微积分笔记

Calculus note

作者：唐绍东 & TangShaodong
邮箱：1096084877@qq.com
时间：June 9, 2019
版本：3.14

ElegantLaTeX Program

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目　录

1 实数集与函数 **1**

1.1 实数 1

1.2 函数 10

2 极限论 **15**

2.1 数列的极限 15

2.2 函数的极限 32

2.3 极限的运算法则 36

2.4 极限存在准则　两个重要极限 43

2.5 Toeplitz 定理和 Stolz 定理 71

2.6 无穷小的比较 90

2.7 函数的连续性与间断点 95

2.8 一致连续性 99

3 导数与微分 **102**

3.1 高阶导数 109

3.2 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率 114

3.3 函数的微分 115

4 微分中值定理与导数的应用 **116**

4.1 微分中值定理 116

4.2 洛必达法则 137

4.3 泰勒公式 143

4.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 163

4.5 函数的极值与最大值最小值 172

4.6 Lagrange 差值公式 174

4.7 函数的凹凸性 176

4.8 渐近线 177

4.9 曲率 178

4.10 方程的近似解 179

5 不定积分 **181**

5.1 不定积分的概念与性质 181

5.2 分段函数的不定积分 182

5.3 换元积分法 183

5.4 分部积分法 192

5.5 有理分式 194

5.6 Risch 算法 203

6 定积分 204
6.1 定积分的概念与性质 . . . 204
6.2 微积分基本公式 . . . 280
6.3 定积分的换元法和分部积分法 . . . 287
6.4 定积分的应用 . . . 304
6.5 反常积分的审敛法 Γ 函数 . . . 311

7 微分方程 332
7.1 微分方程的基本概念 . . . 332
7.2 可分离变量的微分方程 . . . 332
7.3 齐次方程 . . . 334
7.4 一阶线性微分方程 . . . 334
7.5 恰当方程与积分因子 . . . 338
7.6 可降阶的高阶微分方程 . . . 341
7.7 高阶线性微分方程 . . . 342
7.8 常系数齐次线性微分方程 . . . 343
7.9 常系数非齐次线性微分方程 . . . 344
7.10 欧拉方程 . . . 353
7.11 二阶线性偏微分方程 . . . 353

8 差分方程 355
8.1 差分方程概述 . . . 355
8.2 一阶常系数线性差分方程 . . . 356
8.3 二阶常系数线性差分方程 . . . 357
8.4 差分方程应用举例 . . . 362

9 向量代数与空间解析几何 364
9.1 向量及其线性运算 . . . 364
9.2 数量积向量积[1] 混合积 . . . 364
9.3 平面及其方程 . . . 365
9.4 空间直线及其方程 . . . 367
9.5 曲面及其方程 . . . 369
9.6 空间曲线及其方程 . . . 370

10 多元函数微分法及其应用 371
10.1 多元函数的基本概念 . . . 371
10.2 偏导数 . . . 378
10.3 全微分 . . . 379
10.4 隐函数的求导公式 . . . 383
10.5 多元函数微分学的几何应用 . . . 383
10.6 方向导数与梯度 . . . 384
10.7 多元函数的极值及其求法 . . . 385
10.8 二元函数的泰勒公式 . . . 392

[1]同济 7 版的《高等数学》p18

11 重积分 **395**
11.1 二重积分的概念与性质 395
11.2 二重积分的计算法 398
11.3 三重积分 415
11.4 n 重积分 421
11.5 重积分的应用 424
11.6 含参变量的积分 427

12 曲线积分与曲面积分 **444**
12.1 对弧长的曲线积分 444
12.2 对坐标的曲线积分 447
12.3 格林公式及其应用 449
12.4 对坐标的曲面积分 454
12.5 对面积的曲面积分 456
12.6 高斯公式 460
12.7 斯托克斯公式[2] 465

13 数项级数 **468**
13.1 无穷带来的各种悖论 468
13.2 常数项级数的概念和性质 468
13.3 常数项级数的审敛法 475
13.4 条件收敛与绝对收敛 495

14 函数项级数 **499**
14.1 函数项级数的一致收敛 499
14.2 幂级数 507
14.3 函数项级数的进一步讨论 538

15 傅里叶级数 **556**
15.1 函数展开成傅里叶级数 556
15.2 正弦级数与余弦级数 557
15.3 一般周期函数的傅里叶级数 562
15.4 傅里叶级数的微分与积分 569
15.5 傅里叶积分与傅里叶变换 570

[2] $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 有方向. 即 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 不可以写成 $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$, 其它同理

第 1 章 实数集与函数

1.1 实数

1.1.1 有理数与无理数[1]

例1.1 证明: $\sqrt[n]{2}$ 为无理数

解 当 $n=2$ 时, $\sqrt{2}$ 显然为无理数. 下面讨论 $n\geqslant 3$.

采用反证法. 若 $\sqrt[n]{2}$ 为有理数, 于是存在两个互素（或互质）的正整数 p,q 使得

$$\sqrt[n]{2}=\frac{q}{p}\Longleftrightarrow 2=\frac{q^n}{p^n}\Longleftrightarrow q^n=p^n+p^n$$

最后的等式与费马大定理 (Fermat's Last Theorem) 矛盾, 证毕

定理 1.1. Fermat's Last Theorem

当 $n\geqslant 3$ 时, $x^n+y^n=z^n$ 无整数解 ♡

例1.2 若 x 为无理数, 则存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}(q>0)$, 使得 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.

解 反证法[2]. 假定只有有限个有理数满足上述不等式, 即

$$\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{1}{q_i^2}\quad (i=1,2,\cdots,m).$$

令 $\delta=\min\left\{|x-\frac{p_i}{q_i}|:i=1,2,\cdots,m\right\}$, 取 $N:N>\frac{1}{\delta}$, 且作整数 $p,q(0<q<N)$, 使得

$$|qx-p|<\frac{1}{N},\quad \left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}<\frac{1}{q^2}$$

但因 q 是正整数, 故又有 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}<\frac{\delta}{q}<\delta$. 根据 δ 之定义, $\frac{p}{q}\neq\frac{p_i}{q_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 这与源假设矛盾, 证毕.

1.1.2 实数基本定理

实数基本定理分别是确界原理、单调有界定理、有限覆盖定理、聚点定理、致密性定理、闭区间套定理和柯西收敛准则 7 个定理

例1.3 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n-a_m|>\frac{1}{n}$, $(n<m)$, 求证: $\{a_n\}$ 为无界数列.

解 法 1(by ytdwdw) 反证法. 若 $\{a_n\}$ 为有界数列, 则它有收敛子列, 不妨设它的收敛子列 $\{a_{m_k}\}$ 收敛到 0, 于是 $|a_n-a_{m_k}|>\frac{1}{n}$, $m_k\neq n$. 令 $k\to+\infty$ 得到 $|a_n|\geqslant\frac{1}{n}$.

任取 $n>1$. 将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 从小到大排列, 设为 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$, 则

$$|a_{k_1}-a_{k_n}|=\sum_{j=1}^{n-1}|a_{k_j}-a_{k_{j+1}}|\geqslant\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{k_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\frac{1}{k_n}\geqslant\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}$$

立即得到矛盾

法 2(by ytdwdw) 由假设, 可得 $|a_n-a_m|>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}$ $(m\neq n)$. 因此, 区间列 $\left\{[a_n-\frac{1}{2n},a_n+\frac{1}{2n}]\right\}$ 两两不交. 这表明 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a_n-\frac{1}{2n},a_n+\frac{1}{2n}\right]$ 是无界集, 从而 $\{x|\exists n\geqslant 1,\text{ s.t. }|a_n-x|\leqslant 1\}$ 是无界集.

[1]无理数的发现导致了第一次数学危机

[2]周明强《数学分析习题演练》第一册 P5

因此, $\{a_n\}$ 为无界数列.

法 3(by 楚坛) 由题设可得 $|a_n-a_m|>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)$. 任取 $n>1$, 将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 从小到大排列, 设为 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$, 则

$$\begin{aligned}|a_{k_1}-a_{k_n}|&=\sum_{j=1}^{n-1}|a_{k_j}-a_{k_{j+1}}|\geqslant\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j}+\frac{1}{k_{j+1}}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j}+\frac{1}{k_1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_j}+\frac{1}{k_1}\right)\geqslant\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

由此知

$$\sup_{i\neq m}|a_i-a_m|\geqslant\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j},\ \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

令 $n\to\infty$ 即知 $\sup\limits_{i\neq m}|a_i-a_m|=+\infty$, 即数列 $\{a_n\}$ 无界

定理 1.2. Dedekind 确界原理

非空有上 (下) 界的数集必有上 (下) 确界 ♡

例1.4 确界定理 $\Rightarrow$ 单调有界定理.

证明 不妨设数列 $\{a_n\}$ 是单调增有上界, 由确界定理知具有上确界, 记为 $\alpha=\sup\{a_n\}$, 显然 α 就是其极限. 事实上, $\forall\varepsilon>0$, 由上确界定义知, $\exists a_N$, 使 $a_n>a-\varepsilon$, 由单增性知, 当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\alpha-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant\alpha$$

另一方面, 由于 α 是 $\{a_n\}$ 的上界, 故对 $\forall a_n$ 都有 $a_n\leqslant\alpha<\alpha+\varepsilon$. 所以当 $n\geqslant N$ 时,

$$\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon,\ |a_n-a|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

例1.5 设 A,B 为非空有界数集, $S=A\cup B$, 证明:

$$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$$

解 由于 $S=A\cup B$ 显然是非空有界数集, 因此 S 的上, 下确界都存在

一方面, $\forall x\in S$, 有 $x\in A$ 或 $x\in B\Longrightarrow x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B$

从而有 $x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$, 故得

$$\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$$

另一方面, 因为 $A\subset S\Longrightarrow\sup A\leqslant\sup S$, 同理又有 $B\subset S\Longrightarrow\sup B\leqslant\sup S$. 所以

$$\sup S\geqslant\max\{\sup A,\sup B\}$$

综上, 即所得

$$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$$

定理 1.3. 闭区间套定理,Cartor

设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个闭区间套序列, 即

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ n=1,2,\cdots$$

且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的 ξ, 使得 $\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$. ♡

例1.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且有 $f(a)>a$, $f(b)<b$，则存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=x_0$.

解 将 $[a,b]$ 二等分. 若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{a+b}{2}$，取 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$. 否则作 $[a_1,b_1]$:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>\dfrac{a+b}{2} \text{ 时}, & [a_1,b_1]=\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]; \\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{a+b}{2} \text{ 时}, & [a_1,b_1]=\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]. \end{cases}$$

显然，$f(a_1)>a_1$, $f(b_1)<b_1$. 再对 $[a_1,b_1]$ 二等分，用类似的方法取定 $[a_2,b_2],\cdots$，从而可得二等分区间套序列 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$，其中 $f(a_n)>a_n$, $f(b_n)<b_n(n=1,2,\cdots)$. 根据闭区间套定理我们有 $x_0\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$，以及 $a_n<f(a_n)\leqslant f(x_0)\leqslant f(b_n)<b_n$. 令 $n\to\infty$，立即导出 $x_0=f(x_0)$.

定理 1.4. Weierstrass 聚点定理

有界无穷点集至少有一个聚点. ♡

定理 1.5. Cantor 区间套定理

任何闭区间套必有唯一的公共点. ♡

定理 1.6. Heine-Borel 有限覆盖定理

闭区间上的任一开覆盖，必存在有限子覆盖. ♡

1.1.3 常用公式

1. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
2. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
5. $\cos n\pi=(-1)^n$

例1.7 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

解 由恒等式

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^3-(k-1)^3\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

整理可得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

例1.8 证明: $\sin^3\theta=\dfrac{3}{4}\sin\theta-\dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

证明 利用棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

令 $n=3$, 将左端展开得到

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3&=\cos^3\theta+3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta\\&=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta\end{aligned}$$

分别比较等式两边的实部与虚部得到

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$$

$$\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$$

例1.9 证明: $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2kx$

解 法 1. 考虑积化和差公式

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

我们有

$$\begin{aligned}1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(nx)&=1+\frac{1}{\sin(x/2)}\sum_{k=1}^{n}2\cos(nx)\sin(x/2)\\&=1+\frac{1}{\sin(x/2)}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin(nx+x/2)-\sin(nx-x/2)\big)\\&=1+\frac{1}{\sin(x/2)}(\sin(nx+x/2)-\sin(x/2))\\&=1+\frac{\sin(nx+x/2)}{\sin(x/2)}-1=\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\end{aligned}$$

法 2. 利用欧拉公式, 我们有

$$\begin{aligned}1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(nx)&=e^{\mathrm{i}0x}+\sum_{k=1}^{n}(e^{\mathrm{i}nx}+e^{-\mathrm{i}nx})=\sum_{k=-n}^{n}e^{\mathrm{i}nx}\\&=\frac{e^{-\mathrm{i}nx}(e^{i(2n+1)x}-1)}{e^{\mathrm{i}x}-1}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x}-e^{-\mathrm{i}nx}}{e^{\mathrm{i}x}-1}\\&=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x}-e^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{e^{\mathrm{i}x/2}-e^{-\mathrm{i}x/2}}=\frac{2\mathrm{i}\sin(n+1/2)x}{2\mathrm{i}\sin(x/2)}=\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\end{aligned}$$

例1.10 证明: $\sin^4x-\cos^4x=-\cos 2x$

解

$$\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)=-\cos 2x$$

例1.11 证明: $\sin^4x+\cos^4x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$

解

$$\begin{aligned}\sin^4x+\cos^4x&=\big(\sin^2x+\cos^2x\big)^2-2\sin^2x\cos^2x\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\end{aligned}$$

例1.12 证明: $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ $(n\in\mathbb{N})$.

解 注意到方程 $x^{2n}-1=0$ 的根为

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k=1,2,\cdots,2n.$$

其中 $x_n=-1, x_{2n}=1, x_{2n-k}=\bar{x_k},\ k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}&=1+x^2+\cdots+x^{2n-2}\\&=\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\bar{x_k})=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2+1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

令 $x=1$ 即得

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right),$$

整理后即得

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$$

例1.13 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^k=-1$

解

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\times1^{n-k}-1=(-1+1)^n-1=-1$$

练习 1.1 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{n(2n-1)}{3}$

证明 Let $\theta\in\mathbb{R}$. By taking imaginary part of the identity $e^{i(2n+1)\theta}=(e^{i\theta})^{2n+1}$, it follows that

$$\sin(2n+1)\theta=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k+1}\theta.$$

Dividing both sides by $(-1)^n\cos^{2n}\theta\sin\theta$, for $t=\tan^2\theta$ we have

$$(-1)^n\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta\cos^{2n}\theta}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}t^k.\tag{*}$$

We know that the LHS vanishes for $\theta=\dfrac{\pi}{2n+1},\cdots,\dfrac{n\pi}{2n+1}$, which gives n different zeros

$$t_k=\tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right),\quad k=1,\cdots,n.$$

Since the RHS of $(*)$ is a monic polynomial of degree n, it follows that

$$(t-t_1)\cdots(t-t_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}t^k.$$

So if we write $a_k=(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}$ so that $(t-t_1)\cdots(t-t_n)=a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+t^n$, then

$$\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_n}=-\frac{a_1}{a_0}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

例1.14 证明: $\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\cot\frac{\pi}{2n}$

证明 由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 所以有

$$\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}=e^{\frac{k\pi}{n}i}$$

从而可得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\pi}{n}i}$$

$$\overset{\text{等比}}{=\!=}\frac{e^{\frac{\pi}{n}i}\left(1-(e^{\pi i/n})^{n}\right)}{1-e^{\frac{\pi}{n}i}}=\frac{1-e^{\pi i}}{e^{-\frac{\pi}{n}i}-1}$$

$$=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{n}-1-i\sin\frac{\pi}{n}}=-1+i\cot\frac{\pi}{2n}$$

分离实部与虚部

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\cot\frac{\pi}{2n}$$

定理 1.7. 三角形不等式

设 a,b 为任意实数, 则 $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ ♡

证明 因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|,-|b|\leqslant b\leqslant|b|$, 所以有 $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$, 即得 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 将式中的 b 改为 $-b$, 上式仍然成立, 所以

$$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

由于 $|a|=|(a+b)-b|\leqslant|a+b|+|b|$, 所以 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$. 同理可得 $|b|-|a|\leqslant|a+b|$, 从而得到 $||a|-|b||\leqslant|a+b|$. 将式中的 b 改为 $-b$ 上式仍然成立, 所以

$$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$$

定理 1.8. Jordan 不等式

设 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$. ♡

定理 1.9. 伯努利 (Bernoulli) 不等式

设 $x>-1,n\in\mathbf{N}^{+},n\geqslant2$, 则 $(1+x)^{n}\geq1+nx$ ♡

例1.15 证明: $(\cos x)^{p}\leqslant\cos(px),\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad 0<p<1.$

证明 方法 1 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$\cos(px)=\cos\big(px+(1-p)\cdot0\big)$$

$$\geqslant p\cos x+(1-p)\cos0=1-p(1-\cos x)$$

又由伯努利不等式 $(1+y)^{1/p}\geqslant1+\frac{1}{p}y,\ y\geqslant-1$ 可得

$$\big(\cos(px)\big)^{1/p}\geqslant\big(1-p(1-\cos x)\big)^{1/p}\geqslant1-\frac{p(1-\cos x)}{p}=\cos x,$$

从而 $(\cos x)^p \leqslant \cos(px),\quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad 0 < p < 1$

例1.16 设 $0 < x, y < 1$, 证明: $x^y + y^x > 1$.

解 由 Bernoulli 不等式得

$$\frac{1}{(\frac{1}{x})^y} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x}-1)^y} > \frac{1}{1+(\frac{1}{x}-1)y} = \frac{x}{x+y-xy} > \frac{x}{x+y}$$

同理可得

$$\frac{1}{(\frac{1}{y})^x} > \frac{y}{x+y}$$

从而

$$x^y + y^x = \frac{1}{(\frac{1}{x})^y} + \frac{1}{(\frac{1}{y})^x} > \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$$

定理 1.10. 柯西 (Cauchy) 不等式

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)$$

♡

例1.17 设 $a_n = \arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 证明: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}$

解 (by 向禹) 由 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{n+1-n}{1+(n+1)n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1) - \arctan n) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

由例15.7知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi^4}{90}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

定理 1.11. 均值不等式

$H_n < G_n < A_n < Q_n$ 被称为均值不等式。简记为“调几算方”。

其中: $H_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$，被称为调和平均数

$G_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$，被称为几何平均数。

$A_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$，被称为算术平均数。

$$Q_n=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}},\ \text{被称为平方平均数。}$$

♡

例1.18 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解

解 (by 曾熊) 由三元均值不等式

$$\begin{cases}\dfrac{7}{2}x^3+\dfrac{7}{2}x^3+\dfrac{108}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}x^3\times\dfrac{7}{2}x^3\times\dfrac{108}{49}}=9x^2 & (1.1a)\\ 7y^3+7y^3+\dfrac{27}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{7y^3\times 7y^3\times\dfrac{27}{49}}=9y^2 & (1.1b)\\ \dfrac{21}{2}z^3+\dfrac{21}{2}z^3+\dfrac{12}{49}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{21}{2}z^3+\dfrac{21}{2}z^3+\dfrac{12}{49}}=9z^2 & (1.1c)\end{cases}$$

(1.1a) + (1.1b) + (1.1c) 可得

$$7x^3+14y^3+21z^3+3\geqslant 9(x^2+y^2+z^2)\iff 7x^3+14y^3+21z^3\geqslant 6 \tag{1.2}$$

式(1.2) 取等条件

$$\begin{cases}\dfrac{7}{2}x^3=\dfrac{108}{49}\Longrightarrow x=\dfrac{6}{7}\\ 7y^3=\dfrac{27}{49}\Longrightarrow y=\dfrac{3}{7}\\ \dfrac{21}{2}z^3=\dfrac{12}{49}\Longrightarrow z=\dfrac{2}{7}\end{cases}$$

例1.19 证明: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

解 注意到

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}&=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}}\\&<\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{aligned}$$

例1.20 对任意正实根 a 及任意大于 1 的整数 n, 下面的不等式成立:

$$\left(1+\frac{n+1}{2n}a\right)^n>\frac{na(1+a)^n}{(1+a)^n-1}$$

且系数 $\frac{n+1}{2n}$ 是不可改进的, 即对任一小于 $\frac{n+1}{2n}$ 的正实数 c, 可取 a 使得 $(1+ca)^n$ 小于不等式的右边.

