_2^0 (-2y)\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4 = \frac{\pi}{2} - 4.
\end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{pmatrix}.$$

由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解当且仅当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) < 4$, 因此 $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$, 此时方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = (0, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + k(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

21.(**本题满分** 11 **分**)

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

解 (1) 因为 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = 2$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $a = -1$.

(2) 由 $a=-1$ 可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$, 故矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 原二次型化为标准形 $f=2y_2^2+6y_3^2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X=2Y)$

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

解 (1) 由 (X,Y) 的概率分布知 $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}$.

(2) 由 (X,Y) 的概率分布知 X,Y,XY 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},XY\sim\begin{pmatrix}0&1&4\\\frac{7}{12}&\frac{1}{3}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

所以 $E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=1,E(Y^2)=\frac{5}{3},D(Y)=\frac{2}{3},E(XY)=\frac{2}{3}$, 于是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,\mathrm{Cov}(X-Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\frac{2}{3}$.

23.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

解 (1) 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$, 且 X,Y 相互独立知 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$, 因此 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty<z<+\infty$.

(2) 设样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\left(6\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2},$$

取对数得 $\ln L\left(\sigma^2\right)=-\dfrac{n}{2}\ln\left(6\pi\sigma^2\right)-\dfrac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$, 令 $\dfrac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{6\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=0$ 得 $\sigma^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(3) 因为 $E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\left(Z_i^2\right)=\dfrac{1}{3}E\left(Z^2\right)=\dfrac{1}{3}D(Z)=\sigma^2$, 所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

8　2013 年考研数学一

一　选择题, $1\sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数, 且 $c\neq 0$, 则　(　)

   A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

   解　利用等价无穷小可知当 $x\to 0$ 时, $x-\arctan x\sim\dfrac{1}{3}x^3$, 由题意就有 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为　(　)

   A. $x-y+z=-2$　B. $x+y+z=0$

   C. $x-2y+z=-3$　D. $x-y-z=0$

   解　记 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$, 则

   $$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=2x-y\sin xy+1,\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=-x\sin xy+z,\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}=y,$$

   因为 $\dfrac{\partial F(0,1,-1)}{\partial x}=1,\dfrac{\partial F(0,1,-1)}{\partial y}=-1,\dfrac{\partial F(0,1,-1)}{\partial z}=1$, 所以曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $x-(y-1)+z=1$, 即 $x-y+z=-2$, 选 A.

3. 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|,b_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$, 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$　(　)

   A. $\dfrac{3}{4}$　B. $\dfrac{1}{4}$　C. $-\dfrac{1}{4}$　D. $-\dfrac{3}{4}$

   解　由题意可知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 作周期为 2 的奇延拓得到的函数所对应的傅里叶级数, 因此 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$, 选 C.

4. 设 $L_1:x^2+y^2=1,L_2:x^2+y^2=2,L_3:x^2+2y^2=2,L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记

   $$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y(i=1,2,3,4),$$

   则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$　(　)

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4

解 设 L_i 所包围的有限区域为 $D_i(i=1,2,3,4)$, 首先由格林公式可得

$$\begin{aligned}I_i&=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_i}\left[(2-x^2)-\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_i}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

被积函数取非负值得最大区域为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}\leqslant 1$, 刚好就是区域 D_4, 因此 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=I_4$, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则　　(　)

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解 对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为　　(　)

A. $a=0,b=2$　　B. $a=0,b$ 为任意常数

C. $a=2,b=0$　　D. $a=2,b$ 为任意常数

解 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2,b,0$, 而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\big((\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\big)$, 因此当且仅当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量, 且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2),p_i=P(-2\leqslant X_i\leqslant 2)\,(i=1,2,3)$, 则　　(　)

A. $p_1>p_2>p_3$　　B. $p_2>p_1>p_3$　　C. $p_3>p_1>p_2$　　D. $p_1>p_3>p_2$

解 利用正态分布的性质可得

$$p_1=\varPhi(2)-\varPhi(-2)=2\varPhi(2)-1,$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1,$$
$$p_3 = \Phi\left(\frac{2-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right) = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到 $p_1 > p_2 > p_3$, 选 A.

8. 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 α $(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P(X > c) = \alpha$, 则 $P(Y > c^2) =$ ( )

A. α B. $1-\alpha$ C. 2α D. $1-2\alpha$

解 由 $X \sim t(n)$ 可知 $X^2 \sim F(1,n)$, 因此

$$P\left(Y > c^2\right) = P\left(X^2 > c^2\right) = P(X > c) + P(X < -c) = 2a,$$

选 C.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] =$________.

解 由 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 可知当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 等式两边关于 x 求导得 $y - 1 = \mathrm{e}^{x(1-y)}\left(1 - y - xy'\right)$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = f'(0) = 1$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1.$$

10.已知 $y_1 = \mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x}, y_2 = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{2x}, y_3 = -x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$________.

解 因为 $y_1 - y_3 = \mathrm{e}^{3x}, y_2 - y_3 = \mathrm{e}^{x}$ 是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且 e^{3x} 与 e^{x} 线性无关. 又因为 $y_3 = -x\mathrm{e}^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x}$.

11.设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$________.

解 由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = t, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos t},$$

因此 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

12.$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

解

$$\begin{aligned}\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x&=-\int_{1}^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)\\&=-\frac{\ln x}{1+x}\bigg|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}\\&=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\bigg|_{1}^{+\infty}=\ln 2.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 由 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$ 可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 -1. 又 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14.设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P(Y\leqslant a+1|Y>a)=$________.

解 Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\0, & y\leqslant 0\end{cases}$, 由条件概率公式得

$$\begin{aligned}P(Y\leqslant a+1|Y>a)&=\frac{P(a<Y\leqslant a+1)}{P(Y>a)}\\&=\frac{F(a+1)-F(a)}{1-F(a)}=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-(a+1)}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $\displaystyle f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

解 方法一 由条件有 $f(1)=0$, $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 利用分部积分得

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}(\sqrt{x})=-2\int_{0}^{1}\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x\\&=-2\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}(\sqrt{x})\\&=-4\ln 2+4\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x=8\int_{0}^{1}\frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u-4\ln 2\end{aligned}$$

$$= 8 - 2\pi - 4\ln 2.$$

方法二　利用二重积分交换次序得

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}t$$
$$= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 8 - 2\pi - 4\ln 2.$$

16.(**本题满分 10 分**)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geqslant 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

解　(1) 由 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 得 $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, 结合条件 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$ 可得

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),$$

即 $S''(x) - S(x) = 0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的通解为 $S(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$. 由初值条件 $S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1$ 得 $C_1 + C_2 = 3, C_1 - C_2 = 1$, 所以 $C_1 = 2, C_2 = 1, S(x) = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

17.(**本题满分 10 分**)

求函数 $f(x,y) = \left(y + \dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

解　由 $\begin{cases} f_x'(x,y) = \left(x^2 + y + \dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y} = 0 \\ f_y'(x,y) = \left(1 + y + \dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y} = 0 \end{cases}$ 得驻点 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$. 进一步可得

$$f_{xx}''(x,y) = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$
$$f_{xy}''(x,y) = \left(1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$
$$f_{yy}''(x,y) = \left(2 + y + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}.$$

在驻点 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 处,

$$A=f''_{xx}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},B=f''_{xy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},C=f''_{yy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}.$$

此时 $AC-B^2<0$, 因此 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 不是极值点. 在驻点 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 处,

$$A=f''_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},B=f''_{xy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},C=f''_{yy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

此时 $A>0$ 且 $AC-B^2>0$, 因此 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 是极小值点, 且极小值为 $f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

18.(**本题满分 10 分**)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$, 即 $f'(\xi)=1$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法一 令 $G(x)=f(x)+f'(x)-x$, 则

$$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1),$$
$$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1.$$

由罗尔定理知存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

方法二 令 $H(x)=\mathrm{e}^x\big(f'(x)-1\big)$, 由 (1) 可知 $f'(\xi)=f'(-\xi)=1$, 因此 $H(\xi)=H(-\xi)=0$, 由罗尔定理知存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使得 $H'(\eta)=\mathrm{e}^{\eta}\big(f''(\eta)+f'(\eta)-1\big)=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(**本题满分 10 分**)

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(1) 求曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心坐标.

解 (1) 直线 L 的方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$, 写成参数方程即 $x=1+t,y=-t,z=-t$. 曲面 Σ 是 L 绕 z 轴旋转而成, 设 (x,y,z) 为曲面 Σ 上的任意点, 则 $x^2+y^2=(1+t)^2+t^2,z=-t$, 所以曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$.

(2) 设 Ω 的形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 由对称性得 $\overline{x}=\overline{y}=0$. 用平面 $z=z$ 截区域 Ω 所得的截面为 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1\}$, 由切片法可得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z\\&=\pi\left(\frac{2}{3}z^3-z^2+z\right)\Big|_0^2=\frac{10\pi}{3},\\\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^2z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2z\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z\\&=\pi\left(\frac{1}{2}z^4-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^2=\frac{14\pi}{3}.\end{aligned}$$

因此 $\overline{z}=\dfrac{\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{7}{5}$, Ω 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$, 代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}. \tag{$*$}$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{pmatrix}.$$

由此可知当 $a\neq-1$ 或 $b\neq 0$ 时, 方程组 $(*)$ 无解. 当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时, 方程组 $(*)$ 有解, 且此时方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k_1(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a=-1,b=0$ 时存在矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1&-k_1\\k_1&k_2\end{pmatrix}(k_1,k_2\in\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

证 (1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha},\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

故 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2$, 即 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3=0$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\0, & \text{其他}\end{cases}$, 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1\\X, & 1<X<2\\1, & X\geqslant 2\end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P(X\leqslant Y)$.

解 (1) 记 Y 分布函数为 $F(y)$, 则当 $y<1$ 时, $F(y)=0$; 当 $y\geqslant 2$ 时, $F(y)=1$; 当 $1\leqslant y<2$ 时,

$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\leqslant y)=P(Y=1)+P(1<Y\leqslant y)\\&=P(X\geqslant 2)+P(1<X\leqslant y)=\int_2^3\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{y^3+18}{27}.\end{aligned}$$

所以 Y 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$.

(2) 由随机变量 Y 的定义可知 $P(X\leqslant Y)=P(X<2)=\displaystyle\int_0^2\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 总体均值 $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$, 令 $E(X)=\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$, 因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\bar{X}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^n\ln x_i$, 令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0$ 得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}$, 所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}}$.

9　2014 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列曲线中有渐近线的是　(　)

   A. $y=x+\sin x$　B. $y=x^2+\sin x$　C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

   解　可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$, 从而直线 $y=x$ 是曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 的斜渐近线.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上　(　)

   A. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　B. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

   C. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　D. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

   解　令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$, 则 $F(0)=F(1)=0$, 且 $F''(x)=f''(x)$. 故当 $f''(x)>0$ 时,$F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x=0$ 或 $x=1$ 处取到, 而 $F(0)=F(1)=0$, 所以 $F(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$, 选 D.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$　(　)

   A. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

   B. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$

   C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

   D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

   解　画出积分区域, 如果化为极坐标, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

如果在直角坐标系下交换积分次序, 则

$$I=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

选 D.

4. 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$, 则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

A. $2\sin x$ B. $2\cos x$ C. $2\pi\sin x$ D. $2\pi\cos x$

解 直接计算可得

$$\begin{aligned}I(a,b)&=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x-2ax\cos x-2bx\sin x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_{0}^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x-2bx\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=\pi a^2+\pi(b-2)^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi.\end{aligned}$$

显然当 $a=0,b=2$ 时, $I(a,b)$ 最小, 所以 $a_1=0,b_1=2$, 选 A.

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ ( )

A. $(ad-bc)^2$ B. $-(ad-bc)^2$ C. $a^2d^2-b^2c^2$ D. $b^2c^2-a^2d^2$

解 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}&=-\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&b&0&a\\c&0&d&0\\0&d&0&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&b&0\\c&0&d&0\\0&b&0&a\\0&d&0&c\end{vmatrix}\\&=-\begin{vmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&b&a\\0&0&d&c\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2,\end{aligned}$$

选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k,l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

解 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3) + \lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 不一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 如取反例 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 因此选 A.

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$ ( )

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

解 由 A, B 相互独立可得

$$\begin{aligned} P(A-B) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A) - 0.5P(A) = 0.5P(A) = 0.3, \end{aligned}$$

所以 $P(A) = 0.6, P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.5P(A) = 0.2$, 选 B.

8. 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \dfrac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$, 随机变量 $Y_2 = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则 ( )

A. $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$ B. $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$

C. $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$ D. $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

解 利用期望与方差公式计算得

$$\begin{aligned} EY_1 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y[f_1(y) + f_2(y)]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(EX_1 + EX_2) = EY_2, \\ E\left(Y_1^2\right) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2[f_1(y) + f_2(y)]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}E\left(X_1^2\right) + \frac{1}{2}E\left(X_2^2\right), \\ DY_1 &= E\left(Y_1^2\right) - (EY_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}E\left(X_1^2\right) + \frac{1}{2}E\left(X_2^2\right) - \frac{1}{4}(EX_1)^2 - \frac{1}{4}(EX_2)^2 - \frac{1}{2}EX_1EX_2 \\ &= \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 + \frac{1}{4}E(X_1 - X_2)^2 > \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 = DY_2, \end{aligned}$$

选 D.

二 填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

解 曲面在点 $(1,0,1)$ 处的法向量为 $\left(z'_x, z'_y, -1\right)\big|_{(1,0,1)} = (2,-1,-1)$, 所以切平面方程为 $2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$, 即 $2x-y-z-1=0$.

10.设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$________.

解 当 $x\in[0,2]$ 时, $f(x)=\int 2(x-1)\,\mathrm{d}x = x^2-2x+C$, 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 即 $f(x)=x^2-2x$. 又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 故 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

11.微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为________.

解 原微分方程即 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, 这是一个齐次方程, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y'=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$, 原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(\ln u-1)$. 解此变量分离的方程得 $u=\mathrm{e}^{Cx+1}$, 从而原方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$. 代入初值条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 可得 $C=2$, 故所求特解为 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

12.设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

解 曲线 L 的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=-\sin\theta$, θ 从 0 到 2π, 则

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi.$$

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是________.

解 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-\left(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2\right)+4x_3^2-a^2x_3^2 \\ &= (x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+\left(4-a^2\right)x_3^2, \end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4-a^2\geqslant 0$, 解得 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $c\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ 为 θ^2 的无偏估计, 则 $c=$________.

解 由无偏估计的定义得

$$\begin{aligned} E\left(c\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= c\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2\right)=cnE\left(X^2\right) \\ &= cn\int_\theta^{2\theta}\frac{2x^3}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{2cn}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\bigg|_\theta^{2\theta}=\frac{5cn}{2}\theta^2=\theta^2, \end{aligned}$$

因此 $c=\dfrac{2}{5n}$.

三　解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解 当 $t>0$ 时, $t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t>t^2\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)-t=\dfrac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}\bigg/\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

提示: 事实上, 洛必达法则适用于 $\dfrac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

解 方程两边关于 x 求导得 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$, 令 $y'=0$ 得 $y=-2x$ 或 $y=0$ (舍去). 将 $y=-2x$ 代入原方程得 $-6x^3+6=0$, 所以 $x=1$, $f(1)=-2$. 在 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$ 两边继续对 x 求导得

$$\left(3y^2+2xy+x^2\right)y''+2(3y+x)\left(y'\right)^2+4(y+x)y'+2y=0,$$

求得 $f''(1)=\dfrac{4}{9}>0$, 因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 且极小值 $f(1)=-2$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

解 利用多元复合函数偏导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y.$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]e^{2x},$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u)=4f(u)+u$, 此方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$. 由 $f(0)=f'(0)=0$ 得 $C_1+C_2=0, 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0$, 解得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$, 故 $f(u)=\frac{1}{16}\left(e^{2u}-e^{-2u}-4u\right)$.

18.(**本题满分 10 分**)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\ (z\leqslant 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 由 $z=x^2+y^2$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=2y$, 利用投影法和二重积分对称性得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\\
&=\iint\limits_{D}\left(\left(x^2+y^2\right)-1-(x-1)^3\frac{\partial z}{\partial x}-(y-1)^3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{D}\left(-1+2x-5x^2+6x^3-2x^4+2y-5y^2+6y^3-2y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\iint_{D}\left(1+5x^2+5y^2+2x^4+2y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1+5r^2+2r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\right)r\,\mathrm{d}r\\
&=-4\pi.
\end{aligned}$$

提示: 这题还可以用补面 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$ 的方法用高斯公式来做, 但这里用投影法更直接.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(2) 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

解 (1) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 由 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ 可得 $\cos a_n - \cos b_n = a_n > 0$, 因此 $0 < a_n < b_n$, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 当 $n \to \infty$ 时, $a_n \sim a_n + 1 - \cos a_n = 1 - \cos b_n \sim \frac{b_n^2}{2}$, 因此 $\frac{a_n}{\frac{b_n}{2}} \sim b_n$, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = (2, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}} + k_1\boldsymbol{\alpha}, k_1 \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = (6, -3, -4, 0)^{\mathrm{T}} + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, k_2 \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $x =$

$(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3\boldsymbol{\alpha}, k_3\in\mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},$$

其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

证 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$. 且当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为 $\mathrm{diag}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}),0,\cdots,0\}$.