解 (by 西西) 令 $b=1+a>1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\left(\frac{n-1}{2n}+\frac{n+1}{2n}b\right)^n>\frac{nab^n}{b^n-1}=\frac{nb^n}{1+b+\cdots+b^{n-1}}\\&\Leftrightarrow\big[(n-1)+(n+1)b\big]^n(1+b+\cdots+b^{n-1})>2^n\cdot n^{n+1}b^n\end{aligned}$$

因此

$$n-1+(n+1)b \geqslant 2nb^{\frac{n+1}{2n}} \Rightarrow \left[(n-1)+(n+1)b\right]^n \geqslant 2^n n^n b^{\frac{n+1}{2}} \tag{1.3}$$

$$1+b+\cdots+b^{n-1} \geqslant nb^{\frac{n-1}{2}} \tag{1.4}$$

(1.3) × (1.4) 即可.

✍ **练习 1.2** 已知 $0<a\leq 1$, 求证 $|x+y|^a \leq |x|^a+|y|^a$.

证明

$$|x+y|^a \leqslant (|x|+|y|)^a = |x|(|x|+|y|)^{a-1}+|y|(|x|+|y|)^{a-1} \leqslant |x|^a+|y|^a.$$

✍ **练习 1.3** 求证不等式

1. $\left|x-y\right| \geqslant \left||x|-|y|\right|$
2. $\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x|-\left(|x_1|+\cdots+|x_n|\right)$

证明 1) 由

$$|x-y| = |x+(-y)| \geqslant |x|-|-y| = |x|-|y|$$

及

$$|x-y| = |y-x| \geqslant |y|-|x| = -(|x|-|y|)$$

即得

$$|x-y| \geqslant \left||x|-|y|\right|$$

也可如下证明：由 $|xy| \geqslant xy$ 知

$$x^2-2xy+y^2 \geqslant x^2-2|xy|+y^2$$

即 $(x-y)^2 \geqslant \left(|x|-|y|\right)^2$, 开方即得

$$|x-y| \geqslant \left||x|-|y|\right|$$

2)

$$\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x|-|x_1+\cdots+x_n|$$

而

$$\begin{aligned}|x+x_1+\cdots+x_n| &\leqslant |x_1|+|x_2+\cdots+x_n| \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\end{aligned}$$

所以

$$\left|x+x_1+\cdots+x_n\right| \geqslant |x|-\left(|x_1|+\cdots+|x_n|\right)$$

1.2 函数

双曲函数

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

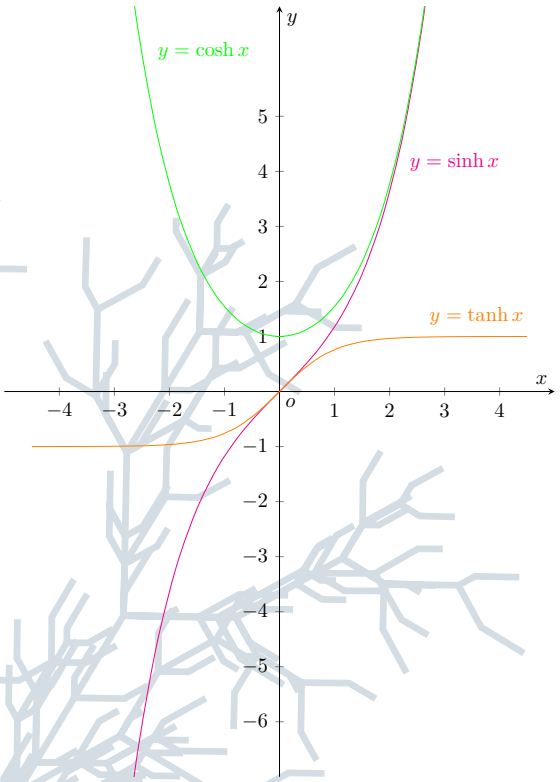
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\coth(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$\operatorname{sech}(x)=\frac{1}{\cosh(x)}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch}(x)=\frac{1}{\sinh(x)}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$



$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

$$1-\tanh^2(x)=\operatorname{sech}^2(x)$$

$$\coth^2(x)-1=\operatorname{csch}^2(x)$$

$$\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh(x)+\tan(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$$

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$$

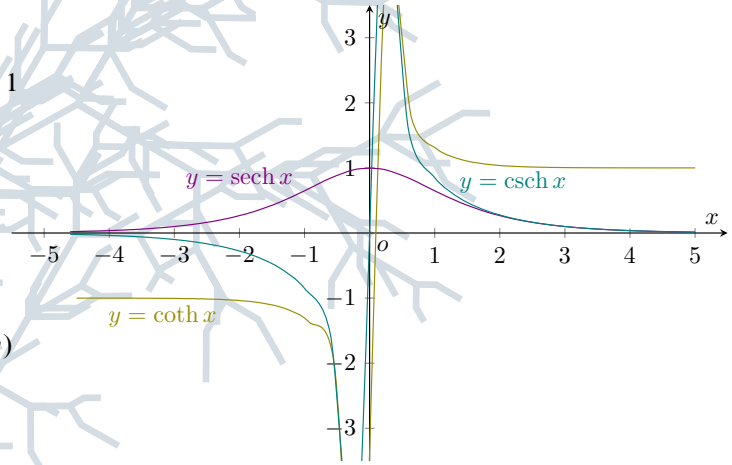
$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\cosh^2(x)-1$$

$$\tanh(2x)=\frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$$

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cosh(x)-1}{2}$$

$$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cosh(x)+1}{2}$$

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$



例1.21 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 n 次复合函数为

$$(f\cdot f\cdot f\cdot\cdots\cdot f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

解 现假定 $n=k$ 时，k 次复合函数满足 $(f\cdot f\cdot f\cdot\cdots\cdot f)(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则对 $n=k+1$ 时，其 $k+1$ 次复合函数为

$$(f\cdot f\cdot f\cdot\cdots\cdot f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

根据数学归纳法即得所证

例1.22 证明: 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ 为非周期函数

解 (反证法) 假定 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $0=f(x+T)-f(x)$ 即

$$0=\Big(\sin(x+T)+\sin\big(\sqrt{2}(x+T)\big)\Big)-\big(\sin x+\sin\sqrt{2}x\big)$$

$$\xlongequal{\text{和差化积公式}} 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)-2\sin\frac{T}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{2}x+\frac{T}{\sqrt{2}}\right)$$

由此知 $\sin\dfrac{T}{2}=0=\sin\dfrac{T}{\sqrt{2}}$. 从而 $2n\pi=\sqrt{2}m\pi$, $\dfrac{m}{n}=\sqrt{2}$ 但 m,n 是正整数

例1.23 已知函数 $f(x)$ 满足关系式

$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{b}{x}\quad(|a|\neq 1\text{ , }a\text{ , }b\text{, , 为常数})$$

确定 $f(x)$ 的奇偶性

解 将 $x=\dfrac{1}{t}$ 代入关系式得 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+f(t)=bt$, 又将 t 改为 x 与关系式联立方程组

$$\begin{cases} af(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{b}{x} \\ af(x)+f(x)=\dfrac{b}{x} \end{cases}$$

可解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-1}\left(\frac{ab}{x}-bx\right)=\frac{ab-bx^2}{(a^2-1)x}\ (a\neq 1)\,.$$

显然

$$f(-x)=\frac{ab-b(-x)^2}{(a^2-1)(-x)}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数

例1.24 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义, $a>0,b>0$. 证明: 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减, 则

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$$

解 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减

$$f(a+b)=(a+b)g(a+b)=ag(a+b)+bg(a+b)$$
$$\leqslant ag(a)+bg(b)=f(a)+f(b)$$

反函数

性质 单调函数一定存在反函数

$$y=f(x)\longrightarrow x=f(y)\xrightarrow{x\leftrightarrow y}\text{反函数}$$

例1.25 求 $y=\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}],[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}],[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 的反函数.

解 当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\subset[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$$x=\arcsin y\,,\quad x\in[0,\pi/2]$$

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]\Rightarrow x-\pi\in[-\pi/2,\pi/2]$. 又 $y=\sin x=-\sin(x-\pi)$

$$y=-\sin(x-\pi)\Rightarrow x-\pi=\arcsin(-y)\Rightarrow x=\pi-\arcsin y$$

$$x=\pi-\arcsin y\,,\quad x\in[\pi/2,3\pi/2]$$

当 $x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]\Rightarrow x-2\pi\in[-\pi/2,0]\subset[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 又 $y=\sin x=\sin(x-2\pi)$

$$y=\sin(x-2\pi)\Rightarrow x-2\pi=\arcsin y\Rightarrow x=2\pi+\arcsin y$$

$$x=2\pi+\arcsin y\,,\quad x\in[3\pi/2,2\pi]$$

例1.26 设可导函数 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$, 可导函数 $g(x)$ 的原函数是 $G(x)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的反函数, 则 ( )

(A) $F'(x)G'(x)=1$ (B) $f'(x)g'\big(f(x)\big)=1$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}G\big(f(x)\big)}{\mathrm{d}x}=-1$ (D) $\dfrac{\mathrm{d}F\big(g(x)\big)}{\mathrm{d}x}=1$

证明 注意到 (反函数与原函数的公式)

$$g\big(f(x)\big)=x\,,\quad f\big(g(x)\big)=x$$

于是

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)'=x'=1=g'\big(f(x)\big)f'(x)\Longrightarrow g'\big(f(x)\big)=\frac{1}{f'(x)}\Longrightarrow B\ \surd$$

例1.27 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ 的反函数及反函数的定义域

解 两边同时平方

$$f^2(x)=y^2=2+2x^2-2\sqrt{x^4+x^2+1}$$

移项

$$(y^2-2-2x^2)=-2\sqrt{x^4+x^2+1}$$

两边同时平方

$$(y^2-2-2x^2)^2=4(x^4+x^2+1)\Longrightarrow x^2=\frac{y^4-4y^2}{4y^2-4}$$

于是

$$x=\pm\sqrt{\frac{y^4-4y^2}{4y^2-4}}$$

函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ 的反函数为 $f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{4x^2-4}}$

符号函数

定义 1.1. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$. ♣

引理 1.1

我们有如下不定积分公式:

$$\int|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{|x|^{\alpha}\operatorname{sgn}x}{\alpha+1}+C$$

$$\int |x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x=\frac{|x|^{\alpha}}{\alpha+1}+C$$

其中 $\alpha>0$ 为常数, C 为任意常数. ♡

例1.28 求定积分

$$\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x$$

解 (by Hansschwarzkopf) 根据

$$\int (x-a)|x-a|\,\mathrm{d}x=\int |x-a|^2\operatorname{sgn}(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{|x-a|^3}{3}+C.$$

$$\int |x-a|\,\mathrm{d}x=\frac{|x-a|^2\operatorname{sgn}(x-a)}{2}+C$$

得到

$$\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x=\frac{|1-a|^3-|a|^3}{3}+a\frac{|1-a|^2\operatorname{sgn}(1-a)+a^2\operatorname{sgn}a}{2}$$

例1.29 计算重积分 $\iint\limits_D |3x-4y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

解 (by Hansschwarzkopf)

$$\begin{aligned}\iint\limits_D |3x-4y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1|4y-3x|\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{8}\int_0^1|4y-3x|^2\operatorname{sgn}(4y-3x)\Big|_0^1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}\int_0^1\left((4-3x)^2+9x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}\left(\frac{(3x-4)^3}{9}+3x^3\right)\Big|_0^1=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

例1.30 计算重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|x-|y||}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[-1,1]$.

解 (by Hansschwarzkopf) 根据对称性,

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{|x-|y||}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\sqrt{|x-y|}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\int_0^1|x-y|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(x-y)\Big|_0^2\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{3}\int_0^1\left((2-y)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{32\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

例1.31 计算重积分 $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 2\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[-1,1]$.

解 (by Hansschwarzkopf) 根据对称性，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 2\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_0^1 |y-x^2|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(y-x^2)\Big|_0^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left((2-x^2)^{\frac{3}{2}}+x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}\end{aligned}$$

例1.32 计算重积分 $I=\iint\limits_D \min\{2,x^2y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=[0,4]\times[0,3]$.

解 (by Hansschwarzkopf) 容易算出

$$I_1=\iint\limits_D \frac{x^2y+2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=60$$

另一方面，

$$\begin{aligned}I_2&=\iint\limits_D \frac{|x^2y-2|}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\int_0^4 \mathrm{d}x\int_0^3 \frac{|x^2y-2|}{2}\,\mathrm{d}y=\int_0^4 \frac{(x^2y-2)^2\operatorname{sgn}(x^2y-2)}{4x^2}\Big|_0^3\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^4 \frac{(3x^2-2)^2\operatorname{sgn}(3x^2-2)+4}{4x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(3-\frac{9x^2}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^4\left(\frac{9x^2}{4}-3+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{5\sqrt{6}}{6}+\frac{71}{2}+\frac{11\sqrt{6}}{6}=\frac{71}{2}+\frac{8\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

从而

$$I=I_1-I_2=\frac{49}{2}-\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

例1.33 计算重积分 $\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1|x^2+y^2-1|\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\operatorname{sgn}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}-y+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)\operatorname{sgn}(x^2+y^2-1)\Big|_0^1\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

第 2 章 极限论

2.1 数列的极限

定义 2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ♣

例2.1 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

证明 首先有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只需要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. 故取正整数 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. 证毕.

例2.2 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 因为

$$|x_n - c| = |c - c| = 0,$$

所以对任意的自然数 n, 都有 $|x_n - c| < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

例2.3 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$

证明 由于

$$|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1},$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$|q|^{n-1} < \varepsilon.$$

两边取自然对数, 得

$$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon.$$

因 $|q| < 1, \ln|q| < 0$, 故

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} + 1.$$

当 $\varepsilon > 1$ 时, $\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ 是负数, 这时可取 $N = 1$. 当 $\varepsilon < 1$ 时, 取

$$N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} + 1\right],$$

则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$. 证毕.

例2.4 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9} = 1.$

证明 因为 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}| = \dfrac{1}{10^n}$, 要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9} - 1| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$, 即 $n > \ln\dfrac{1}{\varepsilon}$.

所以 $\forall\varepsilon>0$(不妨取 $\varepsilon<1$), 取 $N=\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}-1|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}=1$

注意 [1] 在非标准分析中，有无穷多个不同的元素，大于等于任何（有限的）$00.999\cdots$ 而小于等于 1

例2.5 设 $x_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^k}}$ $(k\in\mathbf{N}^+)$, 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

证明 首先,

$$|x_n-1|=\left|\sqrt{1+\frac{1}{n^k}}-1\right|=\sqrt{1+\frac{1}{n^k}}-1=\frac{\frac{1}{n^k}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^k}}+1}<\frac{1}{2n^k}<\frac{1}{n}.$$

因此 $\forall 0<\varepsilon<1$, 要使 $|x_n-1|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 故取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,

则当 $n>N$ 时, 就有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 从而有

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n^k}}-1\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 证毕.

例2.6 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

证明 首先有

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n+1)}<\frac{5}{4n}.$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{3n-1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 只需要 $\frac{5}{4n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{5}{4\varepsilon}$. 故取正整数 $N=\left\lfloor\frac{5}{4\varepsilon}\right\rfloor$,

则当 $n>N$ 时, 就有

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

例2.7 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$

解 首先有

$$\left|\frac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|\leqslant\left|\frac{n+2}{n^2-2}\right|<\frac{n+2}{n^2-4}=\frac{1}{n-2},\ n\geqslant 3$$

因此, $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\frac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\varepsilon$, 只需要 $\frac{1}{n-2}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}+2$.

故取正整数 $N=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}+2\right\rfloor+1$, 则当 $n>N$ 时, 就有

$$\left|\frac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

例2.8 指出下列证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 中的错误

证明: 要使 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 只要使 $\frac{\ln n}{n}<\ln(1+\varepsilon)$. 从而由

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}.$$

得 $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$. 当 $n>N$ 时, 必有 $0<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$ 成立.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解 (by 雪糕、世家) 不正确.

取 $N=\left[\dfrac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1, n>N$ 时能推出 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$.
但由于 $\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$, 故不能推出 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}$,
即不能推出 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$, 即不能推出 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$.

例2.9 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解 应用几何--算术平均不等式得

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=\left(1\cdots 1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$\leqslant\frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}=1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

故要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, 只要 $n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$ 即可.

对于任意的正数 ε, 取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$
即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

法 2. 注意到 $n>1$ 时, 有 $\sqrt[n]{n}>1$. 因此, 令 $h_n=\sqrt{n}-1>0\ (n>1)$. 从而当 $n>1$ 时, 有

$$n=(1+h_n)^n\geqslant nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

故

$$0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}},\quad n>1$$

故对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon.$$

例2.10 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

解 对固定 a, 存在 $N_0>0$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $n>|a|$, 即 $\dfrac{|a|}{n}<1$. 考察

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N_0}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}$$
$$=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\underbrace{\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}}_{\text{每一项都}<1}\cdot\frac{|a|}{n}$$
$$<\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{M}{n}\quad\left(\text{其中}M=\frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\right)$$

故要使 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|\leqslant\dfrac{M}{n}<\varepsilon$, 只要 $n>\dfrac{M}{\varepsilon}$ 即可.

对于任意的正数 ε, 取$N=\max\left\{N_0,\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$
即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

例2.11 用定义验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}$$

解 任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2n-7}-\frac{1}{3}\right|=\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}$$

当 $n\geqslant 7$ 时, $n+7\leqslant 2n$, $3n^2-n-7\geqslant 3n^2-2n\geqslant 2n^2$

故要使

$$\left|\frac{n^2}{3n^2n-7}-\frac{1}{3}\right|\leqslant\frac{2n}{6n^2}=\frac{1}{3n}<\varepsilon$$

只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

对于任意的正数 ε, 取 $N=\max\left\{7,\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}$$

例2.12 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.

解 [1] 设 m,n 是正整数, 使得 $m>1$, $|n-m\pi|<\dfrac{\pi}{2}$, 那么, $m<n$, 注意到 (美国数学月刊,1983,648)

$$|n-m\pi|>m^{-41},$$

因此,

$$1>|\sin n|>|\sin(n-m\pi)|>\frac{2}{\pi}|n-m\pi|>\frac{2}{\pi}m^{-41}$$

由此, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$, 而 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$ 是显然的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin n|}=1$.

例2.13 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^8}=0$$

引理 2.1

设集合 $S\subset\mathbb{R}$ 满足，对于每个 $s\in S$，至多存在有限个约分数 $\dfrac{p}{q}$ 满足 $0<\left|x-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^3}$，则 x 的无理数测度 (irrationality measure) 定义为 $\mu(x)=\inf\limits_{\mu\in S}\mu$，即集合 S 的下确界

目前已知 $\mu(\pi)\leqslant 7.6063$ ♡

证明 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan n}{n^8}\neq 0$。不失一般性还假设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\tan n}{n^8}=A>0$,

先假设 A 为有限，则存在正整数的子列 $\{a_n\}$，使得

$$\forall A>\varepsilon>0\,,\ \exists N\,,\ n>N\Longrightarrow\left|\frac{\tan a_n}{a_n^{a_n}}\right|<\varepsilon\Longrightarrow a_n^{a_n}(-\varepsilon+A)<\tan a_n$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{a_1^{a_1}}$，选择一个 $b_1\in\{a_n\}$ 使得

$$-1+A<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

[1] 《高等数学中的若干问题解析》P6

再取 $\varepsilon=\dfrac{1}{a_2^{a_1}}$，选择一个 $b_2\in\{a_n\}>b_1$ 使得

$$-1+A\times 2^8<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

然后再取 $\varepsilon=\dfrac{1}{a_3^{a_1}}$，选择一个 $b_3\in\{a_n\}>b_2$ 使得

$$-1+A\times 3^8<-1+Aa_1^{a_1}<\tan b_1$$

归纳可得一个单调递增的数列 $\{b_n\}$，使得 $\{b_n\}\subset\{a_n\}$，
且对于每个 b_n 有 $\dfrac{\tan b_n+1}{A}>n^8$，可见我们可以要求所有的 $\tan b_n$ 都 >0.
而且还可以假设 $\{\tan b_n\}$ 也是递增的，否则从中抽出递增的子列即可
现在再构造一个新数列 $\{c_n\}$，且 $0<c_n<\dfrac{\pi}{2}$，而且 $b_n=c_n\pmod{\pi}$
因为 $\tan x$ 为周期 π 的函数，则 $\tan b_n=\tan c_n$.
此时有 $0<c_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\tan b_n+1}{A}>n^8$，$\{c_n\}$ 单调递增
又有 $b_n=c_n\pmod{\pi}$ 而 b_n 为整数 $\Longrightarrow c_n=M_n-\pi N_n$，其中 $M,N\in\mathbb{N}$
利用 $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\ (x>0)$ 以及不等式 $\arctan x<\pi$ 有

$$\tan c_n>An^8-1\Longrightarrow c_n>\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{An^8-1}\right)>\frac{\pi}{2}-\frac{1}{An^8-1}$$

$$\Longrightarrow 0<\frac{\pi}{2}-c_n<\frac{1}{An^8-1}$$

将 $c_M=M_M-\pi N_n$ 代入，有

$$0<\pi-\frac{2M_n}{2N_n+1}<\frac{1}{2N_N+1}\cdot\frac{1}{An^8-1}<\frac{C}{n^{7.7}}\quad \text{其中}C\text{为一常数}$$

由此可见所有 $\left\{\dfrac{2M_N}{2N_N+1}\right\}$ 均满足无理数测度的定义，
所以 $\mu(\pi)\geqslant 7.7$，但这和已知上界 $\mu(\pi)\leqslant 7.6063$ 矛盾。
若 A 为无限，则随便取一个有限的 $D>0$，仿照上面的方法，
同样有数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{\tan b_n+1}{D}>n^8$
综上，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan n}{n^8}=0$

例2.14 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-a_{n-1})=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

证明 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon\Longleftrightarrow|a_n|<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}$$

从而得

$$\begin{aligned}|a_n|&<\frac{1}{2}|a_{n-1}|+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a_{n-2}|+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{1}{2^2}|a_{n-2}|\\&<\cdots\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\quad(n>N)\end{aligned}$$

由此知

$$|a_n|<\varepsilon+\frac{1}{2^{n-N}}|a_{n-N}|\ (n>N)$$

易知存在 $N_1>N$, 使得 $\dfrac{|a_N|}{2^{n-N}}<\varepsilon\ (n>N_1)$. 最后我们有 $|a_n|<2\varepsilon\ (n>N_1)$. 即得所证

例2.15 (Cauchy 命题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

证明 [2][3] 当 $a\in\mathbb{R}$ 时,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知, $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\=&\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+|a_{N_1+2}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

当 $a\to+\infty$ 时,

$\forall M>0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, $a_n>2M+2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-N_1}{n}=1>\frac{1}{2},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}=0>-1,$$

由定理 2.1.1 知 $\exists N\in\mathbb{N}$, $N>N_1$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{n-N_1}{n}>\frac{1}{2},\quad\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}>-1.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}\\&>-1+\frac{n-N_1}{n}(2M+2)>-1+\frac{2A+2}{2}=M\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$

当 $a\to-\infty$ 时,

$\forall M>0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, 故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, $a_n<-2M-2$. 固定 N_1, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-N_1}{n}=1>\frac{1}{2},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}=0<1,$$

由定理 2.1.1 知 $\exists N\in\mathbb{N}$, $N>N_1$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{n-N_1}{n}>\frac{1}{2},\quad\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}>-1.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}\\&<1+\frac{n-N_1}{n}(-2M-2)>1+\frac{-2A-2}{2}=-M\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=-\infty$

注意 当 $a=\infty$ 时, 结论不一定成立, 反例: $a_n=(-1)^{n-1}n$

例2.16 若 $a_n>0\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

解 当 $a=0$ 时, 应用几何--算术平均不等式得

$$0\leqslant \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\leqslant\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ 知, $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right|&\leqslant\left|\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}-a\right|\\&=\left|\frac{\left(\frac{a_1}{1}-a\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}-a\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right)}{n}\right|\\&\leqslant\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\left|\frac{a_2}{a_1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n}\\&=\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-a\right|}{n}\\&\leqslant\frac{\left|\frac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=\left|\dfrac{a_1}{1}-a\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}-a\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

当 $a>0$ 时, 应用均值不等式得

$$1\Big/\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}\leqslant\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\leqslant\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}$$

不等式左边, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a}$ 知, 由极限的定义 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right|\\\leqslant&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{a_1}{a_2}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n}\\=&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{\left|\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{1}{a}\right|}{n}\\\leqslant&\frac{\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\frac{1}{a}\right|}{n}+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=\left|\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a}\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}}-\dfrac{1}{a}\right|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}-\frac{1}{a}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}=\dfrac{1}{a}$, 右边不等式同 $a=0$ 时
于是由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

例2.17 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2}=\dfrac{a^2}{2}$

解 我们有

$$x_n = a + a_n$$

这里 $\{a_n\}$ 是无穷小数列. 于是

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} &= \frac{(a + a_1) + 2(a + a_2) + \cdots + n(a + a_n)}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}a_1 + \frac{2}{n}a_2 + \cdots + \frac{n}{n}a_n}{n}\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{\frac{1}{n}a_1 + \frac{2}{n}a_2 + \cdots + \frac{n}{n}a_n}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} &= \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}a_1 + \frac{2}{n}a_2 + \cdots + \frac{n}{n}a_n}{n} \\ &= \frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

例2.18 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}$

解 对于 $i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$, 记 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$. 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)} = \lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda$$

而

$$A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$$

由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$$

对正整数 m, 设 $m = np + i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, p-1$, 从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列, 下面极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}, \text{ 故 } \lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$$

例2.19 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_1}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = a.$$

其中 $\lambda_k > 0$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda = +\infty$

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, $\forall\,\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 且 $\exists M_1 > 0, \forall n \in \mathbb{M}$ s.t. $|a_n - a| \leqslant M_1$ 用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} - a\right| \\ =&\left|\frac{\lambda_0(a_0 - a) + \lambda_1(a_1 - a) + \cdots + \lambda_n(a_n - a)}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right| \\ \leqslant&\frac{\lambda_0|a_0 - a| + \lambda_1|a_1 - a| + \cdots + \lambda_{N-1}|a_{N-1} - a|}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} + \frac{\lambda_N|a_N - a| + \cdots + \lambda_n|a_n - a|}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \\ \leqslant&\frac{M_1(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{N-1})}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\lambda_N + \cdots + \lambda_n}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{M_2}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda=+\infty$, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n\geqslant N_2$, $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n>\dfrac{2M_2}{\varepsilon}$ 从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}-a\right|<\frac{M_2}{M_2}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=a.$

例2.20 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 用 $\varepsilon-N$ 法证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}=ab$$

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 故数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都有界,
即 $\exists$ 数 $M>0$, 使得 $|a_n|<M$, $|b_n|<M$, $|a|<M$.
对任意 $\forall\varepsilon>0$, 由条件知 $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 使当 $n>N_1$ 时, 有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M},\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

其次, 记 $K=|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{MK}{n}=0$
且取 $N_2=\dfrac{2MK}{\varepsilon}$, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{MK}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
固定 N_1, 取自然数 $N>\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}-ab\right|\\
=&\left|\frac{1}{n}\left[(a_0b_n-ab)+(a_1b_{n-1}-ab)+\cdots+(a_{n-1}b_1-ab)+(a_nb_0-ab)+\frac{ab}{n}\right]\right|\\
=&\left|\frac{1}{n}\left[b_n(a_0-a)+a(b_n-b)+\cdots+b_0(a_n-a)+a(b_0-b)\right]+\frac{ab}{n}\right|\\
\leqslant&\frac{M}{n}\left[|a_0-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_0-b|+\cdot+|b_n-b|+|b|\right]\\
\leqslant&\frac{M}{n}\left[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdot+|b_{N_1}-b|+|b|\right]\\
&+\frac{M}{n}\left[|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_{N_1+1}-b|+\cdot+|b_n-b|\right]\\
=&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n}(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_0}{n}=ab$$

例2.21 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha$$

解[2] 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$ 可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

[2]赵显曾《数学分析拾遗》

因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t}=1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以任给 ε, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

于是, 当 $n>N$ 时, 将 $\frac{a_N}{a_{N+1}},\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}},\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的不等式同序相乘, 得

$$\frac{\frac{1}{N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}<\frac{a_N}{a_n}<\frac{\frac{1}{N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}$$

即

$$\frac{a_N\cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}<a_n<\frac{a_N\cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

从而

$$\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}$$

考虑到

$$\sqrt[n]{\frac{c}{n^t}}=e^{\frac{\ln c-t\ln n}{n}}=1-\frac{t\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以当 $n\to+\infty$ 时, 上述不等式左右两端分别收敛于 $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 存在 $N_1>N$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有

$$\alpha-\varepsilon<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\alpha+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha.$$

✍ **练习 2.1** 设

$$a_n=L_n-\frac{4\ln n}{\pi^2},L_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x,n=1,2\ldots.$$

证明 $\{a_n\}$ 为有界数列.

解 法 1. 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{2}{x}, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且 $0\le f(x)\le 1-\frac{2}{\pi},0\le x\le\pi$. 从而

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=L_{n1}+L_{n2}.$$

其中

$$0\le L_{n1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x\le\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot(1-\frac{2}{\pi})=1-\frac{2}{\pi}.$$

$$L_{n2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u\\
&\geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1} \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\int_{i+1}^{i+2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \frac{4}{\pi^2}\int_1^{2n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+2)\\
&\geq \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 2)
\end{aligned}
$$

类似可得到估计

$$L_{n2} \leq 1 + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 2).$$

从而

$$\frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 2) \leq L_n \leq \frac{4}{\pi^2}(\ln n + \ln 2) + 2.$$

$$\frac{4\ln 2}{\pi^2} \leq a_n \leq \frac{4\ln 2}{\pi^2} + 2, n = 1, 2, \ldots.$$

故 $\{a_n\}$ 有界.

法 2. 事实上, 由于被积函数为偶函数, 故

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

先估计 $\{a_n\}$ 的下界. 根据 $\sin u \leq u, u \in [0, \pi/2]$, 得到

$$
\begin{aligned}
L_n &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u\\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\frac{2}{(i+1)\pi}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\\
&\geq \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \sum_{i=1}^{2n}\int_i^{i+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \frac{4}{\pi^2}(1 + \ln(2n+1))\\
&\geq \frac{4}{\pi^2}(\ln n + 1 + \ln 2).
\end{aligned}
$$

从而

$$a_n \geq -\frac{4 + 4\ln 2}{\pi^2}.$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 现在估计 $\{a_n\}$ 的上界. 以下设 $n \geq 4$.

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = L_{n1} + L_{n2}.$$

其中

$$L_{n1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\cdot(n+\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
L_{n2} &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2i\pi}{2n+1}}^{\frac{(2i+2)\pi}{2n+1}}\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi}\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}}+\frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{i\pi}{2n+1}}+\frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\
&\leq\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{i=2}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}}+\frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\
&=\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_{1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{\pi x}{2n+1}}+\frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\
&=\frac{4}{\pi^2}\left(\ln\tan\frac{\pi(n-1)}{4n+2}-\ln\tan\frac{\pi}{4n+2}\right)+\frac{4}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{2}{\pi(2n+1)\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\
&\leq\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 5-\ln\pi)+\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
L_n\leq\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 5-\ln\pi)+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4},n\geq 4.
$$

$$
a_n\leq\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{5}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4},n\geq 4.
$$

即 $\{a_n\}$ 有上界.

上极限和下极限

定义 2.2. 上、下极限

以数列极限为例, 对于数列 $\{a_n\}$, 其上下极限依次定义为

$$
\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_n\triangleq\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geqslant n}a_k\,,\quad\underline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_n\triangleq\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geqslant n}a_k
$$

♣

例2.22 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n}>2$. 证明: $\{x_n\}$ 无界.

证明 令 $\beta=\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n}$. 取 $\alpha\in(2,\beta)$, 则存在正整数 N, 使得

$$
\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n}>\alpha,\forall n\geq N.
$$

记 $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{4\alpha+1}-1}{2},\lambda_2=\dfrac{\sqrt{4\alpha+1}+1}{2}$. 则 $\lambda_2>\lambda_1>1$. 以上不等式可以等价地写成

$$
x_{n+2}+\lambda_2x_{n+1}>\lambda_1(x_{n+1}+\lambda_2x_n),\forall n\geq N.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}+\lambda_2x_{n+1}&>\lambda_1(x_{n+1}+\lambda_2x_n)\\
&>\lambda_1^2(x_n+\lambda_2x_{n-1})\\
&>\cdots\lambda_1^{n-N+1}(x_{N+1}+\lambda_2x_N),\forall n\geq N.
\end{aligned}
$$

注意到 $\lambda_1>1$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+2}+\lambda_2x_{n+1}\right)=+\infty$. 故 $\{x_n\}$ 无界.

例2.23 设数列 a_n 满足级数 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$ 收敛,

证明: $\lim\limits_{p\to\infty}(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}$ 的极限存在, 并求之.

证明 记

$$||a||_p = \left(|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}},\ (p>0)$$

由于 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0, \sup|a_n|$ 存在
易证 $|a_n| \le ||a||_q\ (q>1, n=1,2,3,\cdots)$, 于是 $\sup|a_n| \le ||a||_q$, 对 $1<q<p$

$$\begin{aligned}
||a||_p &= (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|a_1|^{p-q}|a_1|^q + |a_2|^{p-q}|a_2|^q + \cdots + |a_n|^{p-q}|a_n|^q + \cdots)^{\frac{1}{p}} \\
&\le ||a||_q^{\frac{p-q}{p}} (|a_1|^q + |a_2|^q + \cdots + |a_n|^q + \cdots)^{\frac{1}{p}} \\
&\le ||a||_q^{\frac{p-q}{p}} ||a||_q^{\frac{q}{p}} = ||a||_q
\end{aligned}$$

故 $||a||_p \le ||a||_q$, 所以 $||a||_p$ 关于 p 单调递减且有下界. 于是有

$$a_n \le ||a||_p \le (\sup a_n)^{1-\frac{q}{p}} ||a||_q^{\frac{q}{p}}$$

当 $p \to +\infty$ 时, 有夹逼定理, $\lim\limits_{p\to+\infty} ||a||_p = \sup|a_n|$

例2.24 设正数序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} \leqslant \frac{x_{n+1}+x_n}{2},\ n=1,2,\cdots$$

求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在

解 [4] 易见 $0 < x_n \leqslant \max\{x_1, x_2\}\ (n=1,2,\cdots)$. 于是

$$L \triangleq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n \in [0,+\infty).$$

从而对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 时, 使得当 $n \geqslant N$ 时. $x_n \leqslant L+\varepsilon$. 可以断言

$$x_n \geqslant L-3\varepsilon,\quad \forall n \geqslant N+1.$$

否则, 存在 $m \geqslant N+1$ 满足 $x_m < L-3\varepsilon$. 这样就有

$$x_{m+1} \leqslant \frac{x_m+x_{m-1}}{2} \leqslant \frac{L-3\varepsilon+L+\varepsilon}{2} = L+\varepsilon.$$

由此立即可得

$$x_m \leqslant \max\{x_m, x_{m-1}\} \leqslant L-\varepsilon,\quad \forall n \geqslant m+1.$$

这与 L 为 $\{x_n\}$ 的上极限矛盾. 从而

$$L-3\varepsilon \leqslant x_n \leqslant L+\varepsilon,\quad \forall n \geqslant N+1$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$

例2.25 设 $0<q<1$, 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

$$a_n = b_n - qa_{n+1},\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 有界. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

解 [4] 充分性显然. 下证必要性. 假设 $\{b_n\}$ 收敛. 由于 $\{a_n\}$ 有界, 所以

$$L \triangleq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n,\quad \ell \triangleq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n$$

有限. 另外, 对题中递推公式两边分别取上极限和下极限可得

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} b_n - q\ell, \\
\ell &= \lim_{n\to+\infty} b_n - qL.
\end{aligned}$$

两式相减 $L-\ell = q(L-\ell)$. 由于 $q \in (0,1)$, 所以 $L=\ell$. 即 $\{a_n\}$ 收敛.

例2.26 设 $\{x_n\}$ 满足

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m \cdot x_n, \quad \forall m, n \geqslant 1.$$

证明 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 的极限存在.

解 [4] 容易得到 $0 \leqslant x_n \leqslant x_1^n, \forall n \geqslant 1$. 从而

$$0 \leqslant L \triangleq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} < +\infty.$$

可以断言

$$\sqrt[n]{x_n} \geqslant L, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{2.1}$$

不妨设 $x_1 > 0$. 固定 $m \geqslant 1$, 对于任何 n 有分解 $n = k_n m + \ell_n$, 其中 k_n, ℓ_n 均为整数, $0 \leqslant \ell \leqslant m-1$. 则 k_n, ℓ_n 由 n(及 m) 唯一确定, 且当 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{k_n}{n} \to \frac{1}{m}, \quad \frac{\ell_n}{n} \to 0.$$

由假设条件, 可得 $x_n \leqslant x_m^{k_n} x_1^{\ell_n}$. 从而

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} x_m^{k_n} x_1^{\ell_n} = x_m^{\frac{1}{m}}.$$

这样 (2.1) 时成立. 从而又有 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \geqslant L$. 这就证明了

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n},$$

即 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 收敛.