证 由于 $r(\boldsymbol{A})=1$, 所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有且只有 $n-1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 且它只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值就是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$. 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且其相似标准形为 $\mathrm{diag}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}),0,\cdots,0\}$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=1, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵 $\mathrm{diag}\{n,0,\cdots,0\}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY.

解 (1) 由分布函数定义得

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)\\&=P(X=1)P(Y\leqslant y|X=1)+P(X=2)P(Y\leqslant y|X=2)\\&=\frac{1}{2}P(Y\leqslant y|X=1)+\frac{1}{2}P(Y\leqslant y|X=2)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}y, & 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}y, & 1\leqslant y<2\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} & y\geqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\leqslant y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}.$$

(2) Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2\frac{1}{4}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

其中 θ 是未知参数且大于零, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(3) 是否存在实数 a, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$?

解 (1) 总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, 则

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2},\\E(X^2)&=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\theta.\end{aligned}$$

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时,

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

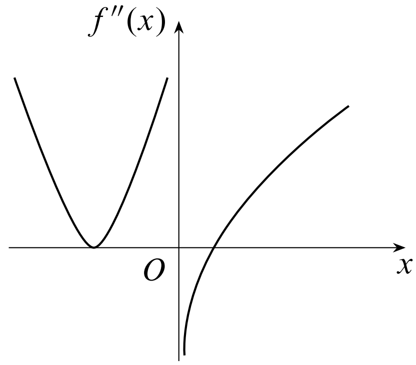
令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{1}{\theta^2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ 得 $\theta = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, 故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

(3) 存在 $a = \theta$ 满足条件. 因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_1^2) = \theta < +\infty$, 所以根据辛钦大数定律知, 当 $n \to \infty$ 时, $\hat{\theta}_N = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_1^2) = \theta$. 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$.

10　2015 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 (　)



第 1 题图

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y=f''(x)$ 在 $x>0$ 时与 x 轴的交点, $x<0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

2. 设 $y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解, 则 (　)

A. $a=-3, b=2, c=-1$　　B. $a=3, b=2, c=-1$

C. $a=-3, b=2, c=1$　　D. $a=3, b=2, c=1$

解　原微分方程的非齐次项为 ce^x, 它的一个特解为 $y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)e^{x}$, 因此可以判断方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个特征根分别为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 于是 $a=-3, b=2$. 于是将特解 $y=xe^x$ 代入方程中可得 $(xe^x)''-3(xe^x)+2xe^x=-e^x=ce^x$, 所以 $c=-1$, 选 A.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的 ( )

A. 收敛点, 收敛点 B. 收敛点, 发散点 C. 发散点, 收敛点 D. 发散点, 发散点

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 因此 $x=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛区间的端点, 即收敛半径为 1. 而幂级数逐项求导后的级数收敛半径不变, 故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的收敛半径也是 1, 从而 $x=\sqrt{3}$ 为收敛点, $x=3$ 为发散点, 选 B.

4. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$

解 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 得四条曲线分别为 $r=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r=\dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, 正确答案选 B.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ B. $a\notin\Omega, d\in\Omega$ C. $a\in\Omega, d\notin\Omega$ D. $a\in\Omega, d\in\Omega$

解 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$, 利用初等行变换得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\\
&\to \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以 $a=1$ 或 2, $d=1$ 或 2, 选 D.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形

为 ( )

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$　B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由题意知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$, 于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 选 A.

7. 设 A, B 为任意两个随机事件, 则 ( )

A. $P(AB) \leqslant P(A)P(B)$　B. $P(AB) \geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　D. $P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解 注意到 $P(AB) \leqslant P(A), P(AB) \leqslant P(B)$, 因此 $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$, 选 C.

8. 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] =$ ( )

A. -3　B. 3　C. -5　D. 5

解 由条件可得

$$\begin{aligned} E[X(X+Y-2)] &= E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X) \\ &= D(X) + (EX)^2 + E(X)E(Y) - 2E(X) = 5, \end{aligned}$$

选 D.

二　填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ ________.

解 利用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2x\cos x} = -\dfrac{1}{2}$.

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x|\right)\mathrm{d}x =$ ________.

解 由定积分的对称性得 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x|\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

11.若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

解 方程两边求全微分得 $\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=0$, 令 $x=0,y=1,z=0$ 得 $\mathrm{d}z+\mathrm{d}x=0$, 即 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x$.

12.设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域, 则
$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

解 记 D_z 为用平面 $z=z$ 截区域 Ω 所得的截面, 利用轮换对称性与切片法得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

13.n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________.

解 将此行列式记为 D_n, 把 D_n 按照第 n 行进行展开得

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{2n-1}\cdot(-1)D_{n-1}+2^n\\&=D_{n-1}+2^n=\cdots=D_1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2.\end{aligned}$$

14.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P(XY-Y<0)=$________.

解 由 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$ 知 $X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$, 且 X,Y 相互独立, 所以

$$\begin{aligned}P(XY-Y<0)=P((X-1)Y<0)&=P(X-1>0,Y<0)+P(X-1<0,Y>0)\\&=P(X>1)P(Y<0)+P(X<1)P(Y>0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

解 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$, 所以

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o\left(x^3\right)$$

$$= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x) = kx^3$ 当 $x \to 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, k=\frac{a}{3}$, 解得 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

提示: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 此切线与 x 轴交点为 $\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$. 根据题设条件可知 $\frac{1}{2}\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4$, 即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\frac{1}{8}y^2$, 解得 $y=-\frac{8}{8C+x}$. 因为 $f(0)=2$, 所以 $C=-\frac{1}{2}$, 故 $f(x)=\frac{8}{4-x}$.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解 二元函数在每一点沿着梯度方向的方向导数最大, 且最大方向导数等于该点梯度的模. 注意到 $\mathbf{grad}\, f(x,y)=(1+y, 1+x)$, $|\mathbf{grad}\, f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$, 因此问题转化为求 $\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$, 由

$$\begin{cases} F'_x = 2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F'_y = 2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ F'_\lambda = x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}.$$

而 $|\mathbf{grad}\, f(1,1)|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{grad}\, f(-1,1)|=0$, $|\mathbf{grad}\, f(2,-1)|=|\mathbf{grad}\, f(-1,2)|=3$, 所以 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

18.(本题满分 10 分)

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

证 (1) 因为函数 $u(x), v(x)$ 可导, 记 $f(x) = u(x)v(x)$, 则在任意点 x_0 处有

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0) + u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} u(x) + v(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\
&= u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0).
\end{aligned}$$

由 x_0 的任意性知 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

(2) $f'(x) = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

19.(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$,起点为 $A\left(0, \sqrt{2}, 0\right)$,终点为 $B\left(0, -\sqrt{2}, 0\right)$, 计算曲线积分 $I = \int_L (y + z)\mathrm{d}x + \left(z^2 - x^2 + y\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}z$.

解 由曲线 L 的方程消去 z 得 $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$, 因此 L 的参数方程可取为 $x = \cos\theta, y = \sqrt{2}\sin\theta, z = \cos\theta$. 其中 y 从 $\sqrt{2}$ 变到 $-\sqrt{2}$, 因此 θ 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到 $-\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \int_L (y + z)\mathrm{d}x + \left(z^2 - x^2 + y\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[-\left(\sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta\right)\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \left(1 + \sin^2\theta\right)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解 (1) 首先注意到 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \big(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3\big) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 其中矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, 且 $|\boldsymbol{P}| = 4 \neq 0$, 所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(2) 设非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下的坐标都是 $\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

由于矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, 即 $(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 对 $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix},$$

所以当且仅当 $k = 0$ 时, 方程组 $(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 且所有非零解为 $\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c \neq 0$. 那么在两个基下坐标相同的所有非零向量 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = c(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, c 为任意非零常数.

21.(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) \\ |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$.

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得线性无关特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3 = (-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 为对角阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY.

解 (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为 $p = P(X>3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$, 则 Y 的概率分布为 $P(Y=k) = \mathrm{C}_{k-1}^{1}\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{k-2}\frac{1}{8} = (k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2, k = 2,3,\cdots$.

(2) Y 的数学期望为 $E(Y) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 16$, 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, -1 < x < 1.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解 (1) 由于总体 $X \sim U[\theta, 1]$, 故总体均值 $E(X) = \frac{\theta+1}{2}$, 令 $E(X) = \bar{X}$ 得 $\theta = 2\bar{X}-1$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}-1$.

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) &= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leqslant \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

当 $\theta \leqslant \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时, 显然 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增, 则当 $\theta = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 最大, 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

11　2016 年考研数学一

一　选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛, 则 (　)

A. $a<1$ 且 $b>1$　　B. $a>1$ 且 $b>1$

C. $a<1$ 且 $a+b>1$　　D. $a>1$ 且 $a+b>1$

解　首先有 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$. 其中当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^a}$, 因此 $a<1$ 时 I_1 收敛. 当 $x \to +\infty$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^{a+b}}$, 因此当 $a+b>1$ 时 I_2 收敛, 选 C.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x<1 \\ \ln x, & x \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 (　)

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x - 1), & x \geqslant 1 \end{cases}$　　B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$　　D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

解 从四个选项中选一个函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ 对任意 x 成立即可, 其中 B 和 C 当 $x>1$ 时 $F'(x) \neq f(x)$, 而 A 不满足 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 若 $y_1 = \left(1+x^2\right)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = \left(1+x^2\right)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$ (　)

A. $3x(1+x^2)$　　B. $-3x(1+x^2)$　　C. $\frac{x}{(1+x)^2}$　　D. $-\frac{x}{(1+x)^2}$

解　由于 $y_1 = \left(1+x^2\right)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = \left(1+x^2\right)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是原方程的解, 所以 $y_2 - y_1 = 2\sqrt{1+x^2}$ 是齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 代入可得 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} +$

$\sqrt{1+x^2}p(x)=0$, 因此 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$. 又 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=2(1+x^2)^2$ 是方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解, 代入方程即可得到 $q(x)=3x(1+x^2)$, 选 A.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n} \end{cases}, n=1,2,\cdots$, 则 ( )

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解 显然 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=1$. 当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时, 故 $1\leqslant\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{n+1}{n}$, 且 $x\to0^+$ 时 $n\to\infty$. 由夹逼准则得到 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1=f'_1(0)$, 因此 $f'(0)=1$, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

解 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 因此

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(A+A^{-1})\boldsymbol{P},$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-8\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 不相似.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ( )

A. 单叶双曲面　B. 双叶双曲面　C. 椭球面　D. 柱面

解 配方可得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-4x_2x_3 \\ &=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3\left(x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2-\frac{5}{3}x_3^2, \end{aligned}$$

因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示的二次曲面为双叶双曲面.

7. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0)$, 记 $p=P(X\leqslant\mu+\sigma^2)$, 则 ( )

A. p 随着 μ 的增加而增加　B. p 随着 σ 的增加而增加

C. p 随着 μ 的增加而减少　D. p 随着 σ 的增加而减少

解 注意到 $P\left(X \leqslant \mu+\sigma^2\right)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \sigma\right)=\Phi(\sigma)$, 因此 p 随着 σ 的增加而增加, 选 B.

8. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示两次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ( )

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $-\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{2}$

解 注意到 $X \sim B\left(2, \dfrac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$, 因此 $E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{3}, D(X)=D(Y)=\dfrac{4}{9}$, 且 $E(XY)=P(X=1, Y=1)=\dfrac{2}{9}$(求 $E(XY)$ 只需要求 $X \neq 0, Y \neq 0$ 的部分, 否则 $XY=0$). 因此, 相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{1}{2}$.

二 填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) \mathrm{d} t}{1-\cos x^2}=$________.

解 利用等价无穷小与洛必达法则得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) \mathrm{d} t}{1-\cos x^2} & =\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) \mathrm{d} t}{\frac{1}{2} x^4} \\
& =\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x \sin x)}{2 x^3}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

10. 向量场 $\boldsymbol{A}(x, y, z)=(x+y+z) \boldsymbol{i}+x y \boldsymbol{j}+z \boldsymbol{k}$ 的旋度 $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}=$________.

解 利用旋度公式直接计算得

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{A}=\left|\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\
\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\
x+y+z & x y & z
\end{array}\right|=\boldsymbol{j}+(y-1) \boldsymbol{k}.
$$

11. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z=z(x, y)$ 由方程 $(x+1) z-y^2=x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left.\mathrm{d} z\right|_{(0,1)}=$________.

解 原方程两边分别对 x, y 求偏导数得

$$
\left\{\begin{array}{l}
z+(x+1) z_x^{\prime}=2 x f(x-z, y)+x^2\left(1-z_x^{\prime}\right) f_1^{\prime}(x-z, y) \\
(x+1) z_y^{\prime}-2 y=x^2\left(-z_y^{\prime} f_1^{\prime}(x-z, y)+f_2^{\prime}(x-z, y)\right)
\end{array}\right. .
$$

代入 $x=0, y=1, z=1$ 可得 $z_x^{\prime}(0,1)=-1, z_y^{\prime}(0,1)=2$, 因此 $\left.\mathrm{d} z\right|_{(0,1)}=-\mathrm{d} x+2 \mathrm{d} y$.

12.设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0)=1$, 则 $a=$________.

解 把 $f(x)$ 在 $x=0$ 处作麦克劳林展开得

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x\big(1-ax^2+o(x^2)\big)=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3),$$

因此 $a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{f'''(0)}{3!}=\dfrac{1}{6}, a=\dfrac{1}{2}$.

13.行列式 $\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}=$________.

解 直接按照第一列展开得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}&=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}\\ &=\lambda\left(\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1 & 0\\ \lambda & -1\end{vmatrix}\right)+4\\ &=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.\end{aligned}$$

14.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x}=9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

解 注意到 μ 的双侧置信区间的上限与下限关于样本均值 $\bar{x}$ 对称, 因此置信下限为 $9.5\times 2-10.8=8.2$, 从而置信区间为 $(8.2,10.8)$.

三 解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$, 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 化成极坐标计算可得

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta+\cos^3\theta+\frac{1}{3}\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 16\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{32}{3}+5\pi.
\end{aligned}
$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$.

(1) 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 (1) 利用定积分的定义可得微分方程 $y''+2y'+k=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0$, 解得 $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$, 于是方程的通解为 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. 因为 $0<k<1$, 所以 $\lambda_{1,2}<0$, 于是反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)=0$. 又 $y(0)=y'(0)=1$, 所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{k}\big(y''(x)+2y'(x)\big)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\big(y'(x)+2y(x)\big)\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{k}.
\end{aligned}
$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$, 且 $f(0,y)=y+1$. L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

解 由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$ 可知 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+C(y)$, 又 $f(0,y)=y+1$, 所以 $C(y)=y+1$, $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$. 从而

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{L_t}\mathrm{d}f(x,y)=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t.
\end{aligned}
$$

令 $I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1=0$ 得 $t=2$. 且 $t<2$ 时 $I'(t)<0$, $t>2$ 时 $I'(t)>0$, 因此 $I(t)$ 的最小值为 $I_{\min}(t)=I(2)=3$.

18.(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 利用高斯公式得

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)\,\mathrm{d}V\\
&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}x\mathrm{d}z+V(\Omega)\\
&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1\\
&=2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

解 (1) 由条件可得

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|&=\left|f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\right|\\
&<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|,
\end{aligned}
$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的前 n 项和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1$, 由 (1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$, 在等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限得 $c=f(c)$, 即 c 是函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点. 由于 $g'(x)=f'(x)-1\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$, 所以 $g(x)$ 严格单调递减. 再结合 $g(0)=1$ 可得 $1-x<g(x)<1-\dfrac{1}{2}x, x>0$. 由于 $g(1)>0, g(2)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一零点, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c\in(1,2)\subset(0,2)$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无

解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

解 对方程的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+3&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}$,

此时方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

当 $a=1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, 此时方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\k_1-1&k_2-1\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数.

当 $a=-2$ 时, 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$, 此时方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 无解.

21.(**本题满分** 11 **分**)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解 (1) 首先由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.
当 $\lambda_2=-2$ 时, 解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.
当 $\lambda_3=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.
令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{99}&=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 知 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 即 $\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U=\begin{cases}1,&X\leqslant Y\\0,&X>Y\end{cases}$.

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度;
(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;
(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

解 (1) (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D},&(x,y)\in D\\0,&\text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3,&(x,y)\in D\\0,&\text{其他}\end{cases}$.