例2.27 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$0 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m + a_n, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^+.$$

证明: 数列 $\{a_n/n\}$ 的极限存在.

解 任意固定 $k \in \mathbb{N}^+$, 则一切不小于 k 的正整数 n 都可以表示成

$$n = mk + l \ (l \in \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}),$$

这里 m 为正整数. 因此, 由题设条件, 可知

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{mk+l}}{n} \leqslant \frac{a_{mk} + a_l}{n} \leqslant \frac{ma_k + a_l}{n}$$
$$= \frac{ma_k}{mk+l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_k}{k + l/m} + \frac{a_l}{n}$$

因为 k 是固定的, 所以当 $n \to \infty$ 时, $m \to \infty$. 由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_k}{k} \ (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

在上式中, 令 $k \to \infty$, 取下极限, 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_k}{k}$$

这只能有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n}$$

因为 $0 \leqslant a_n/n \leqslant a_1 (n \in \mathbb{N}^+)$, 所以 $\{a_n/n\}$ 有界. 这说明 $\lim_{n\to\infty} (a_n/n)$ 存在.

例2.28 设 $a > 0$, 求

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln(1 + \ln(1 + (\cdots \ln(1 + a/n) \cdots)))$$

式中包含 n 重括号.

解 [5] 可以证明, 当 $0<x<1$ 时,

$$\frac{2x}{2+x}<\ln(1+x)<\frac{2x}{2+x-x^2}$$

令 $t_0=a/n, t_{i+1}=\ln(1+t_i)\,(i\geqslant 0)$. 那么非负数列 $t_i\,(i\geqslant 0)$ 单调减少. 由上述不等式得知

$$t_{i+1}\geqslant\frac{2t_i}{2+t_i},\quad \frac{1}{t_{i+1}}\leqslant\frac{1}{t_i}+\frac{1}{2},$$

于是

$$\frac{1}{t_n}\leqslant\frac{n}{2}+\frac{1}{t_0}=\frac{n(a+2)}{2a}\Longrightarrow nt_n\geqslant\frac{2a}{a+2}.$$

因此 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} nt_n\geqslant\dfrac{2a}{a+2}$.

类似地,

$$t_{i+1}\leqslant\frac{2t_i}{2+t_i-t_i^2},\quad \frac{1}{t_{i+1}}\geqslant\frac{1}{t_i}+\frac{1}{2}-\frac{t_i}{2}\geqslant\frac{1}{t_i}+\frac{1}{2}-\frac{t_0}{2},$$

于是

$$\frac{1}{t_n}\leqslant\frac{n(1-t_0)}{2}+\frac{1}{t_0}=\frac{na-a^2+2n}{2a}\Longrightarrow nt_n\geqslant\frac{2a}{a+2-a^2/n}.$$

因此, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} nt_n\leqslant\dfrac{2a}{a+2}$.

综上, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\ln(1+(\cdots\ln(1+a/n)\cdots)))=\dfrac{2a}{a+2}$.

例2.29 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x-n^2\ln 2}{\ln n}$

解 (by ytdwdw) (i) 易见

$$\lim_{n\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{2}{3}$$

记

$$U(\alpha)=\sup_{x\in(0,\alpha)}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)\quad L(\alpha)=\inf_{x\in(0,\alpha)}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)$$

则

$$\lim_{\alpha\to 0^+}U(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}L(\alpha)=\frac{2}{3}$$

而

$$L(\alpha)\frac{\sin^4 nx}{x}\leqslant\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\leqslant U(\alpha)\frac{\sin^4 nx}{x}\tag{2.2}$$

对任何 $\alpha>0$, 注意到 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^4 nx}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{3+\cos 4x-4\cos 2x}{8x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_1^{n\alpha}\frac{3}{8x}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

这表明对任何 $\beta>\alpha>0$, 成立

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin^4 nx}{x}\mathrm{d}x=0.$$

结合(2.2)得到

$$\frac{3L(\alpha)}{8}\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\
&= \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{3U(\alpha)}{8},\quad \forall\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

令 $\alpha\to 0^+$ 可得

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.
$$

(ii) 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x=\ln 2$, 所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\alpha}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x-n^2\ln 2}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\int_0^{n\alpha}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x-n^2\ln 2}{\ln n}\\
&= \lim_{y\to+\infty}\frac{\int_0^{y\alpha}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x-\ln 2}{y^{-2}\ln y}\\
&= \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{\alpha\sin^4(y\alpha)}{(y\alpha)^3}}{y^{-3}(1-2\ln y)}=0
\end{aligned}
$$

结合 (i)-(ii) 得

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x-n^2\ln 2}{\ln n}=\frac{1}{4}
$$

2.1.1 收敛数列的性质

定理 2.1. 极限的唯一性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一. ♡

证明 法 1. 用反证法. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim_{n\to\infty}x_n=b$, 且 $a<b$. 根据数列极限的定义有

$$
\text{令 } \varepsilon_0=\frac{b-a}{2}>0,\begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N}^+,\forall n>N_1,\text{有 } |x_n-a|<\varepsilon_0.\\ \exists N_2\in\mathbf{N}^+,\forall n>N_2,\text{有 } |x_n-b|<\varepsilon_0.\end{cases}
$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, 同时有

$$
|x_n-a|<\varepsilon_0 \quad 与 \quad |x_n-b|<\varepsilon_0,
$$

即同时有 $x_n<a+\varepsilon_0=\frac{a+b}{2}$ 与 $x_n>b-\varepsilon_0=\frac{a+b}{2}$, 这是不可能的.
所以假设 $a<b$ 不成立. 同理可证假设 $a>b$ 也不成立,
从而 $a=b$, 即极限是唯一的. 证毕.
法 2. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim_{n\to\infty}x_n=b$, 只需证明 $\lim_{n\to\infty}(a-b)=0$, 根据数列极限的定义有

$$
\lim_{n\to\infty}x_n=a\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N},\ 当\ n>N_1\ 时,\ 有\ |x_n-a|<\tfrac{\varepsilon}{2}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}x_n=b\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N},\ 当\ n>N_2\ 时,\ 有\ |x_n-b|<\tfrac{\varepsilon}{2}
$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$
|a-b-0|=|(x_n-a)-(x_n-b)|\leqslant|x_n-a|+|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a-b)=0\Rightarrow a=b$. 因此, 极限是唯一的.

定理 2.2. 收敛数列的有界性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界. ♡

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0=1$, 则 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有不等式

$$|x_n-a|<1.$$

于是, 当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$, 则对一切 x_n, 都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界. 证毕.

定理 2.3. Bolzano-Weierstrass 致密性定理

有界数列必有收敛子列. ♡

证明 将数列的所有项作成一个有界数集，如果该数集是有限集，则表明数列中有无穷多个项取相同的数值，那么取这些项作成的子列就是收敛的，如果此数集是无限集，由聚点定理知它至少有一个聚点 x，那么任意取定一个正实数 ε_1，则数集中有无穷多个数落在 $(x-\varepsilon_1,x+\varepsilon_1)$ 内并且不等于 x，任取其中一个记为 a_{n_1}，即它在原数列中的下标是 n_1，则再取 $\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2}\varepsilon_1,|x-a_{n_1}|\}$，又可以选落在区间 $(x-\varepsilon_2,x+\varepsilon)$ 中并且不等于 x 的项 a_{n_2}，这里 n_2 的选法要保证 $n_2>n_1$，因为是有无穷多个数落在区间内，所以这总是可以办到的。依次类推，得出一个子列 $a_{n_1},a_{n_2},\ldots$，显然这个子列是收敛到 x 的。

定理 2.4. 收敛数列的保号性

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 且 $a>0$ (或 $a<0$), 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 都有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$). ♡

证明 当 $a>0$ 时, 根据数列极限的定义, 取 $\varepsilon_0=\dfrac{a}{2}$, 则存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

同理可证 $a<0$ 的情形. 证毕.

定理 2.5

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>b$ (或 $<b$), 则 $\exists N_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $a_n>b$ (或 $<b$) ♡

推论 2.1

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$), 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 那么 $a\geqslant 0$ (或 $a\leqslant 0$) ♡

定理 2.6. 收敛数列与子列的关系

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 那么它的任一子列也收敛, 且极限也是 a. ♡

证明 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的子列，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
根据数列极限的定义，$\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由于 $n_k \geqslant k$，故当 $k > N$ 时，有 $n_k \geqslant k > N$，从而有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. 证毕.

定理 2.7

数列 $\{a_n\}$ 无上界 $\Leftrightarrow$ 必有子列 $\{a_{n_k}\} \to +\infty\ (k \to +\infty)$ ♡

证明 ($\Leftarrow$) 设 $\{a_n\}$ 有子列 $\{a_{n_k}\} \to +\infty\ (k \to +\infty)$，则 $\forall A > 0, \exists K = K(A) \in \mathbb{N}$, s.t. 当 $k > K$ 时，$a_{n_k} > A$，所以 A 不为数列 $\{a_n\}$ 的上界. 从 A 任取知，数列 $\{a_n\}$ 无上界.

($\Rightarrow$) 设 $\{a_n\}$ 无上界，则 1 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_1} > 1$. 又因 $\max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界，故 $\exists a_{n_2} > \max\{2, a_1, \cdots, a_{n_1}\}$，显然 $n_1 < n_2$. 依此类推就得到 $a_{n_k} > \max\{k, a_1, \cdots, a_{n_{k-1}}\}$，显然，$n_{k-1} < n_k$. 所以 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $a_{n_k} > k$. 由极限定义知，$\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = +\infty$

2.2 函数的极限

定义 2.3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon.$$ ♣

例2.30 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

证明 首先 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$.
故 $\forall \varepsilon > 0$，任取 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

例2.31 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明 首先 $|f(x) - A| = |x - x_0|$.
故 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例2.32 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}(3x - 2) = 1$.

证明 $|f(x) - A| = |(3x - 2) - 1| = 3|x - 1|$.
$\forall \varepsilon > 0$，要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$，只要 $3|x - 1| < \varepsilon$，即 $|x - 1| < \dfrac{1}{3}\varepsilon$.
故取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$，则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时，有

$$|(3x - 2) - 1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}(3x - 2) = 1$. 证毕.

例2.33 证明：当 $x_0 > 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证明 $|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0|$.
$\forall \varepsilon > 0$，要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \varepsilon$,

即 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$. 同时由于 $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$, 这可用 $|x-x_0|\leqslant x_0$ 保证.
故取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $x\geqslant 0$, 且

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$. 证毕.

例2.34 证明: $\lim\limits_{x\to -1}x^2=1$.

证明 因为 $x\to -1$, 我们可以设 $|x-(-1)|=|x+1|<1$, 也就是 $-2<x<0$,
从而有, $|x-1|<3$, 于是

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<3|x+1|<\varepsilon$$

因此, $\forall\,\varepsilon>0$, 要使 $|x^2-1|<\varepsilon$, 只要 $|x+1|<\frac{1}{3}\varepsilon$, 又 $|x-1|<3$,
即只要取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$, 当 $0<|x+1|<\delta$ 时, $|x^2-1|<\varepsilon$ 成立,
故 $\lim\limits_{x\to -1}x^2=1$.

注意 我们也可以设 $|x-(-1)|=|x+1|<\dfrac{1}{2}$, 也就是 $-\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{1}{2}$,
得到

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<\frac{5}{2}|x+1|<\varepsilon\,,\ |x+1|<\frac{2}{5}\varepsilon$$

令: $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{2}{5}\varepsilon\}$

注意 我们也可以设 $|x-(-1)|=|x+1|<2$, 也就是 $-3<x<1$,
得到

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<4|x+1|<\varepsilon\,,\ |x+1|<\frac{1}{4}\varepsilon$$

令: $\delta=\min\{2,\frac{1}{4}\varepsilon\}$

注意 我们也可以设 $|x-(-1)|=|x+1|<\dfrac{1}{3}$, 也就是 $-\dfrac{4}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$,
得到

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<\frac{7}{2}|x+1|<\varepsilon\,,\ |x+1|<\frac{2}{7}\varepsilon$$

令: $\delta=\min\{\frac{1}{3},\frac{2}{57}\varepsilon\}$

例2.35 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-3x+1}=2$.

证明 当 $x\neq 1$ 时, 因为 $x\to 1$, 我们可以设 $|x-1|<\dfrac{1}{4}$, 也就是 $\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{5}{4}$,
从而有, $|2x-1|>\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}-2\right|=\left|\frac{3(x-1)}{2x-1}\right|<6|x-1|<\varepsilon$$

因此, $\forall\,\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-3x+1}-2\right|<\varepsilon$, 只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{6}$, 又 $|x-1|<\dfrac{1}{4}$,
即只要取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-3x+1}-2\right|<\varepsilon$ 成立.
故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-3x+1}=2$.

例2.36 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$

证明 因为

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|&=\left|\frac{7/(16x^2-9)-1}{\sqrt{7/(16x^2-9)}+1}\right|\\&\leqslant\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\frac{16|1+x||1-x|}{|(4x+3)(4x-3)|}\end{aligned}$$

设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$, 则上式右边大于 $\dfrac{16\cdot 3|1-x|}{3\cdot 4|x-\frac{3}{4}|}$.

再设 $|x-1|<\dfrac{1}{8}$, 即 $1-\dfrac{1}{8}<x<1+\dfrac{1}{8}$, 于是上式右边不等式大于 $32|1-x|$.

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{1}{8},\frac{\varepsilon}{32}\}$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $\left|\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$ 成立,

故 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$.

例2.37 证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{6}}\dfrac{1}{5x+1}=6$

解 因为

$$\left|\frac{1}{5x+1}-6\right|=\left|\frac{1-30x-6}{5x+1}\right|=\frac{30\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|}{|5x+1|}$$

为使 $0<|x-(-\frac{1}{6})|<\delta_1$ 中不含 $x=-\frac{1}{5}$, 只需 $\delta_1<|-\frac{1}{6}-(-\frac{1}{5})|=\frac{1}{30}$. 由于 $0<\delta_1<\frac{1}{30}$ 是任意的, 不妨取 $\delta_1=\frac{1}{60}$. 则

$$\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|=\left|x+\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{60}\Longrightarrow-\frac{11}{60}<x<-\frac{9}{60},\quad\left(x\neq-\frac{1}{6}\right)$$

$$|5x+1|>\left|5\left(-\frac{11}{60}\right)+1\right|=\frac{1}{12},\quad x\in\left(-\frac{11}{60},-\frac{9}{60}\right)$$

从而当 $|x-(-\frac{1}{6})|<\frac{1}{60}$ 时,

$$\frac{30\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|}{|5x+1|}<\frac{30}{\frac{1}{12}}\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|=360\left|x-\left(-\frac{1}{6}\right)\right|$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\frac{1}{5x+1}-6|<\varepsilon$ 成立, 只需 $|x-(-\frac{1}{6})|<\frac{\varepsilon}{360}$, 又 $|x-(-\frac{1}{6})|<\frac{1}{60}$. 故取 $\delta=\min\{\frac{1}{60},\frac{\varepsilon}{360}\}$, 当 $0<|x-(-\frac{1}{6})|<\delta$ 时, 就有 $|\frac{1}{5x+1}-6|<\varepsilon$ 成立.

定义 2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当 }|x|>X\text{ 时, 有 }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

例2.38 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证明 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

故取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有 $\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 于是有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 证毕.

例2.39 利用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$

证明 因为 $\forall\varepsilon>0$, 要找到 $M>0$, 使 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|=\frac{7}{|x^2-3|}<\varepsilon$$

而当 $|x|>3$ 时, $|x^2-3|>|x|$, 故要

$$\frac{7}{|x^2-3|}<\frac{7}{|x|}<\varepsilon$$

只需 $|x|>\dfrac{7}{\varepsilon}$. 故 $\forall \varepsilon>0$, 取 $M=\max\left\{3,\dfrac{7}{\varepsilon}\right\}$, 当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|<\varepsilon$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$

例2.40 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$.

证明

$$\left|\frac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|\geqslant\frac{x^3}{6x^2}=\frac{x}{6},\quad x>100$$

因此, $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$, 只要 $\dfrac{x}{6}>M$, 即 $x>6M$,

即只要取 $X=\max\{100,6M\}$, 当 $x>X$ 时, 有 $\left|\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}\right|>M$ 成立,

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{5x^2-4x-4}=\infty$.

2.2.1 函数极限的性质

定理 2.8. 函数极限唯一性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理 2.9. 函数极限的局部有界性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 所以取 $\varepsilon=1$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

记 $M=A+1$, 于是有 $|f(x)|\leqslant M$. 证毕.

定理 2.10. 函数极限的局部保号性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 而 $A>0$ (或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

证明 仅就 $A>0$ 的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 所以给定 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>-\frac{A}{2}+A=\frac{A}{2}>0.$$

类似地可以证明 $A<0$ 的情形.