(2) 对 $0<t<1$, 有

$$P(U=0,X\leqslant t)=P(X>Y,X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}t^2-t^3,$$
$$P(U=0)=P(X>Y)=\frac{1}{2},P(X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3.$$

由于 $P(U=0,X\leqslant t)\neq P(U=0)P(X\leqslant t)$, 所以 U 与 X 不独立.

(3)

$$F(z)=P(U+X\leqslant z)=P(U+X\leqslant z,U=0)+P(U+X\leqslant z,U=1)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(X \leqslant z, X > Y) + P(1 + X \leqslant z, X \leqslant Y) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geqslant 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geqslant 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2 \\ 1, & z \geqslant 2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a, 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

解 (1) T 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F(t) &= P(T \leqslant t) = P\big(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leqslant t\big) = P(X_1 \leqslant t, X_2 \leqslant t, X_3 \leqslant t) \\
&= \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \left(\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3} \mathrm{d}\theta\right)^3, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geqslant \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{t^9}{\theta^9}. & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geqslant \theta \end{cases}.
\end{aligned}
$$

因此 T 的概率密度为 $f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{9t^2}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

(2) 由无偏估计的定义, 令 $E(aT) = \int_0^\theta at\frac{9t^2}{\theta^9}\mathrm{d}\theta = \frac{9}{10}a\theta = \theta$, 解得 $a = \frac{10}{9}$.

12　2017 年考研数学一

一　选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则　(　)

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, 即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\frac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)\cdot f'(x)>0$, 则　(　)

A. $f(1)>f(-1)$　　B. $f(1)<f(-1)$

C. $|f(1)|>|f(-1)|$　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$

解　由 $f(x)f'(x)>0$ 可知 $[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)>0$, 因此 $f^2(x)$ 单调递增, 有 $f^2(1)>f^2(-1)$, 即 $|f(1)|>|f(-1)|$, 选 C.

3. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为　(　)

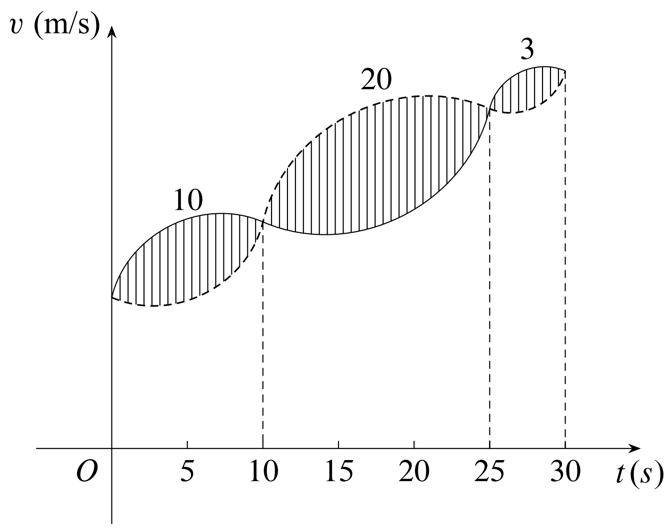
A. 12　　B. 6　　C. 4　　D. 2

解　直接计算得 $f'_x=2xy, f'_y=2x^2, f'_z=2z$, 于是 $f'_x(1,2,0)=4, f'_y(1,2,0)=1, f'_z(1,2,0)=0$. 向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(1,2,0)=4\cos\alpha+\cos\beta+0\cos\gamma=4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=2,$$

选 D.

4. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 $10,20,3$. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则　(　)



第 4 题图

A. $t_0 = 10$　　B. $15 < t_0 < 20$　　C. $t_0 = 25$　　D. $t_0 > 25$

解 从 0 到 t_0 时刻, 甲和乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{t_0} v_2(t)\mathrm{d}t$. 要使乙追上甲, 则有 $\int_0^{t_0}\big(v_2(t)-v_1(t)\big)\mathrm{d}t = 10$, 由定积分的几何意义知 $\int_0^{25}\big(v_2(t)-v_1(t)\big)\mathrm{d}t = 20-10 = 10$, 可知 $t_0 = 25$, 选 C.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 (　　)

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

解 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1, 它有 $n-1$ 个特征值为 0, 第 n 个特征值为 $\lambda = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = 1$, 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 A.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 (　　)

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

解 注意到 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值都是 $2, 2, 1$, 要判断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda = 2$ 的情形即可. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. 对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 2$, 它是不可对角化的, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, 选 B.

7. 设 A, B 是两个随机事件, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是 (　　)

A. $P(B|A) > P(B|\bar{A})$　　B. $P(B|A) < P(B|\bar{A})$

C. $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$　　D. $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$

解 由条件概率的定义可知 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 即为 $\dfrac{P(AB)}{P(B)} > \dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, 即 $P(AB)P(\bar{B}) > P(A\bar{B})P(B)$. 于是

$$P(A\bar{B})P(B) < P(AB)\big(1 - P(B)\big) = P(AB) - P(AB)P(B),$$

移项即等价于 $P(AB) > P(A\bar{B})P(B) + P(AB)P(B) = P(A)P(B)$. 根据公式的对称性可知 A 选项也等价于 $P(AB) > P(A)P(B)$, 选 A.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, 则下列结论中不正确的是 (　)

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　D. $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

解 对选项 B 有 $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$, $\dfrac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, $\dfrac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, B 不正确, 选项 A, C, D 都是基本结论, 都正确, 选 B.

二　填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$________.

解 由 $f(x)$ 的麦克劳林级数公式 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots (-1 < x < 1)$ 可知 $f^{(3)}(0) = 0$.

10.微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$________.

解 此二阶常系数齐次线性微分方程, 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, 特征根 $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$, 因此方程的通解为 $y = \mathrm{e}^{-x}\big(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\big)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

11.若曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{x\mathrm{d}x - a y \mathrm{d}y}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$________.

解 令 $P(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 - 1}$, $Q(x, y) = \dfrac{-ay}{x^2 + y^2 - 1}$, 则显然 P, Q 都在区域 D 内有连续的偏导数. 由于积分与路径无关, 所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, 解得 $a = -1$.

12.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$________.

解 利用幂级数在收敛区间内的逐项积分和逐项求导得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\right)'$$
$$=-\left(\frac{-x}{1+x}\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

13.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2$, $\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ________.

解 依题意知 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵, 所以

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\big)=r(\boldsymbol{A})=2.$$

14.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X)=$____.

解 X 的概率密度为 $f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 则

$$E(X)=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x+0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x=0.25\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=2.$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 由复合函数的偏导数法则可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^xf_1'+f_2'(-\sin x)$, 故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$. 进而

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x\frac{\partial f_1'}{\partial x}-\cos x\cdot f_2'-\sin x\frac{\partial f_2'}{\partial x}$$
$$=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x\big(\mathrm{e}^xf_{11}''-\sin x\cdot f_{12}''\big)-\cos x\cdot f_2'-\sin x\big(\mathrm{e}^xf_{21}''-\sin x\cdot f_{22}''\big)$$
$$=\mathrm{e}^xf_1'-f_2'\cos x+\mathrm{e}^{2x}f_{11}''-2\mathrm{e}^xf_{21}''\sin x-f_{22}''\sin^2x,$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = f_1'(1,1) - f_2'(1,1) + f_{11}''(1,1)$.

16.(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

解 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}(x^2)\\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

解 将方程中的 y 视为 x 的函数, 两边求导得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$. 令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$, 且 $x=1$ 时 $y=1$, $x=-1$ 时 $y=0$. 等式两边再对 x 求导得

$$2x+2yy'^2+y^2y''+y''=0,$$

从而 $y''=-\dfrac{2(x+yy'^2)}{1+y^2}$. 于是在点 $(1,1)$ 处有 $y''=-1<0$, 从而 $y(1)=1$ 是极大值; 而在点 $(-1,0)$ 处有 $y''=2>0$, 从而 $y(-1)=0$ 是极小值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\big(f'(x)\big)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

解 (1) 因为极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 且由极限的保号性知存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(\eta)}{\eta}<0$, 即 $f(\eta)<0$. 又 $f(1)>0$, 所以由零点定理知存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$, 即 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有根.

(2) 由于 $f(0)=f(\xi)=0$, 所以根据罗尔定理知存在 $\zeta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\zeta)=0$. 令 $F(x)=f(x)f'(x)$, 则 $F'(x)=f(x)f''(x)+\big(f'(x)\big)^2$. 那么有 $F(0)=F(\zeta)=F(\xi)=0$, 因此再由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,\zeta),\xi_2\in(\zeta,\xi)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 即方程 $f(x)f''(x)+\big(f'(x)\big)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

19.(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(2) 求 S 的质量 M.