推论 2.2

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}=A$ $(A\neq0)$, 那么就存在着 x_0 的某一去心领域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)|>\dfrac{A}{2}$

推论 2.3

如果在 x_0 的某去心领域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$)

定理 2.11. 如

$f(x) \geqslant g(x)$, 而 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$. 那么 $A \geqslant B$

例2.41 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $A < B$。
证明：在点 x_0 的某去心领域内 $f(x) < g(x)$

证明 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \text{s.t}\, x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,
所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \text{s.t}\, x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时有 $|g(x) - B| < \varepsilon$
所以

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \qquad B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$$

所以

$$B - A - 2\varepsilon < g(x) - f(x)$$

因为 $\varepsilon > 0$ 任意，所以取 $\varepsilon < \dfrac{B-A}{2}$ 就有 $g(x) - f(x) > 0$.
所以 $g(x) - f(x) > 0$

定理 2.12. 海涅定理

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, 那么相应的函数值数列 $f(x_n)$ 必收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

例2.42 证明 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明 取两个数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$, 其中

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

则有

$$x_n' \neq 0, x_n'' \neq 0 (\forall n), \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n''} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

这说明当 $\{x_n\}$ 取不同数列趋于 0 时, 对应的函数值数列趋于不同的值,
所以应用海涅定理知 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在

2.3 极限的运算法则

例2.43 证明

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}$$

证明

$$\begin{aligned}
3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2\times 4} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times 6}}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} \\
&\vdots \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}
\end{aligned}$$

例2.44 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1+2}{n^3}+\cdots+\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right)$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j} i}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1+2}{n^3}+\cdots+\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2+2\times 3+\cdots+n(n+1)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{2n^3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

例2.45 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\dfrac{3^3+1}{3^3-1}\cdots\dfrac{n^3+1}{n^3-1}$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2}{(n-1)n}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)k+1}{k(k-1)+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)n}\frac{(n+1)n+1}{2(2-1)+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n+2}{2(n-1)n} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

例2.46 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$

解 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{2k(2k+1)(2k+2)}\\&=12\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\right)\\&=12\left[(1-\ln 2)-\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right]=18-24\ln 2\end{aligned}$$

例2.47 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}$

解 因为 $a_1=\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$, 所以有

$$a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=2\cos\frac{\pi}{8},$$

依次类推

$$a_n=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot 2\frac{\pi}{2^{n+3}}=\frac{\pi}{4}$$

例2.48 设 $-1<a_0<1, a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(1-a_n)$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_1a_2\cdots a_n$

证明 (1). 设 $a_0=\cos\theta$. 则 $a_1=\cos\dfrac{\theta}{2}, a_2=\cos\dfrac{\theta}{4},\cdots,a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}4^n(1-a_n)=\lim_{n\to+\infty}4^n\left(1-\cos\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\theta^2}{2}=\frac{\arccos^2 a_0}{2}$$

(2). 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}a_1a_2\cdots a_n&=\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}{2\sin\frac{\theta}{2^n}}\\&=\cdots=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sqrt{1-a_0^2}}{\arccos a_0}\end{aligned}$$

例2.49 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 由于 $\dfrac{2n-1}{2^n}=\dfrac{2n+1}{2^{n-1}}-\dfrac{2n+3}{2^n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$$

显然,

$$\frac{2n-1}{2^n}=\frac{an+b}{2^{n-1}}-\frac{cn+d}{2^n}=\frac{(2a-c)n-(d-2b)}{2^n}$$

$$\frac{2(n-1)-1}{2^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{2^{n-2}}-\frac{c(n-1)+d}{2^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{2^{n-2}}-\frac{cn+d-c}{2^{n-1}}$$

若通项能裂项, 则需满足

$$\begin{cases}a=c\\ b=d-c\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}2=2a-c\\ 1=d-2b\end{cases}$$

解之得, $a=c=2, d=3, b=1$, 因此

$$\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}$$

同时可以看出 $a=c$ 是一般的. 若通项为 $\dfrac{3n-2}{5^n}$. 同样的算法

$$\frac{3n-2}{5^n}=\frac{an+b}{5^{n-1}}-\frac{cn+d}{5^n}=\frac{(5a-c)n-(d-5b)}{5^n}$$

$$\frac{3(n-1)-2}{5^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{5^{n-2}}-\frac{c(n-1)+d}{5^{n-1}}=\frac{a(n-1)+b}{2^{n-2}}-\frac{cn+d-c}{5^{n-1}}$$

若通项能裂项, 则需满足

$$\begin{cases}a=c\\ b=d-c\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}3=5a-c\\ 2=d-5b\end{cases}$$

解之得, $a=c=\dfrac{3}{4}, d=\dfrac{7}{16}, b=-\dfrac{5}{16}$, 因此

$$\frac{3n-2}{5^n}=\frac{\frac{3}{4}n-\frac{5}{16}}{5^{n-1}}-\frac{\frac{3}{4}n+\frac{7}{16}}{5^n}=\frac{1}{16}\left(\frac{12n-5}{5^{n-1}}-\frac{12n+7}{5^n}\right)$$

例2.50 设 $x_1=a, x_2=b, x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})\ (n\geqslant 2)$.
证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 因为

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),\ (n\geqslant 3)$$

求积得

$$\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_{i-1})=\prod_{i=3}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_{i-1}-x_{i-2})\right]=\prod_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_i-x_{i-1})$$

化简得

$$x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)$$

求和得

$$x_n-x_1=(b-a)\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

即

$$x_n = \frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+a$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$$

例2.51 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是将方程 $\tan x = x$ 的全部正根按由小到大的次序编号而成的, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})$.

解 易知 $x_n \in (n\pi, n\pi+\pi/2)$ $(n\in\mathbb{N})$, 故 $x_n \to +\infty$ $(n\to\infty)$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0.$$

而由 $\tan x$ 的连续性可知, $\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n \to 0$ $(n\to\infty)$. 因此可得

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n-\pi) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-x_n\right)-\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-x_{n+1}\right)\right) = 0$$

我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = \pi$

例2.52 把方程 $\tan x = x$ 的正根按从小到大顺序排成数列 $\{x_n\}$. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1}-x_n)$$

证明 (by 向禹) 首先容易得到 $x_n \in \left((n-1)\pi, (n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $x_n-(n-1)\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 故

$$x_n = \tan x_n = \tan\left(x_n-(n-1)\pi\right)$$

所以 $\arctan x_n = x_n-(n-1)\pi$, 且 $x_n-(n-1)\pi \to \frac{\pi}{2}$, $n\to+\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n^2\sin(x_{n+1}-x_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n^2\sin(\arctan x_{n+1}-\arctan x_n+\pi)\\
&= -\lim_{n\to+\infty} n^2\pi^2 \sin\arctan\frac{x_{n+1}-x_n}{1-x_{n+1}x_n}\\
&= -\lim_{n\to+\infty} n^2\pi^2\frac{x_{n+1}-x_n}{1-x_{n+1}x_n} = -\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-n\pi-(x_n-(n-1)\pi)\right)-\pi = -\pi
\end{aligned}$$

例2.53 记 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x 的最大整数, 记 $\{x\} = x-\lfloor x\rfloor$.
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$

证明 利用二项式定理

$$(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\sqrt{3})^k 2^{n-k}$$

分成 k 为偶数项的和 A_n 及 k 为奇数项的和 B_n 两部分, 即

$$(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n$$

显而易见 $(2-\sqrt{3})^n = A_n - B_n$, 由于 $0<2-\sqrt{3}<1$, 则 $A_n > B_n$

$$0<2-\sqrt{3}<1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n = 0 \Longrightarrow A_n - B_n \to 0$$

注意到 C_n^k 为整数, 故 $A_n>1$ 且为整数,

$$\frac{B_n}{A_n}=\frac{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right)}{\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right)}\to 1\,,\quad n\to\infty$$

因为 A_n 为整数, 所以 B_n 随着 n 的增大也与整数相差很小, 即 $\{B_n\}=B_n-\lfloor B_n\rfloor\to 1$. 由此得

$$\{A_n+B_n\}=(A_n+B_n)-\lfloor A_n+B_n\rfloor=B_n-\lfloor B_n\rfloor\to 1$$

例2.54 设 $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, 其中 a_n,b_n 为正整数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

解 法 1 由题意

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{n+1}&=(1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3})=(a_n+b_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\\&=\underbrace{a_n+3b_n}_{a_{n+1}}+\underbrace{(b_n+a_n)}_{b_{n+1}}\sqrt{3}\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+3b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\frac{\frac{a_n}{b_n}+3}{\frac{a_n}{b_n}+1}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=a$, 上式两端取极限得

$$a=\frac{a+3}{a+1}\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a=\sqrt{3}$$

法 2 类似上题

练习 2.2 设 $y_0\geqslant 2, y_n=y_{n-1}^2-2(n\in\mathbb{N}), S_n=\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{1}{y_0y_1}+\cdots+\dfrac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$,

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$

证明 若 $y_0=2$, 则 $y_n=2, n\in\mathbb{N}$. 此时

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

若 $y_0>2$, 这时记 $\alpha=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$, 此时 $y_0=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$. 一般地,

$$y_n=\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

因此

$$\begin{aligned}y_0y_1y_2\cdots y_n&=(\alpha+\alpha^{-1})(\alpha^2+\alpha^{-2})(\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2})\cdots(\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n})\\&=\frac{\alpha^{2^{n+1}}-\alpha^{-2^{n+1}}}{\alpha-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+2}}-1}{\alpha^{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_0y_1y_2\cdots y_n}&=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^{n+2}}-1}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{2^{n+1}}+1-1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\\&=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\right)\end{aligned}$$

因此

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{y_0y_1y_2\cdots y_k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{2^{k+1}}-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{k+2}}-1}\right)$$
$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}-\frac{1}{\alpha^{2^{n+2}}-1}\right)$$

注意到 $\alpha<1$, 最终

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2-1}+1\right)=\alpha=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

定理 2.13. 复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

♡

例2.55 计算: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin3x}{\ln\sin2x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin3x}{\ln\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin3x}{3x}+\ln3+\ln x}{\ln\frac{\sin2x}{2x}+\ln2+\ln x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln\frac{\sin3x}{3x}}{\ln x}+\frac{\ln3}{\ln x}+1}{\frac{\ln\frac{\sin2x}{2x}}{\ln x}+\frac{\ln2}{\ln x}+1}=1$$

注意 (抓大头) $x\to+\infty$, $\ln^\alpha x<x^\beta<a^x<x^x$, 其中 $\alpha,\beta>0$, $a>1$

2.3.0.1 拆项法求极限

例2.56 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x}}-1}{x}$$
$$\xlongequal{e^x-1\sim x}e\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x}$$
$$\xlongequal{\text{拆项}}e\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-2x+2x-\ln(1+2x)}{2x}$$
$$=2e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{2x}+e\lim_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{2x}$$
$$\xlongequal{x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2}2e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}+e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x}=\frac{e}{2}$$

例2.57 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$

解

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-\sin^2x+\sin^2x-2(1-\cos x)+4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-2(1-\cos x)}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\sin^4x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-6\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3}-\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^2)\right)}{x^4}$$
$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6\times\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{9}+o(x^4)}{x^4}$$
$$=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}=-\frac{7}{12}$$

例2.58 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2\ln x}$.

解

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2\ln x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-x}{x^2\ln x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-e^{\ln x}+e^{\ln x}-x}{x^2\ln x}$$
$$\overset{\text{拆项}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)}-e^{\ln x}}{x^2\ln x}+\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln x}-x}{x^2\ln x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln x}\left(e^{\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)-\ln x}-1\right)}{x^2\ln x}+0$$
$$\overset{\text{等价}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}\ln(1+\sin x)-\ln x\right)}{x^2\ln x}$$
$$\overset{\text{整理}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sin x)-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin x+\sin x-x}{x^2}$$
$$\overset{\text{拆项}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}$$
$$\overset{\text{等价}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\sin^2x}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

2.4 极限存在准则　两个重要极限

2.4.1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

定理 2.14

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

♡

证明　当 $x\neq0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 有定义. 因为

$$|\sin x|<|x|<|\tan x|\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

不等式两边同除以 $|\sin x|$, 得到

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|},$$

由于当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{x}{\sin x}>0, \frac{1}{\cos x}>0$, 从而有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad 或 \quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

于是有

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2, \tag{1-2}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2=0$, 所以由夹逼定理得到

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0\Longleftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例2.59 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数, 试证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$$

的充分必要条件为 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\leqslant 1$

解 (必要性) 由于 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|, x\neq 0$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|=\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1.$$

(充分性) 要证明 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$, 只需证明

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|}{|\sin x|}<1, \quad |\sin x|\neq 0.$$

若 $|\sin x|=0$, 不等式显然成立. 也即只需证明 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\leqslant 1$, 而

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|, \quad \sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant 1.$$

故只要证明 $\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\leqslant k$, 即 $|\sin kx|<k|\sin x|$ 即可. 下面用数学归纳法证明:

当 $k=1$ 时, 显然成立;

假设当 $k=n$ 时, 有 $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$; 当 $k=n+1$ 时,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x|&=|\sin(nx+x)|=|\sin nx\cos x+\sin x\cos nx|\\&\leqslant|\sin nx|+|\sin x|\leqslant(n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

综上可知结论成立

例2.60 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解 当 $x=0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=1$$

当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

例2.61 设 $a_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

证明 当 $\theta\neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}=1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\right)=0$$

当 $\theta\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\ln\cos\frac{\theta}{2^k}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{\theta}{2^k}\right)\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\ln\sin\theta-\ln\theta)=\frac{1}{\theta}-\cot\theta\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\begin{cases}0, & \theta=0,\\ \dfrac{1}{\theta}-\cot\theta, & \theta\neq 0.\end{cases}$$

例2.62 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. 当 $0<|x|<\delta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$，即 $|\sin x-x|<\varepsilon x$.

因此，取 $N=[\frac{2}{\delta}]+1$，则当 $n>N$ 时，由于

$$0<\frac{1}{n^2}<\frac{3}{n^2}<\cdots<\frac{2n-1}{n^2}<\frac{2}{n}<\delta,$$

我们有，

$$\left|\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right|<\frac{2k-1}{n^2}\varepsilon,\ (k=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right)\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right|\\&<\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}-1\right|<\varepsilon$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$$

2.4.2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

例2.63 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{2}}\right)^{x}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e$$

例2.64 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}}-\ln 2^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}}}{2^{2x}}$$
$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+x}-2x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x}}{2^{2x}}$$
$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$$
$$=\ln\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot e\right)=\frac{1}{4}\ln 2+1$$

例2.65 证明 $\Gamma'(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$

证明

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{1}\frac{e^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{1}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_0^{n}\frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=-\gamma$$

例2.66 设 $n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right))^{n+1},\quad n\geqslant 2$$

证明 利用伯努利 (Bernoulli) 不等式 $(1+x)^n\leq 1+nx$, 有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\geqslant 1+\frac{n}{n-1}\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right))^{n+1}\geqslant 1+\frac{n+1}{n}$$

因为

$$\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-n^2-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}>0,\quad n\geqslant 2.$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

例2.67 利用平均值不等式证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad n=1,2,\cdots$$

证明 利用平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})$$

中 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1+\dfrac{1}{n}$, $x_{n+1}=1$, 则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1}<\frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]=1+\frac{1}{n+1}$$

两边 $n+1$ 次方, 得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

例2.68 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n}<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^{n}$$

证明 由 $\sqrt{i(n-i)}\leqslant\dfrac{n}{2}$, 则 $\dfrac{1}{2}\left[\ln i+\ln(n-i)\right]\leqslant\ln\dfrac{n}{2}$ 从而

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ln i\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},\ (n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

两边同乘以 $\dfrac{n}{2}$, 得 $\dfrac{1}{2}n!\leqslant\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n}$, 于是

$$n!\leqslant 2\left(\frac{n}{2}\right)^{n}<e\left(\frac{n}{2}\right)^{n}$$

即

$$n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^{n}$$

再证 $\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n}<n!$. 设 $x_n=\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n}$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e}<n$$

所以 (注意到 $x_1=\dfrac{1}{e}<1$)

$$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$$

从而证得

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n}<n!$$

例2.69 证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n},\quad n>1$$

证明 当 $n=2$ 时, 因为 $\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^{2}=\dfrac{9}{4}>2=2!$, 故不等式成立

当 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k}$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots)$$

从而有

$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.
于是, 对于任何自然数 $n>1$, 有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$$

例2.70 证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le e\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

证明

例2.71 证明不等式：$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n}<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$

证明 法 1. 对 $k=1,2,3,\cdots,n$, 有

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

因此有

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{1}<e<\left(\frac{2}{1}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}<e<\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

连乘得到 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$, 再变形 $\cdots$

$$\frac{(n+1)^n}{e^n}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}\Rightarrow\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n}<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

法 2(数学归纳法). 注意到对任意正整数 m 有 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\le e\le\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$。回到原问题，即是证明

$$(n+1)^n<e^n\cdot n!<(n+1)^{n+1}$$

当 $n=1$ 时，显然成立
设 $n=k$ 时成立，即是说

$$(k+1)^k<e^k\cdot k!<(k+1)^{k+1}$$

则 $n=k+1$ 有

$$e^{k+1}\cdot(k+1)!=e^k\cdot k!\cdot e(k+1)>(k+1)^k\cdot e(k+1)=e(k+1)^{k+1}$$

$$\ge(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}(k+1)^{k+1}=(k+2)^{k+1}$$

另一方面

$$e^{k+1}\cdot(k+1)!=e^k\cdot k!\cdot e(k+1)<(k+1)^{k+1}\cdot e(k+1)=e(k+1)^{k+2}$$
$$\leq(1+\frac{1}{k+1})^{k+2}(k+1)^{k+2}=(k+2)^{k+2}$$

于是，由归纳法，对所有正整数 n 成立。

例2.72 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}-\left(n!\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

解 由不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{e}\right)^n\cdot(n+1)$$

得

$$\frac{n+1}{e}<\sqrt{n!}<\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

令

$$a_n=\left(\left((n+1)!\right)^{\frac{1}{n+1}}-\left(n!\right)^{\frac{1}{n}}\right)=(n!)^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$

则有

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)<a_n<\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$

一方面，有

$$\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left((e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\left((n+1)(e^{\frac{1}{n+1}}-1)\right)\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{e}\to\ln e\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(n\to\infty)$$

另一方面，令 $t_n=(n+1)^{\frac{1}{n}}-1>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$，于是

$$a_n=\left(\frac{e}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n+1}}-1=\left(\frac{e}{1+t_n}\right)^{\frac{1}{n+1}}-1\Longrightarrow n+1=\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1+a_n}$$

$$\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln 1+a_n}a_n\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}}=\frac{1}{e}\frac{\ln\frac{e}{1+0}}{\ln e}=\frac{1}{e}$$

或者（另一方面）

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}=1^0=1$$

$$\lim_{n\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$$

得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e}\left(\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}}\left(e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}-\frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}-1}{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{e}(1-1\times 0)=\frac{1}{e}$$

根据夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}$$

2.4.3 夹逼准则

定理 2.15. 夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

1. 从某项起, 即 $\exists N_0\in\mathbf{N}^+$, 当 $n>N_0$ 时, 有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, 所以根据数列极限的定义,

$$\forall\varepsilon>0,\begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N}^+,\forall n>N_1,\text{有 }|y_n-a|<\varepsilon.\\ \exists N_2\in\mathbf{N}^+,\forall n>N_2,\text{有 }|z_n-a|<\varepsilon.\end{cases}$$

取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, 有

$$|y_n-a|<\varepsilon,\quad |z_n-a|<\varepsilon$$

同时成立, 即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$$

同时成立. 由 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ $(n>N_0)$, 所以当 $n>N$ 时, 有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即 $|x_n-a|<\varepsilon$,, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 证毕.

例2.73 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0$ 为常数).

证明 (1) 当 $a\geqslant 1$ 时, 设 $\sqrt[n]{a}=1+h_n$ $(h_n\geqslant 0)$, 下面先证 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$.
由牛顿二项式展开公式得

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n,$$

所以 $a\geqslant 1+nh_n$, 从而

$$0\leqslant h_n\leqslant\frac{a-1}{n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$, 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1+0=1$.
(2) 当 $0<a<1$ 时, $\dfrac{1}{a}>1$, 根据 (1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

证毕.

例2.74 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\,(a>1,k$ 是正整数)

证明 令 $a=1+h, h>0$, 则

$$\begin{aligned} a^n=(1+h)^n&=C_n^0+C_n^1h+\cdots+C_n^kh^k+C_n^{k+1}h^{k+1}+\cdots+C_n^nh^n\\ &\geqslant C_n^{k+1}h^{k+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}\end{aligned}$$

从而, $\forall n>k$, 有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}\to 0$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

例2.75 设数列 $\{a_n\}$ 恒满足不等式 $\sqrt{n}|a_n|\leq 3$ $n=1,2,\ldots$ 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\left(\sum_1^n a_i\right)^2+\left(\sum_2^n a_i\right)^2+\cdots+\left(\sum_n^n a_i\right)^2\right]=0$$

证明 利用 Cauchy 不等式当 $1\leq k\leq n-1$

$$\left(\sum_k^n a_i\right)^2\leq(n-k+1)\left(\sum_k^n a_i^2\right)\leq 9(n-k+1)\sum_k^n\frac{1}{i}\leq 9n\sum_1^n\frac{1}{i}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n\left(\sum_k^n a_i\right)^2\leq 9(n-1)n\sum_1^n\frac{1}{i}+\frac{9}{n}$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[9(n-1)n\sum_1^n\frac{1}{i}+\frac{9}{n}\right]=0$$

利用夹逼准则即得结论.