解 (1) 联立 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 并消去 z 得 $x^2+y^2=2x$, 因此曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$.

(2) 曲线 C 在 xOy 平面的投影曲线围成的平面区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\}$, 则薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_S u(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D u\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\iint_D u\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 18\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r = 96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = 64. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 说明 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 即方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 进而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 首先二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 一定有零特征值, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$, 解得 $a=2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解方程组 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_1=-3$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_2=6$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_3=0$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\0, & 其他\end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y\leqslant EY)$;

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 (1) 首先有 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$, 于是

$$P(Y\leqslant EY)=P\left(Y\leqslant\frac{2}{3}\right)=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(2) Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(Y+X \leqslant z|X=0)P(X=0) + P(Y+X \leqslant z|X=2)P(X=2) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \leqslant z|X=0) + \frac{1}{2}P(Y+2 \leqslant z) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \leqslant z) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant z-2) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z-2).
\end{aligned}
$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z-2) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ z-2, & 2 < z < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$

23.(**本题满分 11 分**)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|(i = 1, 2, \cdots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计参数 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

解 (1) 由 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 可知 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. $Z_i = |X_i - \mu|\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布, 设 Z_1 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P(Z_i \leqslant z) = P(|X_i - \mu| \leqslant z) = P\left(-\frac{z}{\sigma} \leqslant \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{z}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

则 Z_1 的概率密度为

$$
f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{2}{\sigma}\right), & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.
$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 设 $\bar{Z}$ 为样本均值, 令

$$
\bar{Z} = E(Z_1) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\sigma z \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,
$$

由此可知 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3) 设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 对应的样本值为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f(z_i)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}, & z_1, z_2, \cdots, z_n>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $z_1, z_2, \cdots, z_n>0$ 时, 取对数得 $\ln L(\sigma)=\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{2}{\pi}-n\ln\sigma-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2=0,$$

解得 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}$, 故 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^2}$.

13　2018 年考研数学一

一　选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 (　　)

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

解　A ,B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_{+}(0)=-\dfrac{1}{2}, f'_{-}(0)=\dfrac{1}{2}$, 选 D.

2. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为 (　　)

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=0$

C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

解　过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与已知曲面相切的平面只有两个, 显然 $z=0$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切, 故排除 C, D. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-1)$, 对于 A 选项, $x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$, 可得 $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}$. 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 z 不相等, 排除 A, 故选 B.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ (　　)

A. $\sin 1+\cos 1$　　B. $2\sin 1+\cos 1$　　C. $2\sin 1+2\cos 1$　　D. $3\sin 1+2\cos 1$

解　利用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的麦克劳林级数可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}\\&=2\sin 1+\cos 1.\end{aligned}$$

因此选 B.

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 (　　)

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

解 利用对称性可以计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

解 对于 A, 有 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

解 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.3,$$

于是 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.3=0.2$, 选 A.

8. 给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知, 给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 对总体均值 μ 进行检验, 令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$, 则 ( )

A. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha=0.01$ 时必拒绝 H_0

B. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha=0.01$ 时必拒绝 H_0

C. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha=0.01$ 时必接受 H_0

D. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha=0.01$ 时必接受 H_0

解 显著性水平为 α 的假设检验的接受域就是置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, 当 α 变小时, 置信水平变大, 置信区间变大, 也就是接受域变大, 因此选 D.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}}=\mathrm{e}$, 则 $k=$________.

解 原极限为 1^∞ 型, 故恒等变形为

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}.$$

所以 $-\dfrac{2}{k}=1, k=-2$.

10.设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\displaystyle\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$________.

解 由题意知 $f(0)=0, f(1)=2, f'(1)=2^x\ln 2\big|_{x=1}=2\ln 2$. 由分部积分公式, 原积分等于 $xf'(x)\big|_0^1-\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=2\ln 2-2$.

11.设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$, 则 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

解 由旋度定义 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$, 可知 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

12.设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\displaystyle\oint_L xy\mathrm{d}s=$________.

解 由对称性得

$$\begin{aligned}\oint_L xy\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L(-1)\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

13.设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的线性无关的特征向量. 又 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}^2$ 的同一个特征值所对应的特征向量, 因此 $\boldsymbol{A}^2$ 有二重特征值 1. 又 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, 则其特征值为 $-1,1$, 故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14.设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC=\emptyset$. 若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$ ________.

解 因为 $BC=\emptyset$, $P(BC)=0$, 故 $P(ABC)=0$.

$$\begin{aligned}P(AC|AB\cup C)&=\frac{P[(ABC)\cup(AC)]}{P(AB\cup C)}\\&=\frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}\\&=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

解得 $P(C)=\frac{1}{4}$.

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

解 利用分部积分法

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx&=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}d\left(e^{2x}\right)\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x)&=\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt=\int\frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}dt\\&=\int\sqrt{t-1}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t-1}}\\&=\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{t-1}+C\\&=\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C\end{aligned}$$

故 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C_1$.

16.(本题满分 10 分)

[1]将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 设分成的三段依次为 x, y, z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f_y'=\frac{y}{8}+\lambda=0 \\ f_z'=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$, 并且黑塞矩阵 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

17.(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 取曲面 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[1]此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iiint\limits_{\Omega}\left(1+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{1-3y^2-3z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^2\sqrt{1-3r^2}r\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}
\end{aligned}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14\pi}{45}.$$

18.(**本题满分 10 分**)

[1]已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

解 (1) 方程两边乘以 e^x 得 $(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x\left(y'+y\right)=x\mathrm{e}^x$, 于是 $\mathrm{e}^x y=(x-1)\mathrm{e}^x+C$, 因此通解为 $y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$.

(2) 等式两边乘以 e^x 可得 $(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x f(x)$, 通解可表示为 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)$.

现在 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
y(x+T)&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_T^{T+x}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)
\end{aligned}$$

[1]此题来自蒲和平大学生数学竞赛教程 240 页.

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(\left(\left(\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + C\right)\mathrm{e}^{-T} + \int_0^x f(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\right)\right)$$

要使得这个解是周期函数,则 $y(x+T) = y(x)$,即满足 $\left(\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + C\right)\mathrm{e}^{-T} = C$,由此解得 $C = \dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T - 1}$,因此 $y = \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T - 1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 首先由 $x_1 > 0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \mathrm{e}^{\xi_n} < \mathrm{e}^{x_n},\quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $\mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \mathrm{e}^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

解 (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = c(-2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

如果 $a=2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a&1&a&2\\0&1&-a&-1&1-a&-1\\0&0&0&0&a-2&0\end{pmatrix}.$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\to\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

解 (1) 直接计算可知 $E(X)=0, E(X^2)=1$, 而 $Y\sim P(\lambda), E(Y)=\lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=\mathrm{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)E(Y)-(EX)^2E(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1)\\&=P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k)\\&=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k).\end{aligned}$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{2k!}$;
当 $k=0$ 时, $P(Z=0)=P(Y=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$;
当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(-k)!}$.
因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2,\cdots\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0\end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

解 (1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E(|X|)=\sigma,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{1}{n}\big(E(X^2)-(E|X|)^2\big)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

14　2019 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (　)

A. 可导点, 极值点　　B. 不可导点, 极值点

C. 可导点, 非极值点　　D. 不可导点, 非极值点

解　$\lim\limits_{x\to0^-} x|x| = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 且当 $x \in \mathring{U}(0)$ 时, $f(x) < 0 = f(0)$, 因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 而极限 $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x$ 不存在, 因此不可导, 选 B.

3. 设 u_n 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

解　正确答案选 D. 因为 u_n 单调递增有界, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 存在, D 选项级数的部分和数列收敛, 因此级数收敛. A 中只要 $a \neq 0$ 就发散, B 则一定发散. C 中可取反例 $u_n = -\dfrac{1}{n}$, 则 $1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, 调和级数发散.

4. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 (　)

A. $y - \dfrac{x^2}{y}$　　B. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}$　　C. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$　　D. $x - \dfrac{1}{y}$

解　由题意, 应当选择函数 $P(x, y)$ 使得在整个上半平面上均有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$ 成立, 选 D. (注意 C 选项在 y 轴上偏导数不存在)

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

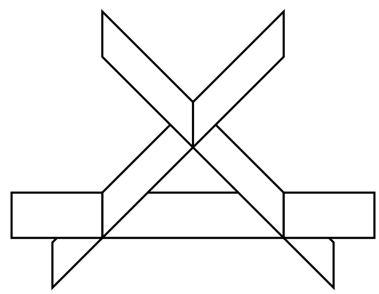
A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

解 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i1}y+a_{i3}z=d_i \ (i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )



第 6 题图

A. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$ B. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

C. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$ D. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$

解 令 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$, 由于三个平面无交点, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解. 即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant 3$. 再根据任意两个平面都不重合或平行, 可知 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行线性无关, 因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此只能是 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 选 A.