例2.76 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)+4\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)\right\}$

解

$$\tan\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)=\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}-n\pi\right)$$

$$\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}-n\pi=\frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}}\pi$$

考虑下列不等式

$$\frac{\frac{6}{11}n-1}{\sqrt{n^2+\frac{6}{11}n}+\sqrt{n^2}}\leqslant\frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{6}{11}n\right]}+\sqrt{n^2}}\leqslant\frac{\left[\frac{6}{11}n\right]}{2n}\leqslant\frac{3}{11}$$

当 $n\to\infty$, 左边等于 $\dfrac{3}{11}$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{6n}{11}\right]}\right)=\tan\frac{3}{11}\pi$$

同样的方法，可以计算出

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\left[\frac{8n}{11}\right]}\right)=\sin\frac{2}{11}\pi$$

对于 $\tan\dfrac{3}{11}\pi+4\sin\dfrac{2}{11}\pi=\sqrt{11}$ 的计算, 这里不再给出。

例2.77 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}$

解 注意到

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

当 $n>k$ 时有

$$\begin{aligned}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}&=(n+1-k)\left[n\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right]^{-1}\\&=\frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+2)}n^{-2}\leqslant 2n^{-2}\end{aligned}$$

所以原式有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}2n^{-2}=\frac{2}{n}\to 0$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}=0$$

例2.78 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^{\frac12}+\cdots+n^{\frac1n}}{n}$

解 将和式分段

$$\frac{n+n^{\frac12}+\cdots+n^{\frac1n}}{n}\triangleq\frac1n\sum_{k=1}^{n}n^{\frac1k}=\left(1+\frac{1}{\sqrt n}\right)+\overbrace{\frac1n\sum_{k=3}^{N}n^{\frac1k}}^{\text{有限项}}+\frac1n\sum_{k=N+1}^{n}n^{\frac1k}\triangleq I_1+I_2+I_3$$

一方面, $\lim\limits_{n\to\infty}I_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt n}\right)=1$; 另一方面, 我们取 $N=[\sqrt n]$,

$$I_2\leqslant\frac{(N-2)\sqrt[3]{n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt n\sqrt[3]{n}}{n}=\frac{1}{n^{\frac16}}\to 0$$

再着, 由于 $\dfrac{(n-N)n^{\frac1n}}{n}\leqslant I_3\leqslant\dfrac{(n-N)n^{\frac1N}}{n}$, 故而由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}I_3=1$. 综上,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac12}+\cdots+n^{\frac1n}}{n}=\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2+I_3)=2.$$

例2.79 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac1n\right)^n+\left(\frac2n\right)^n+\cdots+\left(\frac nn\right)^n\right)$$

解 利用不等式

$$\left(\frac{n-i}{n}\right)^n\leq e^{-i}$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac in\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n\leq\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\leq\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1}$$

另一方面，对于固定的正整数 k，截取题目数列的后 $k+1$ 项，由于是有限项，所以可以逐项求极限，可得原极限大于等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{k}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{k}e^{-i}=\frac{1-e^{-k-1}}{1-e^{-1}}$$

再令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac1n\right)^n+\left(\frac2n\right)^n+\cdots+\left(\frac nn\right)^n\right)=\frac{e}{e-1}$$

推广[3]：设 $f:(0,1]\in\mathbb{R}_+$ 可微，且 $f'(1)>0$，$\dfrac{f'}{f}$ 递减则，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n=\begin{cases}0 & \text{if } f(1)<1,\\ \dfrac{1}{1-e^{-f'(1)}} & \text{if } f(1)=1,\\ +\infty & \text{if } f(1)>1.\end{cases}$$

例2.80 (IMC,1994) 求极限：$\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\log^2 N}{N}\sum\limits_{k=2}^{N-2}\dfrac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}$.

解[4] 显然

$$A_N=\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\geqslant\frac{\log^2 N}{N}\cdot\frac{N-3}{\log^2 N}=1-\frac{3}{N}\tag{2.3}$$

取 M 满足 $2\leqslant M\leqslant\frac{N}{2}$，则由 $\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}$ 在 $(2,\frac{N}{2})$ 单调递减，以及表达式关于 $\frac{N}{2}$ 的对称性可得

$$\begin{aligned}A_N&=\frac{\log^2 N}{N}\left\{\sum_{k=2}^{M}+\sum_{k=M+1}^{N-M-1}+\sum_{k=N-M}^{N-2}1\right\}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\\&\leqslant\frac{\log^2 N}{N}\left\{2\frac{M-1}{\log 2\cdot\log(N-2)}+\frac{N-2M-1}{\log M\cdot\log(N-M)}\right\}\\&\leqslant\frac{2}{\log 2}\cdot\frac{M\log N}{N}+\left(1-\frac{2M}{N}\right)\frac{\log N}{\log M}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\end{aligned}$$

取 $M=[\frac{N}{\log^2 N}]+1$ 得到

$$\begin{aligned}A_N&\leqslant\left(1-\frac{2}{N\log^2 N}\right)\frac{\log N}{\log N-2\log(\log N)}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\\&\leqslant 1+O\left(\frac{\log(\log N)}{\log N}\right)\end{aligned}\tag{2.4}$$

由 (2.3) 和 (2.4) 得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}=1$$

例2.81 设 $\{a_n\}$ 是正序列，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$，证明：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_1+a_1+\cdots+a_n}=1$$

证明 注意到

$$1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_1+a_1+\cdots+a_n}$$

所以只要估计 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的一个上界即可。而由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$ 知，

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时 $a_n\leq(1+\varepsilon)^n$ 设 $A=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_k<A+\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}$$

[3]来自 Furdui 的《Limits, Series, and Fractional Part Integrals》
[4]向禹《1994-2018 年国际大学生数学竞赛》P7

而当 n 充分大时 $\dfrac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon} > A$, 所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(1+\varepsilon)^{n-N+1}}{\varepsilon}} = 1$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_1 + a_1 + \cdots + a_n} = 1$$

例2.82 设 $a_n > 0, n = 1, 2\cdots, \alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln a_n}{n}$, 且

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 当 $\alpha < \ln 2$ 时收敛, 而当 $\alpha > \ln 2$ 时发散。

证明 当 $\alpha < \ln 2$ 时，由上极限的定义，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时，就有 $\ln\ln a_n < n\ln 2$, 也就是 $a_n < e^{2^n}$, 这时对 $n \geq n_0$, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0+1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \cdots + \sqrt{e^{2^n}}}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1}}}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \end{aligned}$$

所以 x_n 是单调递增有上界的序列，故收敛。

当 $\alpha > \ln 2$ 时，存在 $\beta > 2$, 对任意的 n_0, 都有 $n > n_0$, 使得 $a_n > e^{\beta^n}$, 这时

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0} + \cdots + \sqrt{a_n}}} \\ &> \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0-1}}}}} \\ &> e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

显然，$\{x_n\}$ 发散。

例2.83 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 其中 $y_n = 1 + \dfrac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$, $y_0 = 1$

证明 假设极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并记极限为 A, 两边取极限

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{或} A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{舍去}$$

现在来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 因为

$$\begin{aligned} 0 < \left|y_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| &= \left|1 + \frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \left|\frac{y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}}{2\underbrace{(y_{n-1}+1)}_{>2}\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{>0.5}}\right| \\ &< \frac{1}{2}\left|y_{n-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right| \quad \text{(递推)} \end{aligned}$$

$$< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left|y_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right| \to 0\ (n \to \infty)$$

于是由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

例2.84 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}^+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$

证明 [6] 由 $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ 平方可得 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \dfrac{1}{a_n^2} + 2$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \geqslant a_n^2 + 2 \\ &\geqslant \cdots \geqslant a_0^2 + 2(n+1) \end{aligned}$$

于是有

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_0^2 + 2(n+1) = 2n+3 \Longrightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

故

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 \leqslant a_{n-1}^2 + \frac{1}{2n-1} + 2 \\ &\leqslant \cdots \leqslant a_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \end{aligned}$$

因此

$$a_0^2 + 2n \leqslant a_n^2 \leqslant a_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

$$1 \leqslant \frac{a_n^2}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{n}\frac{n}{2n+1}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{H_{2n} - H_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln n + \gamma + \varepsilon_n\right)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln n}{n} = 0 \end{aligned}$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{2n+1} = 1$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$$

定理 2.16. 夹逼定理

如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件

(1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$, 那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$ 存在且等于 A.

♡

例2.85 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$　　傲娇小魔王

解 因为

$$0 \leqslant \lim_{x\to 0^+} |x\ln x| = \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{2\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+} \left|-2\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right|$$
$$\leqslant \lim_{x\to 0^+} \left|-2\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}\right| = \lim_{x\to 0^+} |2\sqrt{x}| = 0$$

故由夹逼则知

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

例2.86 计算极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{n}x} \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\cos^2\frac{t}{\sqrt{n}}}\,\mathrm{d}t = I$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant I \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1+\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{2-\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t^2}}{1-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

例2.87 计算 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$\frac{1}{n^2}\int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=nt} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \underbrace{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}}\,\mathrm{d}t}_{I_2}$$

由

$$0 < \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+(nt)^{-nt}} < \frac{1}{2}\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

$$\frac{1}{2+(\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}} < \frac{1}{2+(nt)^{-nt}} < \frac{1}{2+n^{-n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant t \leqslant 1\right)$$

可得

$$0 < I_1 < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2+(\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t < I_2 < \frac{1}{2+n^{-n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n\frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$$

例2.88 若函数 $f(x)$ 连续, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x$$

解 (by 蓝兔兔) 注意到

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\right|&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)e^{-n^{\frac{1}{3}}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=0\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

同理

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1 f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=o\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}f(1-x)(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f(1-\xi_n)}^{\xi_n\in\left(0,\frac{1}{n^{1/3}}\right)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x}=f(1)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 f(x)\left[1-(x-1)^2\right]^n\,\mathrm{d}x=f(1)$$

2.4.4 柯西极限存在准则

定理 2.17. Cauchy 审敛原理

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m > N, n > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. ♡

例2.89 设数列满足条件：$|a_{n+1} - a_n| < r^n, n = 1, 2, \cdots$，其中 $r \in (0, 1)$.
求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 若 $n < m$，则

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leqslant |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leqslant r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{m-1} = \frac{r^n - r^m}{1-r} < \frac{r^n}{1-r}\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1-r} = 0$. 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, \left|\dfrac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$.
若 $m > n > N$，就有

$$|a_n - a_m| \leqslant \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon$$

由柯西准则，$\{a_n\}$ 收敛.

例2.90 对给定的 y 值，方程 $x - \alpha \cdot \sin x = y$ $(0 < \alpha < 1)$ 有唯一解

证明 令 $y = x_0$，且 $x_1 = y + \alpha \cdot \sin x_0, x_n = y + \alpha \cdot \sin x_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. 因为 $|\sin t| < |t|$ 所以对任意自然数 n 及 p，可知

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \alpha |\sin x_{n+p} - \sin x_n| \\ &\leqslant \alpha |x_{n+p-1} - x_{n-1}| \leqslant \alpha^2 |x_{n+p-2} - x_{n-2}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \alpha^n |x_p - x_0| = \alpha^{n+1} |\sin x_{p-1}| \leqslant \alpha^{n+1}\end{aligned}$$

由于 $0 < \alpha < 1$，故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而是收敛列
现在令 $x_n \in \xi$ $(n \to \infty)$，易知 $\xi = y + \alpha \sin \xi$. 进一步，若该方程另有一解 $x = \eta$，
则由 $|\eta - \xi| = \alpha |\sin \eta - \sin \xi| \leqslant \alpha |\eta - \xi|$，可知 $\eta = \xi$

2.4.5 单调有界定理

例2.91 设 $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，$n$ 为自然数，
求证：(1) $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

证明

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| - |a_n| &= \left|\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| - \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\xlongequal{t=x-\pi} \left|-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+\pi}\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \left(\frac{1}{x+\pi} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0\end{aligned}$$

即数列 $\{|a_n|\}$ 单调递减，且 $|a_n| \geqslant 0$。由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{n\to\infty} |\sin\xi| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,\quad \xi\in[n\pi,(n+1)\pi]$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\sin\xi| \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0\,,\quad n\to\infty$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

例2.92 设 $\{x_n\}$ 满足：$-1<x_0<0$，$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$，
证明: $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{x\to 0}x_n$

证明 当 $n=0$ 时,

$$x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1\in(-1,0)$$

当 $n=1$ 时,

$$x_2=x_1^2+2x_1=(x_1+1)^2-1\in(-1,0)$$

假设当 $n=k$ 时, $x_{k+1}\in(-1,0)$, 当 $n=k+1$ 时

$$x_{k+2}=x_{k+1}^2+2x_{k+1}=(x_{k+1}+1)^2-1\in(-1,0)$$

由数学归纳法可得 $-1<x_n<0$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$x_{n+1}-x_n=x_n^2+x_n=x_n(x_n+1)<0$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，
记 $\lim\limits_{x\to 0}x_n=A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}x_{n+1}=A$. 故有

$$A=A^2+2A\Longrightarrow A=0\text{ 或 }A=1$$

由于 $1<x_0<0$ 以及数列 $\{x_n\}$ 单调递减，知 $\lim\limits_{x\to 0}x_n=-1$

注意 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2+x_n>1\not\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 递增. 因为 $-1<x_n<0$

例2.93 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对 $\forall x\geqslant 1$, 有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$
证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$

证明 由题意知 $f'(x)>0$, $\because x\geqslant 1$ 时, $\forall f(x)\geqslant 1\Longrightarrow \dfrac{1}{x^2+f^2(x)}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^t f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^t\frac{1}{x^2+f^2(x)}\,\mathrm{d}x<\int_1^t\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以

$$f(t)-f(1)<\arctan t-\frac{\pi}{4}$$

所以 $\forall x$

$$f(t)<\arctan t-\frac{\pi}{4}+1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)<1+\frac{\pi}{4}$$

由上式知 $f(x)$ 有上界, 故由单调有界定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

例2.94 (18 数学 3) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0$, $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$
证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (by 向禹) 首先由 $x_1>0$, $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$ 归纳可知所有 $x_n>0$.
考虑函数 $f(x)=e^x$, 由拉格朗日中值定理可得

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n}\,,\quad \xi\in(0,x_n).$$

这就说明 $x_n>x_{n+1}>0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\geqslant 0$.

在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $xe^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$

注意: $xe^x = e^x - 1$ 这个超越方程是不可解的, 不要直接写解得 $x = 0$

例2.95 求级数: $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!}$

解

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t \,\mathrm{d}t = n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$\{x_n\}_{n\geqslant k}: x_n = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} C_i^k \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right), k \in \mathbb{N}^+$, 显然 $x_{n+1} - x_n > 0$,

$$x_n \leqslant \sum_{i=k}^{n} C_i^k \frac{e}{(i+1)!} \leqslant \sum_{i=k}^{n} \frac{e}{k!(i-k)!} \leqslant \frac{e^2}{k!}$$

由于

$$x_n = \sum_{i=k}^{n} C_i^k \frac{1}{i!}\int_0^1 (1-t)^i e^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k e^t \left(\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!}\right)\mathrm{d}t$$

且

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!} < \lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}\frac{(1-t)^{i-k}}{(i-k)!} = e^{1-t}$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k e^t e^{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{(k+1)!}$$

即 $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{C_i^k}{j!} = \frac{e}{(k+1)!}$

例2.96 设 $g(x) > 0, f(x) > 0$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b g(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x}$$

解 令 $a_n = \displaystyle\int_a^b g(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x$, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 注意到

$$a_{n+1} = \int_a^b g(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)(f(x))^n\,\mathrm{d}x = Ma_n \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant M$$

即 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 有上界. 由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \left(\int_a^b g(x)(f(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left((f(x))^{\frac{n+2}{2}}(g(x))^{\frac{1}{2}}\cdot(f(x))^{\frac{n}{2}}(g(x))^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\leqslant a_{n+2}a_n \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

即 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 单调递增. 由单调有界定理, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = M$$

例2.97 设 $a_1=\sqrt{1+2015},a_2=\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016}},\cdots,$

$$a_n=\sqrt{\left(1+2015\sqrt{\left(1+2016\sqrt{(1+\cdots+(2014+n)\sqrt{1+(2013+n)})}\right)}\right)}$$

求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值

证明 $x\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, 设

$$f_n(x)=\sqrt{\left(1+x\sqrt{\left(1+(x+1)\sqrt{(1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)})}\right)}\right)}$$

则

$$f_n(x)=\sqrt{1+xf_{n-1}(x+1)} \tag{2.5}$$

由数学归纳法易得 $f_n(x)\leqslant x+1$, 所以对固定的 x, $\{f_n(x)\}$ 单调递增有上界,
所以 $\{f_n(x)\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 记 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 则

$$F(x)\leqslant x+1,\ F(x)=1+xF(x+1),$$

今往证 $F(x)=x+1$, 因为

$$f_n(x)>\sqrt{x\sqrt{x\cdots\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}=x^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

取极限得 $F(x)\geqslant x$, 设 $b_0=0,b_{n+1}=\dfrac{1+b_n}{2}$, 则当 $F(x)\geqslant x+b_n$ 时, 由 (2.5) 得

$$F(x)=\sqrt{1+x\sqrt{F(x+1)}}\geqslant\sqrt{1+x(x+1+b_n)}\geqslant x+\frac{1+b_n}{2}=x+b_{n+1},$$

即 $F(x)\geqslant x+b_{n+1}$, 所以 $F(x)\geqslant x+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x+1$, 又 $F(x)\leqslant x+1$, 所以 $F(x)=x+1$, 得证一般结论. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=F(2015)=2016$.

定理 2.18. 导数与数列单调性

对 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots),x_n\in I$.

1. 若 $f'(x)>0,x\in I$, 则数列 $\{x_n\}$ 单调,
   (a). 当 $x_2>x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调增;
   (b). 当 $x_2<x_1$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调减;
2. 若 $f'(x)<0,x\in I$, 则数列 $\{x_n\}$ 不单调. ♡

例2.98 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 其中 $y_n=1+\dfrac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$, $y_0=1$

证明 易得 $1\leqslant y_n\leqslant 2$, 且因为

$$f(x)=1+\frac{x}{1+x}\Longrightarrow y_{n+1}=f(y_n)\Longrightarrow y'=\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

$y_1-y_0=1+\dfrac{y_0}{1+y_0}-y_0=\dfrac{1}{2}>0\Longrightarrow y_1>y_0$ 故数列 $\{y_n\}$ 单调递增,
或者设 $y_n>y_{n-1}$, 即数列 $\{y_n\}$ 单调递增. 考虑数学归纳法
$y_1-y_0=1+\dfrac{y_0}{1+y_0}-y_0=\dfrac{1}{2}>0\Longrightarrow y_1>y_0$
现假设 $n=k$ 时成立, 即有 $y_k>y_{k-1}$. 当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}y_{k+1}-y_k&=\left(1+\frac{y_k}{1+y_k}\right)-\left(1+\frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}}\right)\\&=\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}}=\frac{y_k-y_{k-1}}{(1+y_k)(1+y_{k-1})}>0\end{aligned}$$

因此由单调有界定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在并记极限为 A, 两边取极限

$$A=1+\frac{A}{1+A}\Longrightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{或}A=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{舍去}$$

例2.99 (江西首届高校杯数学联赛) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a>1$, 且满足递推

$$x_{n+1}=1+\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right),n=2,3,\cdots$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值

证明 (by 西西) 先利用数学归纳法证明 $x_n>1$, 现在假设 $x_n>1$ 则只需要证明

$$\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)>0\Longleftrightarrow x_n^2-1-\ln x_n>0$$

考虑函数 $f(x)=x^2-1-\ln x, x>1$, 易得 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)>f(1)=0$
接着证明 $x_n<x_{n+1}$, 那么只要证明

$$x_{n+1}-1-\ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right)>0$$

考虑函数

$$g(x)=x-1-2\ln x+\ln(1+\ln x),x>1$$

易得

$$g'(x)=\frac{x-1+x\ln x-2\ln x}{x(1+\ln x)},x>1$$

考虑函数 $h(x)=x-1+x\ln x-2\ln x, x>1$, 易得 $g(x)>0$
或者考虑

$$G(x)=1+2\ln x+\ln(1+\ln x)\Longrightarrow G'(x)=\frac{1+2\ln x}{x(1+\ln x)}$$

利用导数易得 $x(1+\ln x)\geqslant 1+2\ln x, x\geqslant 1$, 故有 $0<G'(x)<1$
那么有

$$0<x_{n+1}=G(x_n)=\int_1^{x_n}G'(x)\,\mathrm{d}x+1\leqslant 1+(x_n-1)=x_n$$

综上知: 数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限值为 A, 有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=A$$

即

$$A=1+\ln\left(\frac{A^2}{1+A}\right)\Longrightarrow A=1$$

练习 2.3 设 $0<p\leq 1, x_1>0, a>0, b>0, x_{n+1}=a+\dfrac{b}{x_n^p}, n\in\mathbb{N}$.
证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 令 $f(x)=a+\dfrac{b}{x^p}, x\in(0,+\infty)$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微, 方程 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解, 记为 x^*. $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n}\}$ 单调递减, 或 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增. 易知, $a<x_n<a+\dfrac{b}{a^p}, \forall n\geq 2$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$ 均存在, 极限值分别记为 A 和 B. 由递推公式知,

$$A=a+\frac{b}{B^p}=f(B),B=a+\frac{b}{A^p}=f(A).$$

以下证明 $A=B(=x^*)$. 事实上, 总有 $f(f(A))=A$, $f(f(B))=B$, $f(f(x^*))=x^*$.
由此易知, 若 $A\neq B$, 则 A, B, x^* 为 g 的三个不同的不动点, 其中 $g(x)=f(f(x))$. 根据 Lagrange 定理, 存在

$0<\xi_1<\xi_2$ 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=1$. 然而

$$g'(x)=f'\big(f(x)\big)f'(x)=\frac{b^2p^2}{\big(ax+bx^{1-p}\big)^{p+1}}$$

为 $(0,+\infty)$ 上严格减函数 (注意到 $0<p\leq 1$), 矛盾. 矛盾说明必有 $A=B$. 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例2.100 证明数列 $\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\cdots$ 收敛, 并求其值.

证明 令 $x_0=\sqrt{7},x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}},x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}},n=0,1,2,\cdots$, 若极限存在, 则易得极限值为 2. 它是方程 $x=f(x)$ 的根, 其中 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$.
根据递推公式, 我们只需证明两个子数列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 的极限都是 2 即可.
由拉格朗日中值定理

$$|f(x)-2|=|f(x)-f(2)|=|f'(\xi)||x-2|\ ,\ \xi\in(2,x)$$

若 $0\leqslant x_n\leqslant 7$, 则

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\cdot\sqrt{7+\xi}}\right|\leqslant\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{14}}\cdot\sqrt{7}}\right|=\alpha<1.$$

由数学归纳法易证对于所有的 n 都有 $0\leqslant x_n\leqslant 7$. 于是

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant\alpha|x_n-2|,$$

从而

$$|x_{2k}-2|\leqslant\alpha^k|x_0-2|\to 0\ ,\quad |x_{2k+1}-2|\leqslant\alpha^k|x_1-2|\to 0\quad(k\to\infty)$$

这表明两个子数列都收敛于 2.

例2.101 设 $x_1>x_2>0,x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求极限

证明 由 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, 易得

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}\Longrightarrow x_{n+2}=x_2\sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdots\frac{x_1}{x_2}}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{n+1}}}$$

由于

$$x_2<x_3=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<x_1,\ x_2<x_4=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_3}}<x_3\sqrt{\frac{x_1}{x_3}}=x_3<x_1,$$

推断出 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2k}\}$ 单调递增, 且 $x_2<x_{2k+1},x_{2k}<x_1$. 应用数学归纳法证明
假设 $x_2<x_{2k-1}<x_{2k-3},x_{2k-2}<x_{2k}<x_1$, 则

$$x_{2k+1}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k}}}<x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}}=x_{2k-1}>x_2$$

$$x_{2k+2}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k+1}}}>x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}}=x_{2k}<x_1$$

由单调有界定理可知 $\{x_{2k-1}\},\{x_{2k}\}$ 极限存在. 并且设

$$\lim_{n\to\infty}x_{2k-1}=a\ ,\quad \lim_{n\to\infty}x_{2k}=b$$

于是由

$$x_{2k-1}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-2}}}\ ,\quad x_{2k}=x_2\sqrt{\frac{x_1}{x_{2k-1}}}$$

两边取极限可得

$$a=x_2\sqrt{\frac{x_1}{b}}\ ,\quad b=x_2\sqrt{\frac{x_1}{a}}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{x_1x_2^2}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

例2.102 设 $x_1=a\geqslant 0$, $y_1=b\geqslant 0$, 且

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\,,\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)\,,\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

证明 $x_n\geqslant 0$, $y_n\geqslant 0$ 是显然的. 由

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\geqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}\,,$$

得

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_nx_n}=x_n\,,$$
$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n\,.$$

知 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少, 又

$$x_n\leqslant y_n\leqslant y_1\,,\ y_n\geqslant x_n\geqslant x_1$$

所以 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 存在.

对 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 两边取极限, 得

$$B=\frac{1}{2}(A+B)\Longrightarrow A=B$$

例2.103 设 $a_0=3, a_n=a_{n-1}^2-2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}=\sqrt{5}$

证明 [7]

$$\begin{aligned}a_n^2-4&=(a_n-2)(a_n+2)=a_{n-1}^2(a_{n-1}^2-4)\\&=a_{n-1}^2a_{n-2}^2(a_{n-2}^2-4)\\&=\cdots\\&=a_{n-1}^2a_{n-2}^2\cdots a_0^2(a_0^2-4)=5a_0^2a_1^2\cdots a_{n-1}^2\,,\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n^2-4}}{a_0a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{4}{a_n^2}}}=\sqrt{5}\,.$$

例2.104 (上海交通大学 1991 年竞赛题) 设 $x_1=1, x_2=2$, 且

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证明 令 $y_n=\ln x_n$, 则由 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}$ 得 $y_{n+2}=\dfrac{1}{2}(y_{n+1}+y_n)$, 故

$$\begin{aligned}y_{n+2}-y_{n+1}&=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(y_n-y_{n-1})\\&=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(y_2-y_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2\end{aligned}$$

移项得

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=y_n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$$

$$= \cdots = y_1 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \ln 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ln 2\right]$$
$$= \ln 2\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$
$$= \ln 2 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+2} = \frac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2 = \frac{2}{3}\ln 2$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+2} = \lim_{n\to\infty} e^{y_{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+2}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

例2.105 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = 2, y_1 = 1$, 且满足

$$x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad y_{n+1} = x_n y_n$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 假设极限为 A, 并且证明 $A < \sqrt{7}$

证明 由题设知

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n^2+1}{x_n y_n} = \frac{x_n}{y_n} + \frac{1}{y_{n+1}}$$

由上式知 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 为严格增数列, 且当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_n} = \frac{x_{n-2}}{y_{n-2}} + \frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_n} = \cdots = \frac{x_1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \cdots + \frac{1}{y_n} \tag{2.6}$$

由条件 $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ 知 $x_{n+1} \geqslant 2x_n$, $n = 1, 2\cdots$, 从而 $\{x_n\}$ 严格增, 并且易得 $x_n \geqslant 2^{n-1}x_1 = 2^n$. 由条件 $y_{n+1} = x_n y_n$ 知, 对 $n \geqslant 2$,

$$\frac{\frac{1}{y_{n+1}}}{\frac{1}{y_{n+1}}} = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_n}$$

容易算出 $x_2 = 5, y_2 = 2, y_3 = 10$ 利用上式知及 $\{x_n\}$ 的单调性知, 对 $n \geqslant 3$,

$$\frac{\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_2}} = \prod_{i=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{y_i}}{\frac{1}{y_{i-1}}}\right) = \prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_{i-1}} \leqslant \prod_{i=3}^{n}\frac{1}{x_2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

于是在 (2.6) 式中, 当 $n \geqslant 2$ 时, 我们有

$$\frac{x_n}{y_n} \leqslant \frac{x_1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right)$$
$$< \frac{x_1}{y_1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{y_2} = \frac{2}{1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} = 2.625 < \sqrt{7}\,(\approx 2.646)$$

从而由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 极限存在, 并且由极限的保不等式性知此极限 $A < \sqrt{7}$

练习 2.4 $a \geq 0, x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n + a(a+1)}, n = 0, 1, 2, \ldots$. 计算下面这个极限

$$\lim_{n\to\infty}(a+1)^{2n}(a+1-x_n)$$

证明 (by tian27546) 易得

$$\frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n} = \frac{1}{(a+1)+x_{n+1}}$$
$$\Longrightarrow \frac{a+1-x_{n+1}}{a+1-x_n} = \frac{1}{2(a+1)}\left(1 + \frac{a+1-x_{n+1}}{a+1+x_{n+1}}\right)$$

so

$$a+1-x_n=\frac{1}{2^n(a+1)^n}(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right)\cdots\cdots(1)$$

显然我们有

$$a+1-x_i\le\frac{(a+1)-x_0}{(a+1)^i}$$

即

$$(a+1-x_0)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a+1-x_i}{a+1+x_i}\right)$$

收敛. 到一个常数 $f(a)\in(0,\infty)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}2^n(a+1)^n(a+1-x_n)=f(a)$$

显然我们很容易得到

$$f(a)=\begin{cases}\infty & a>1\\ \dfrac{\pi^2}{4} & a=1\\ 0 & a<1\end{cases}$$

✍ **练习 2.5** 假设 $x_0=1,x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$, 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $x_n-\dfrac{\pi}{2}=o\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$.

证明 方法 1 先证 $1\le x_n<\dfrac{\pi}{2}$, 得到 $x_n-x_{n-1}>0$,

由单调有界定理可知 x_n 极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{\pi}{2}$. 下面用归纳法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

假设

$$\lim_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right)&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\cos x_n-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(x_n+\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)^3\\&=-\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{3n}}\left[n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)\right]^3=0.\end{aligned}$$

方法 2: 令 $y_n=\dfrac{\pi}{2}-x_n$, 得到 $y_n=y_{n-1}-\sin y_{n-1}$. 可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n^3}=\frac{1}{6}.$$

因此当 $n>N$ 时, 我们有

$$\frac{y_{n+1}}{y_n^3}<\frac{1}{2}.$$

因此

$$0<y_n<\frac{1}{2}y_{n-1}^3<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3}y_{n-2}^{3^2}<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{1+3+\cdots+3^{n-N-2}}y_{N+1}^{3^{n-N-1}},$$

即

$$0<y_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{(3^{n-N-1}-1)/2}y_{N+1}^{3^{n-N-1}}.$$

例2.106 设 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, 令 $x_n=\sin x_{n-1}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\left(1-\dfrac{nx_n^2}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$

解 (1) 由数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界. 由 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, 得

$$0<x_1=\sin x_0<x_0<\frac{\pi}{2};$$

假设 $n=k$ 时, 有 $0<x_k<\dfrac{\pi}{2}$ 成立. 当 $n=k+1$ 时,

$$0<x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\frac{\pi}{2},$$

所以 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 且易得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 由 Stolz 定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$, 我们有 $\sin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$. 由 (1) 知, 数列 $\{1/x_n^2\}$ 单调增加且趋向于正无穷大.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n^2}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{1/x_n^2-1/x_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2x_{n-1}}{(x_{n-1}-\sin x_{n-1})(x_{n-1}+\sin x_{n-1})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x^2}{(x-\sin x)(x+\sin x)}\overset{\text{tayor}}{=\!=}3\end{aligned}$$

(3) 求原极限. 由泰勒公式可得 $\sin^2x=x^2-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{2x^6}{45}x^6+o(x^6)$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\frac{nx_n^2}{3}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^2}{\ln n}\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)\overset{nx_n^2=3}{=\!=}3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)\\&\overset{\text{Stolz}}{=\!=}3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln(n+1)-\ln n}\\&\overset{\text{通分}}{=\!=}3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3x_n^2-3x_{n+1}^2-x_n^2x_{n+1}^2}{3x_n^2x_{n+1}^2}\right)\\&=3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3x_n^2-3\sin^2x_n-x_n^2\sin^2x_n}{3x_n^2\sin^2x_n}\right)\\&\overset{\text{泰勒展开}}{=\!=}3\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{1}{5}x_n^6+o(x_n^6)}{3x_n^4}\right)\\&=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}n\left(x_n^2+o(x_n^2)\right)=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

例2.107 设函数 $f_n(x)=x^n+nx-2$,
证明: $f_n(x)$ 在 $x>0$ 的范围内仅有一个根 a_n, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

证明 由于 $f_n'(x)=nx^{n-1}+n=n(x^{n-1}+1)>0\ (x>0)$.
所以函数 $f_n(x)$ 在 $x>0$ 时严格单调增加. 并且容易计算得到

$$f_n(0)=-2<0,\quad f(2)=4+2(n-1)\geqslant4>0\ (n\geqslant1)$$

所以 $f_n(x)$ 有且仅有唯一的正根.
当 $n=1$ 时, 有

$$f_n(x)=x+x-2=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow a_1=1$$

当 $n>1$ 时, 由 $f_n(x)=x(x^{n-1}+n)-2$, 可知, 函数的根必须在位于 $(0,1)$ 区间内.
根据函数表达式的结构, 尝试探索令 $x=\dfrac{1}{n}$ 时,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}+1-2=\frac{1}{n^n}-1<0$$

随着 n 增加, 差距减小, 考虑$x=\frac{2}{n}$ 代入, 得

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2^n}{n^n}+2-2=\frac{2^n}{n^n}>0$$

即当 $n\geqslant 2$ 时, 函数的根 $\frac{1}{n}<a_n<\frac{2}{n}$. 于是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<(1+a_n)^n<\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
容易计算左边极限为 e, 右边极限为 e^2, 夹逼准则使用失败!
尝试放大 $\frac{1}{n}$ 或者缩小 $\frac{2}{n}$ 减小一个数量级, 比如考察 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, $\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}$, 则有

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)&=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-2=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n+\frac{1}{n}-1\\&<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1<0\ (n>3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)&=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n+n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-2=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n-\frac{2}{n}\\&\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-\frac{2}{n}=-\frac{2}{n^2}<0\end{aligned}$$

所以可以考虑的区间为 $\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\frac{2}{n}\right]$, $\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$
于是分别求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+1}{n}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{2n-2}{n^2}}=e^2$$

所以由以上分析可知方程的根位于 $\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right]$ 区间内,
并且可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^2$

例2.108 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ $a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{a_n-\ln n}{\ln n}$

解 (by 向禹) 首先由递推式 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$ 显然归纳可得 $a_n>\ln(n+1)$.
因此

$$(a_{n+1}-\ln(n+1))-(a_n-\ln n)=e^{-a_n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0.$$

这说明 $b_n=a_n-\ln n$ 是单调递减的正数列, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 存在. 代入原递推式可得

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}.$$

如果 $b>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$ 时, $b_n>\dfrac{b}{2}$ 都成立. 则

$$b_{n+1}<b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{1}{n+1}-\frac{e^{-\frac{b}{2}}}{n}<b_n-\frac{C}{n}.$$

这里 $C>0$ 为常数. 由调和级数的发散性可知这不可能, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b=0$. 因此

$$b_{n+1}=b_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{e^{-b_n}}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)b_n+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$nb_{n+1}=(n-1)b_n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=(1+o(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n).$$

这说明 $b_n=\dfrac{\ln n}{2n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n-\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

例2.109 设方程 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的根为 a_n $(n\in N^+)$

(1) 求证: 数列 a_n 是单调递增

(2) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

(3) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(a_n-1)=1$

(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\dfrac{\ln n}{n}\right)=1$ 的值

解 (by 西西) (1) 利用零点定理和单调性知道 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中有唯一正实数根. 设 $f_n(x)=x^n+x-1$, 则有

$$f_n(a_n)=0\Longrightarrow (a_n)^n+a_n=1$$

由于 $f_n'(x)=nx^{n-1}+1>0$, 即 $f_n(x)$ 关于 x 单调递增, 且注意到

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_{n+1})&=(a_{n+1})(a_{n+1})^{n+1}+a_{n+1}+1=(a_{n+1})^n-(a_{n+1})^{n+1}\\ &>0=f_n(a_n),\quad 0<a_{n+1}<1\end{aligned}$$

所以有 $a_{n+1}>a_n$

(2): 注意到 $0<a_n<1$ 且对任意 $\varepsilon>0$, 我们考虑

$$f_n(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon)^n+(1-\varepsilon)-1=(1-\varepsilon)^n-\varepsilon\to-\varepsilon\to 0,\ n\to\infty$$

故 $1-\varepsilon<a_n<1$, $n\to\infty$. 由于 ε 的任意性, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

(3) 法 1. 令 $a_n=1-\varepsilon$, 则有

$$(1-\varepsilon)^n-\varepsilon=0\Longrightarrow n=\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}\approx\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon},\ (\varepsilon\to 0)$$

则我们只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-1)=1\Longleftrightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\frac{\ln x}{\ln(1-x)}}{\ln\left(\frac{\ln x}{\ln(1-x)}\right)}=1$$

注意到

$$\ln(1-x)=-x+o(x^2)\Longrightarrow x\cdot\frac{\ln x}{\ln(1-x)}=-\ln x+o(\ln x)$$

令 $u=x\cdot\dfrac{\ln x}{\ln(1-x)}$, 则原极限等价于求

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{\ln u-\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln u}{u}-\frac{\ln x}{u}}=1$$

法 2. 由于

$$\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\sim\frac{n}{\ln n}\ln\frac{n}{\ln n}=\frac{n}{\ln n}(\ln n-\ln\ln n)\sim n$$

可得 $\varepsilon\to\dfrac{\ln n}{n}$, $(n\to\infty)$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\varepsilon=1$$

(4). 设 $a_n=1-\dfrac{1}{n}(\ln n)b_n$, 则有 $(a_n)^n=1-a_n$ 即 $n\ln a_n=\ln(1-a_n)$, 也就是

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right)=\ln\left(\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right).$$

注意到 $a_n\to 1$ 和 $\ln(1-x)=-x+O(x^2)$ 当 $x\to 0$ 时,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}(\ln n)b_n\right)=-\frac{1}{n}(\ln n)b_n+o(1/n).$$

由 (3) 知: $b_n\to 1,\ln b_n=o(1)$ 则有

$$-(\ln n)b_n+o(1)=\ln\ln n-\ln n+o(1)$$

也就是

$$b_n=1-\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o(1/\ln n),$$

意思是

$$1-a_n-\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln\ln n}{n}=o(1/n),$$

等价于

$$\frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\frac{\ln n}{n}\right)=-1+o(1/\ln\ln n),$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(\ln n)}\left(1-a_n-\frac{\ln n}{n}\right)=1.$$

例2.110 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 2}$ 为

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}.$$

显然, 可以证明 $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell-a_n}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

证明 (by ytdwdw) 显然数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 对于一切 n 皆有 $2^n>\ln n$, 故有

$$e^{2^n}>n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

这样

$$a_n<\sqrt{e^2+\sqrt{e^{2^2}+\cdots+\sqrt{e^{2^n}}}}<e\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}=\frac{e}{2}(1+\sqrt{5})$$

故数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 对于 $x\geqslant 1$, 记

$$a_n(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+1+\sqrt{x+2+\cdots+\sqrt{x+n-1}}}},\quad \ell(x)=\lim_{n\to\infty}a_n(x)$$

易见

$$\ell=\ell(1)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+\ell(n+1)}}}},$$

$$\sqrt{n}\leqslant\ell(n)\leqslant\sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\cdots}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n},$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\ell(n+1)}}{\sqrt{n}}=1.$$

又记

$$f_n(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+x}}}},\quad x\geqslant -n.$$

则存在 $\xi\in(0,\ell(n+1))$ 使得

$$\ell-a_n=f_n(\ell(n+1))-f_n(0)=f_n'(\xi)\ell(n+1)$$

$$= \ell(n+1)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{j+\sqrt{j+1+\cdots+\sqrt{n+\xi}}}}$$

从而

$$\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)} \leqslant \ell - a_n \leqslant \frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}$$

对于正数列 $\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 存在, 则由 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln b_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\ell(n+1)}{2^n\sqrt{n!}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{\ell(j)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ell(n)} = 1$$

因此, 由夹逼准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt[n]{\ell - a_n} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

2.5 Toeplitz 定理和 Stolz 定理

定理 2.19. Toeplitz 定理

设 $n,k\in\mathbb{N}, t_{nk}\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$

♡

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, $\exists M>0$, 使 $|a_n - a| < M, \forall n\in\mathbb{N}$.