7. 设 A,B 为随机事件, 则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

解 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\overline{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ ( )

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ,σ^2 都有关 D. 与 μ,σ^2 都无关

解 由条件可知 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1,$$

此概率与 μ 无关, 而与 σ^2 有关, 选 A.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} =$________.

解 首先 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\cos x f'(\sin y - \sin x) + y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y f'(\sin y - \sin x) + x$, 因此 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\cos x} + \dfrac{x}{\cos y}$.

10.微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$__________.

解 方程变量分离可得 $\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $y^2 + 2 = C\mathrm{e}^x$. 由 $y(0) = 1$ 可知 $C = 3$, 方程的解为 $y = \sqrt{3\mathrm{e}^x - 2}$. (注意初值条件, 要舍去负的解)

11.幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x)$=________.

解 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

12.设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2 = 4(z \geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$________.

解 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 4\}$, 因此

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 ________.

解 由条件可知 $\boldsymbol{A}$ 有且只有两个线性无关的列向量, 因此 $r(\boldsymbol{A}) = 2$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}, k \in \mathbb{R}$.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$

为 X 的数学期望, 则 $P\big(F(X) > E(X)-1\big) =$________.

解 首先 $E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$. 再令 $Y = F(X)$, 则当 $y \leqslant 0$ 时, $P(Y \leqslant y) = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时, $P(Y \leqslant y) = 1$ (注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0 < y < 1$ 时,

$$P(Y \leqslant y) = P\big(F(X) \leqslant y\big) = P\big(X \leqslant F^{-1}(y)\big) = F\big(F^{-1}(y)\big) = y.$$

因此 $Y = F(X) \sim U(0,1)$, $P\big(F(X) > E(X)-1\big) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

提示: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X) \sim U(0,1)$.

三　解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解 (1) 由条件可得 $\left(y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\big(y' + xy\big) = 1$, 于是 $y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = x + C$. 由 $y(0) = 0$ 可知 $C = 0$, $y = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 计算可得 $y' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2)$, $y'' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(x^3-3x)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, \pm\sqrt{3}$. 再根据二阶导数的符号可得凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$. 拐点为 $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$

16.(**本题满分** 10 **分**)

设 a,b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l} = -3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a,b;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geqslant 0)$ 的面积.

解 (1) 多元函数在一点处方向导数的最大值是沿着梯度方向的方向导数, 且最大值等于梯度的模. 由条件可得 $\mathbf{grad}\, z = (2ax, 2by)$, 于是 $\mathbf{grad}\, z\big|_{(3,4)} = (6a, 8b)$, 因此 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}$ 且 $a,b < 0$, 解得 $a = b$. 再由 $10 = \sqrt{(6a)^2 + (8b)^2}$ 可得 $a = b = -1$.

(2) 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 xOy 面的投影区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, 则曲面的面积为

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r \,\mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi.$$

17.(本题满分 10 分)

[1]求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n\pi+t)}|\sin(n\pi+t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}. \end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

18.(本题满分 10 分)

[2]设 $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\,(n=2,3,\cdots)$;

(2) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解 (1) 当 $0<x<1$ 时, $x^n\sqrt{1-x^2} > x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n\left(x^2-1\right)+x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n+1}a_n - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{n-1}{n+1}a_{n-2}, \end{aligned}$$

[1]此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题.

[2]此题源自1993 年北京师范大学数学分析考研题

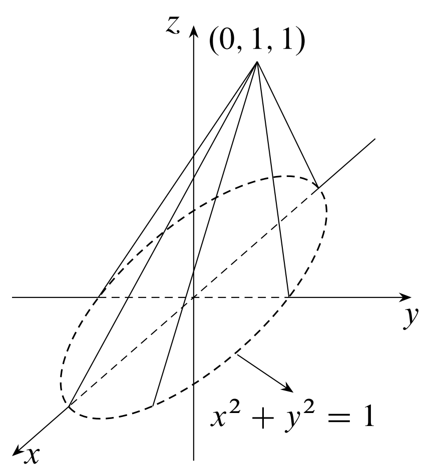
因此 $\dfrac{n+2}{n+1}a_n = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-2}$, 即 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

(2) 由于 $\dfrac{n-1}{n+2} = \dfrac{a_n}{a_{n-2}} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < \dfrac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

19.(**本题满分** 10 **分**)

设 Ω 是锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

解 这题并不是一般的圆锥面, 为此我们给出锥面的一般定义: 过定点 V 的动直线 L 沿着一条确定的曲线 Γ 移动所形成的曲面 S 叫做锥面. 直线 L 称为 S 的母线, 曲线 Γ 称为 S 的准线, 而定点 V 则是 S 的顶点. 在本题中, 锥面与 xOy 面的交线 $x^2+y^2=1, z=0$ 就是母线, 顶点则是 $(0,1,1)$, 如图. 此锥面在 xOy 面的投影区域就是 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 因此这题我们采用切片法 (先二后一) 计算.



$x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2, 0\leqslant z\leqslant 1$

第 19 题图

设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由于 Ω 是关于 yOz 面对称的, 由对称性可知 $\bar{x}=0$. 对固定的 z, 记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\}$, 利用切片法可得

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}.$$

其中积分 $\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中, 令 $y-z=u, \mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, 则

$$\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2} (u+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \pi z(1-z)^2.$$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y}=\bar{z}=\dfrac{\pi/12}{\pi/3}=\dfrac{1}{4}$, 形心坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a,b,c;

(2) 证明: $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

解 (1) 由题意可知 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{cases} b+c+1=1 \\ 2b+3c+a=1, \\ b+2c+3=1 \end{cases}$$

解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(2) 由于 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, 因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=3$, 这说明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 再由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}| \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x-8=-2y \\ -2+x-2=2-1+y\end{cases},$$

解得 $x=3, y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,-1,-2$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=$ $\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$. 故

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 \Rightarrow (\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B},$$

因此当取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p, P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

解 (1) X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 由 X,Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(XY\leqslant z|Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\leqslant z|Y=1)P(Y=1)\\&=pP(-X\leqslant z|Y=-1)+(1-p)P(X\leqslant z|Y=1)\\&=pP(X\geqslant -z)+(1-p)P(X\leqslant z)\\&=p\big(1-F_X(-z)\big)+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ 1+(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-EX\cdot EZ\\&=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=1-2p,\end{aligned}$$

因此当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$, 即 $\rho_{XZ}=0$. 因此 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}\subset\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)\neq P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

因此对任意 $p\in(0,1)$, X,Z 不独立.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

解 (1) 由概率密度的归一性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, 即

$$\begin{aligned}\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x &= \frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,\end{aligned}$$

得 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 对应的观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma^2) = \begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2\cdots, x_n \geqslant \mu \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant \mu$ 时, 取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0,$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

15　2020 年考研数学一

一　选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 (　)

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\, dt$

解　首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim\limits_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt \sim \int_0^x t^2 \,dt = \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt \sim \int_0^x \sqrt{t^3}\, dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2 \,dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 \,dt = \frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5,$$

正确答案选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, 则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

解 选项 A 和 B 不涉及到 $f(0)$ 是否有定义, 无法保证 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 处的连续性, 所以可导性更加得不到. 对于选项 C 和 D, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 那么由 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ 可知 $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 存在, 那么

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=A\cdot0=0,$$

正确答案选 C, 而 D 显然可取反例 $f(x)=x$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0)=0$, $\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 则 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在 B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在 D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

解 由于函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 处可微, 且 $f(0,0)=0$ 那么有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}'(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 选 A.

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时, $|r|\geqslant R$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时, $|r|<R$

C. $|r|\geqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散 D. $|r|\leqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

解 注意到当 $|r|<R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 绝对收敛, 那么此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}r^{2n}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_nr^n|<+\infty,$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{2n}r^{2n}|$ 收敛. 也就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 是绝对收敛的, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 自然也是收敛的, 那么选项 A 的逆否命题正确, 因此正确答案选 A. 对于选项 B 和 C, 如果取 $a_{2n-1}=1, a_{2n}\equiv0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 对任意 r 均收敛. 对于选项 D, 如取 $a_n\equiv1$, 那么 $R=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 在 $r=R=1$ 处发散.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则 ( )

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$

B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$

D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$ 说明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}^{-1}=\boldsymbol{BP}$, 选 B, 其他选项易知都不对.

6. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}, i=1,2,3$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

解 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 这两条直线交于一点, 说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 点 $P_1(a_2,b_2,c_2)\in L_1, P_2(a_3,b_3,c_3)\in L_2$, 由于 L_1,L_2 共面, 所以

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3-a_2\\ b_1 & b_2 & b_3-b_2\\ c_1 & c_2 & c_3-c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 选 C. 而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可能是零向量, 因此 A 和 B 均不对.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\dfrac{3}{4}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{5}{12}$

解 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC)=\frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(B\cup C)-[1-P(A\cup B\cup C)]=P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\\&=\frac{7}{12}-P(B)-P(C)+P(BC)=\frac{1}{6},\\ P(\bar{A}B\bar{C})&=\frac{7}{12}-P(A)-P(C)+P(AC)=\frac{1}{6},\\ P(\bar{A}\bar{B}C)&=\frac{7}{12}-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{12},\end{aligned}$$

因此 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$, 选 D.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)$ 的近似值为 ( )

A. $1-\Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1-\Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$

解 注意到 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}\sim B\left(100,\dfrac{1}{2}\right)$, 那么 $EY=50, DY=25$, 且由中心极限定理知 $\dfrac{Y-50}{5}$ 近似服从标准正态分布, 于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)=P(Y\leqslant 55)=P\left(\frac{Y-50}{5}\leqslant 1\right)\approx\Phi(1),$$

选 B.

二 填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=$________.

解 通分以后利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(1+x)^2}-\mathrm{e}^x\right)=-1.\end{aligned}$$

10.设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

解 由参数方程求导公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t=1$ 可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\,(a>0)$, 且 $f(0)=m, f'(0)=n$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解 微分方程 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$. 如果 $a>2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}<0$, 此时方程的通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

如果 $a=2$,则 $\lambda_1=\lambda_2=-1<0$, 此时方程的通解为

$$f(x)=(C_1+C_2)\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

如果 $0<a<2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4-a^2}\mathrm{i}}{2}$, 特征根的实部分为负, 此时方程的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

总之一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 那么

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]\,\mathrm{d}x=-\big[f'(x)+af(x)\big]\Big|_0^{+\infty}=n+am.$$

12.设函数 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

解 令 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x=x\,\mathrm{e}^{x^2y^2}$, 于是 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\mathrm{e}^{x^3y^2}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$, 代入 $(x,y)=(1,1)$ 得 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}$.

13.行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

解 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\0&0&a&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a&-1+a^2&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\0&0&a&a\end{vmatrix}$$
$$=-\begin{vmatrix}a&-1+a^2&1\\a&1&-1\\0&a&a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&a^2-2&1\\a&2&-1\\0&0&a\end{vmatrix}=a^4-4a^2.$$

14.设 X 服从区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y=\sin X$, 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$, 显然 $E(X)=0$, 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=E(X\sin X)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

三 解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

于是当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0,B=-1,C=0$, 那么 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 不是极值点; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A=1,B=-1,C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

16.(本题满分 10 分)

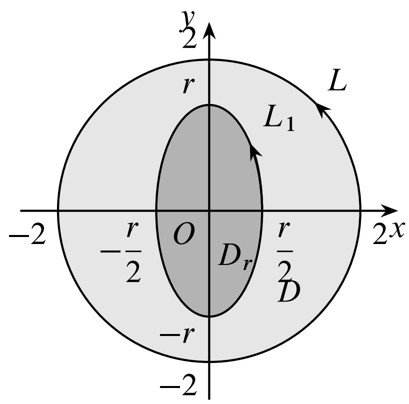
计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是 $x^2+y^2=2$, 方向为逆时针方向.

解 令 $P(x,y)=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-4x^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}=0.$$

如图, 取闭曲线 $L_1:4x^2+y^2=r^2$, r 充分小使得 L_1 在 L 所包围的区域内, 方向为逆时针. 设 L 与 L_1 所围成的区域为 D, L_1 所围成的椭圆区域为 D_r, 则利用格林公式, 可知原曲线积分

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L-L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$



第 16 题图

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2}\int_{L_1}(4x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}[1-(-1)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}r\cdot r = \pi.
\end{aligned}
$$

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x|<1$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 并求其和函数.

解 方法一 首先有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right| = 1$, 因此幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1. 即当 $|x|<1$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛. 现在令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 则当 $|x|<1$ 时,

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}nax_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_nx^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n = 1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x).
\end{aligned}
$$

因此 $S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}$, 解此一阶线性微分方程得 $S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}-2$. 再由 $S(0)=C-2=0$ 得 $C=2$, 因此和函数 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-2, |x|<1$.

方法二 收敛半径同方法一, 直接求和函数. 注意到

$$
a_n=\frac{n-\frac{1}{2}}{n}a_{n-1}=\frac{2n-1}{2n}a_n=\cdots=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{3}{4}a_1=2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},
$$

那么当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin^2 t}{1-x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-x\sin^2 t}-1\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t+(1-x)\sin^2 t}-2 \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{1+(1-x)\tan^2 t}-2 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\arctan\left(\sqrt{1-x}\tan t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2 \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\pi}{2}-2 = \frac{2}{\sqrt{1-x}}-2.
\end{aligned}$$

提示: 如果熟记麦克劳林级数

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, -1<x<1$$

的话, 方法二的计算会更快.

18.(**本题满分 10 分**)

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 令 $F(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$, 那么

$$F_x'=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ F_y'=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ F_z'=1.$$

曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为圆环 $D_{xy}=\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 则

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{F_x'}{F_z'}+[yf(xy)+2y+x]\frac{F_y'}{F_z'}+zf(xy)+z\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+[yf(xy)+2y+x]\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+zf(xy)+z\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{14}{3}\pi.$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0, M = \max\limits_{x\in[0,2]} |f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geqslant M$;

(2) 若对任意 $x \in (0,2), |f'(x)| \leqslant M$, 则 $M = 0$.

证 (1) 设 $M = \max\limits_{x\in[0,2]} |f(x)| = |f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 2)$, 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0) - f(0)}{x - x_0}\right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left|\frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0}\right| = \frac{M}{2 - x_0}.$$

注意到

$$\left|f'(\xi_1)\right| + \left|f'(\xi_2)\right| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2 - x_0} \geqslant \frac{2M}{\sqrt{x_0(2 - x_0)}} \geqslant 2M,$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)| \geqslant M$.

(2) 如果 $M > 0$. 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \dfrac{M}{x_0} \leqslant M$, 因此 $x_0 \geqslant 1$; $|f'(\xi_2)| = \dfrac{M}{2 - x_0} \leqslant M$, 因此 $x_0 \leqslant 1$. 于是只能 $x_0 = 1$, 即 $|f(1)| = M$.

$$M = |f(1) - f(0)| = \left|\int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 M \, \mathrm{d}x = M,$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)| \equiv M, x \in [0,1]$. 而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1) = 0$, 因此 $M = 0$, 矛盾. 于是 $M = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geqslant b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 (1) 记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) \\ |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = a + b \\ 1 \times 4 = ab \end{cases}, a \geqslant b \Rightarrow a = 4, b = 1.$

(2) 易知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 方程组 $(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 1)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -2)^{\mathrm{T}}$; 当

$\lambda_2 = 5$时, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_2 = (2,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1} = (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$, 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$[1].

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

解 (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2, -3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明:随机变量 Y 服从标准正态分布.

解 (1) (X_1, Y) 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) = P(X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) \\ &= P(X_3 = 0, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) + P(X_3 = 1, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) \end{aligned}$$

[1] 事实上这里的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 不是唯一的, 这与 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 的取法有关.

$$
\begin{aligned}
&= P(X_3=0, X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant y) + P(X_3=1, X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y) \\
&= \frac{1}{2}P(X_1 \leqslant x)P(X_2 \leqslant y) + \frac{1}{2}P(X_1 \leqslant \min\{x,y\}) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x), & x \leqslant y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y), & x > y \end{cases}.
\end{aligned}
$$

(2) Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$, 因此 Y 服从标准正态分布.

23.(**本题满分 11 分**)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$
F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s+t|T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

解 (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$
P(T > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},
$$

$$
\begin{aligned}
P(T > s+t|T > s) &= \frac{P(T > s+t, T > s)}{P(T > s)} \\
&= \frac{P(T > s+t)}{P(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = \mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}.
\end{aligned}
$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.
$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m + n\ln m + (m-1)\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm\ln\theta$,

令

$$
\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^{n} t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^m\right)^{\frac{1}{m}},
$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.