$\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 固定 N_1, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$.

故 $\exists N_2\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$0\leqslant t_{nk}\leqslant\frac{\varepsilon}{2N_2M},\ k=1,2,\cdots,N_2.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 利用等式 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$ 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk}a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}(a_k - a)\right| \\ &\leqslant t_{n1}|a_1 - a| + \cdots + t_{nN_1}|a_{N_1} - a| + t_{nN_1+1}|a_{N_1+1} - a| + \cdots + t_{nn}|a_n - a| \\ &< M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn}) \\ &\leqslant M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2N_1M} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$

例2.111 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足

1. $b_n>0, b_0+b_1+\cdots+b_n\to+\infty, (n\to+\infty)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=s$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=s$

解 设 $t_{nk}=\dfrac{b_k}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}, k=0,1,2,\cdots,n.$ 显然 $t_{nk}>0$, 且

$$\sum_{k=0}^{n}t_{nk}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}t_{nk}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b_k}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}=0$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}\left(b_0\frac{a_0}{b_0}+b_1\frac{a_1}{b_1}+\cdots+b_n\frac{a_n}{b_n}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b_k}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\frac{a_k}{b_k}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}t_{nk}\frac{a_k}{b_k}\overset{\text{Topelitz}}{=\!=}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=s\end{aligned}$$

例2.112 设 $p_k>0, k=1,2,\cdots,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$$

解 设 $t_{nk}=\dfrac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}, k=1,2,\cdots,n,\ n=1,2,\cdots,$ 则 $t_{nk}>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1.$ 再由 $p_k>0\Rightarrow p_1+p_2+\cdots+p_n>p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}.$ 于是

$$0<t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}}\to0\ (n\to\infty)$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0.$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 可知 $\exists M>0$, s.t. 对任意的 $n\in\mathbb{N}^+, |a_n-a|<M.$ 同时, 对任意的 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

固定 N_1, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$ 可知 $\exists N_2\in\mathbb{N}^+$, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2N_1M},\ k=1,2,\cdots,N_1$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}t_{nk}|a_k-a|<M(t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn})<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$

例2.113 (武大,2011) 已知数列 $\{a_n\}$ 非负且单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=b$$

解 设 $t_{nk}=\dfrac{a_{n-k+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}, k=1,2,\cdots,n,\ n=1,2,\cdots,$ 则 $t_{nk}>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1.$ 再由

$a_n \geqslant 0, a_n \leqslant a_{n-1} \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-k+1} \geqslant (n-k+1)a_{n-k+1}$. 于是

$$0 \leqslant t_{nk} \leqslant \frac{a_{n-k+1}}{(n-k+1)a_{n-k+1}} = \frac{1}{n-k+1} \to 0 \ (n \to \infty)$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$.

再由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 可知 $\exists M > 0$, s.t. 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $|b_n - b| < M$. 同时, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

固定 N_1, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$ 可知 $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|t_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2N_1 M}, \ k = 1, 2, \cdots, N_1$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - b\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}b_k - b\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}b_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk}b\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} t_{nk}|b_k - b| < M(t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1} + \cdots + t_{nn}) < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = b$

定理 2.20. $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ 且 $\{x_n\}$ 严格增.

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \ (\text{实数}, \ +\infty, \ -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

♡

证明 [6] 令 $a_n = y_n - y_{n-1}, b_n = x_n - x_{n-1}$, 其中 $y_0 = 0 = x_0$. 于是 $b_n > 0$. 令

$$t_{nm} = \frac{b_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}, \quad m = 1, 2, \cdots, n$$

则 $t_{nm} > 0$, 且

$$t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nm} = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} t_{nm} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_m}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_m - x_{m-1}}{x_n} = 0$$

则

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \cdot \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \cdot \frac{a_n}{b_n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(t_{n1} \cdot \frac{a_1}{b_1} + \cdots + t_{nn} \cdot \frac{a_n}{b_n}\right) \\
&\overset{\text{Toeplitz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a
\end{aligned}$$

定理 2.21. $\frac{\bullet}{\infty}$ **型 Stolz 公式**

设有数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (注意: 不必 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$). 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \ (\text{实数}, +\infty, -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

♡

证明 (1) a 为实数.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a$, 所以 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\left| \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n-1}) < y_n - y_{n-1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n-1}).$$

类推有

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1} - x_{n-2}) < y_{n-1} - y_{n-2} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

$$\vdots$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{N_1+1} - x_{N_1}) < y_{N_1+1} - y_{N_1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{N_1+1} - x_{N_1}).$$

将上面各式相加得到

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{N_1}) < y_n - y_{N_1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{N_1}).$$

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n - y_{N_1}}{x_n - x_{N_1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

对固定的 N_1, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 所以, $\exists N > N_1$, s.t. 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < \frac{x_{N_1}}{x_n} < 1$$

于是

$$\begin{aligned}
\left| \frac{y_{N_1}}{x_n} - a \right| &= \left| \frac{y_n - y_{N_1}}{x_n} + \frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n} - a\left(1 - \frac{x_{N_1}}{x_n}\right) \right| \\
&= \left| \frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n} - \left(1 - \frac{x_{N_1}}{x_n}\right)\left(\frac{y_n - y_{N_1}}{x_n - x_{N_1}} - a\right) \right| \\
&= \left| \frac{y_{N_1} - a x_{N_1}}{x_n} \right| + \left| \frac{y_n - y_{N_1}}{x_n - x_{N_1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a$

(2) $a = +\infty$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a = +\infty$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} > 1, \quad y_n - y_{n-1} > x_n - x_{n-1} > 0$$

即 $\{y_n\}$ 严格增. 又由于

$$y_n - y_N = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \cdots + (y_{N_1+1} - y_N)$$

$$
\begin{aligned}
&> (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{N_1+1} - x_N) \\
&= x_n - x_N ,
\end{aligned}
$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. 应用 (1) 的结果得到

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} 1 \Big/ \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 1 \Big/ \frac{x_n}{y_n} = +\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}
$$

(3) $a = -\infty$

由 (2) 知,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{-y_n}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-y_n) - (-y_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{-y_n}{x_n} = -\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} .
$$

注意 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \infty$ 时, $\{x_n\}$ 严格增且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 时, 并不能推出

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \infty
$$

反例: $x_n = n$, $y_n = \left[1 + (-1)^n\right] n^2$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \infty$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} \neq \infty$

定理 2.22. $\dfrac{0}{0}$ **型 Stolz 公式**

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 其中 $\{x_n\}$ 严格减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. 如果

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a \ (\text{实数}, +\infty, -\infty),
$$

则

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}
$$

♡

证明 (1) a 为实数.

$\forall A > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$
\left| \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2},
$$

即

$$
a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}, \ x_n - x_{n+1} > 0
$$

$$
\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1}) < y_n - y_{n+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_n - x_{n+1}) .
$$

类推有

$$
\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+1} - x_{n+2}) < y_{n+1} - y_{n+2} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+1} - x_{n+2}) ,
$$

$$
\vdots
$$

$$
\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+p-1} - x_{n+p}) < y_{n+p-1} - y_{n+p} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_{n+p-1} - x_{n+p}) .
$$

将上面各式相加得到

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n-x_{n+p}\right)<y_n-y_{n+p}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(x_n-x_{n+p}\right).$$

令 $p\to+\infty$, 由 $x_{n+p}\to 0$, $y_{n+p}\to 0$, 得到

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_n\leqslant y_n\leqslant\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_n$$

由于 $x_n>0$, 有

$$a-\varepsilon<a-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{y_n}{x_n}\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=a$.

(2) $a=+\infty$

$\forall A>0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty$, 所以 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}>2A,,$$

类似上述论证有

$$y_n-y_{n+p}>2A(x_n-x_{n+p}).$$

令 $p\to+\infty$, 由 $y_{n+p}\to 0$, $x_{n+p}\to 0$, 得到

$$y_n\geqslant 2Ax_n,\quad \frac{y_n}{x_n}\geqslant 2A>A,$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$$

(3) $a=-\infty$

类似 (2) 的证明或将 (2) 的结论应用到 $\{-y_n\}$ 即得

例2.114 设 $a_n=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\{a_n\}$ 的极限。

证明 方法 1 直接用 Stolz 定理计算如下

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!n}=1$$

方法 2(夹逼准则) 因为

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!}{n!}+\frac{(n-1)!}{n!}+1$$

其中

$$0<\frac{1!+2!+3!+\cdots+(n-2)!}{n!}<\frac{(n-2)(n-2)!}{n!}\to 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}=1$$

例2.115 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+2}+\cdots+\sqrt{n^2+n}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.

解 令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k^2+k}-k\right)$, $y_n=n$, 显然 $x_n-x_{n-1}>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k^2+k}-k\right)}{n}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n-(n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}$$

例2.116 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)}{n^3}\\&\overset{Stolz}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3-(n-1)^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{3n^2-3n+1}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例2.117 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

证明 设

$$x_n=\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\begin{aligned}\ln x_n&=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{2^2-1}+2\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\end{aligned}$$

因为 $2^{n-1}\to+\infty$ 应用 Stolz 定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}}{2^{n-1}-2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=-\ln 2$$

例2.118 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)个1}}{10^n}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+11+\cdots+\overbrace{11\cdots1}^{(n+1)个1}}{10^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}10^i}{10^n}\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+1}10^i}{10^{n+1}-10^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+2}-1}{10-1}}{10^n(10-1)}=\frac{100}{81}\end{aligned}$$

例2.119 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}&\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}-\ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n+1} \ln k}{2n+1} \\
&\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例2.120 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}\right)$

解 令 $y_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$, $x_n = \frac{1}{n^2}$. 显然 $\{x_n\}$ 单调递减并趋于 0.

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 故 $\{y_n\} \to 0$, 利用 Stolz 公式

$$
\begin{aligned}
\text{原极限} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2(n-1)}}{\frac{1-2n}{n^2(n-1)^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{1-2n} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

练习 2.6 求极限: $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}} (\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots (\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$

解 令

$$
x_n = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}} (\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots (\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\ln x_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{3} + \frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{4}{7} + \cdots + \frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{3} + 2\ln\frac{4}{7} + \cdots + 2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)
\end{aligned}
$$

应用 Stolz 公式求极限

$$
\lim_{n\to\infty}\ln x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = \ln\frac{1}{2}
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}} (\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots (\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
$$

练习 2.7 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2011}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$

解 根据推广的积分第一中值定理, 对每个正整数 n 存在 $\theta_n \in (0,1)$ 使得

$$
\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = ((2n+\theta_n)\pi)^{2010}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x
$$

由此得

$$
\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})\right) \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \left((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})\right) \left(\frac{\cos 5x}{80} - \frac{\cos 3x}{48} - \frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\
&= \frac{4}{15}((2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})) \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

另外

$$
(2n+1)^{2011} - (2n-1)^{2011} = 4022(2n)^{2010} + o(n^{2010}) \ (n \to \infty)
$$

根据 Stolz 定理

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2011}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2010} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x}{(2n+1)^{2011} - (2n-1)^{2011}} \\
&= \frac{2}{30165} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n\pi)^{2010} + o(n^{2010})}{(2n)^{2010} + o(n^{2010})} \\
&= \frac{2\pi^{2010}}{30165}
\end{aligned}
$$

此题的更一般结果为

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^p \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{2\pi^p}{15(p+1)} (p > 0)
$$

例2.121 对 $n \in \mathbb{N}_+$, 定义

$$
S_n = 1 + \frac{n-1}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n-2}{n+3} + \cdots + \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n-2}{n+3} \cdots \cdot \frac{1}{2n}
$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\pi}{2}$

解 (by AoPs[5]) First, we simplify the expression for S_n:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k+1)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!/(n-k-1)!}{(n+k+1)!/(n+1)!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!(n-1)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} \\
&= (n+1)!(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{n-k-1}
\end{aligned}
$$

[5] https://artofproblemsolving.com/community/c7t116f7h1617426_limit_calculus

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\binom{2n}{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{n+1}} \cdot \frac{1}{2} \left[\left[\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \right] - \binom{2n}{n} \right] \\
&= \frac{1}{2\binom{2n}{n+1}} \left[2^{2n} - \binom{2n}{n} \right] \\
S_n &= \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\binom{2n}{n+1}}
\end{aligned}
$$

Then, we hammer at the resulting expression with Stirling's approximation:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\sqrt{n}\binom{2n}{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \frac{(2n)!}{n!n!}}{2\sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \dfrac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}}{2\sqrt{n} \cdot \dfrac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \dfrac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(n)^{n}\sqrt{2\pi n}(n)^{n}}}{2\sqrt{n} \cdot \dfrac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \dfrac{(2n)^{2n}}{\sqrt{\pi n}(n)^{2n}}}{\left(\dfrac{2\sqrt{n}\sqrt{n}(2n)^{2n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}}{\left(\dfrac{(2n)^{2n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\left(2^{2n} - \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)}{\dfrac{(2n)^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}2^{2n}\left(\sqrt{\pi n}-1\right)}{(2n)^{2n+1}\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\pi n}-1\right)}{2n^{2n+\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n+\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}{2n^{2n+\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

例2.122 设 $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $\forall n \geq 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

证明 法 1. 有 $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n) < x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减有界, 设

$$x_n \to a\ (n \to \infty), a = a(1-a), a = 0,$$

有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n} = 1,$$

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = 1.$$

法 2. 首先由归纳法容易证明:

$$x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n > \frac{n-1}{n}.$$

因而 $\{nx_{n+1}\}$ 是递增数列, 且

$$nx_{n+1} < \frac{n}{n+1} < 1.$$

这意味着 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_{n+1}$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ 存在. 我们假设

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \beta \leq 1.$$

用反证法, 如果 $\beta < 1$, 我们取 $\lambda = \dfrac{\beta+1}{2} < 1$, 则存在充分大的 k 使得

$$\forall n \geq k: \quad x_n < \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 - \frac{\lambda}{n}.$$

并且

$$\log\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\frac{\lambda}{n}, \quad \forall n \geq k.$$

所以

$$\frac{x_m}{x_k} \geq \prod_{n=k}^{m-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow x_m \geq x_k \exp\left\{-\frac{\lambda+1}{2}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{1}{n}\right\}.$$

可知

$$\lim_{m\to\infty} mx_m = +\infty.$$

得到矛盾. 所以 $\beta = 1$.

注意 [8](by maorenfeng88) 考虑 $p > 0$ 的情况, 套路如下:

已知 $a_{n+1} = f(a_n)$ 和 a_1, 证明 a_n 与 $n^{-\frac{1}{p}}$ 同阶。

1. 第一步, 证明 $a_n \to 0$。(根据要证的结果可以看出, 这个肯定是对的。)
2. 第二步, 把 $n^{-\frac{1}{p}}$ 次数去掉, 然后用 stolz: $\lim\dfrac{a_n^{-p}}{n} = \lim\dfrac{a_{n+1}^{-p} - a_n^{-p}}{(n+1)-n}$.
3. 第三步,把 $a_{n+1} = f(a_n)$ 代入,并利用归结原则换元 $a_n = t$:$\lim\dfrac{a_{n+1}^{-p} - a_n^{-p}}{(n+1)-n} = \lim\limits_{t\to 0}[f^{-p}(t) - t^{-p}]$

练习 2.8 设 $n \in N^+$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$

解 利用 $\sin^2 nt = \dfrac{1-\cos 2nt}{2}$, 可得 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2nt}{2\sin t}\,\mathrm{d}t$

所以

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2(n+1)t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2nt}{2\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt-\cos 2(n+1)t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t$$

利用和差化积公式

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

有:

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2(n+1)t\sin t}{2\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t$$
$$=\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2n+1}$$

所以 $I_n=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$, 显然当 $n\to+\infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

应用 $Stolz$ 定理有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

例2.123 (CMC,2019) 设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, 满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$; 又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1)$, $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,3,\cdots)$, 严格单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 Tayor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3),$$

又 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, 所以

$$f(x)=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3). \tag{2.7}$$

由于 $a_1\in(0,1)$, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $a_n>0$, 且 $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 为严格单调增加趋向于 $+\infty$ 的数列, 注意到 $a_{n+1}=f(a_n)$, 故由 Stolz 定理及 (2.7) 式, 有

$$\lim_{n\to\infty}na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/a_n^2}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/a_{n+1}^2-1/a_n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\left(a_n^2-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right)^2}{a_n^2-\left(a_n^2-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4-\frac{1}{3}a_n^6+\frac{1}{36}a_n^8+o(a_n^4)}{\frac{1}{3}a_n^4-\frac{1}{36}a_n^6+o(a_n^4)}=3$$

例2.124 (AMM12079) 设 $x_1\in(0,1)$. 且

$$x_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k),\ \forall n\geqslant 1$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ln n$

解[6] 显然有 $\forall n \geqslant 1, x_n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k) = \frac{1}{n}\left((n-1)\times\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+x_k)+\ln(1+x_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}\Big((n-1)x_n+\ln(1+x_n)\Big) \leqslant x_n \end{aligned}$$

综上, $\{x_n\}$ 单调递减有下界 0. 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k) \overset{\text{Cauchy 命题}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n)$$

从而易得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n\ln n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1/x_n} \overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{n(x_n-x_{n+1})} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\Big((n-1)x_n+\ln(1+x_n)\Big)x_n}{x_n-\ln(1+x_n)} = 2 \end{aligned}$$

例2.125 (AMM12084) 设 $0 < x_0 < \pi$. 且

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x_k), \forall n \geqslant 1$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{\ln n}$.

解[7] 由递推关系式有

$$x_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin(x_k)+\sin(x_n)}{n+1} = \frac{nx_n+\sin(x_n)}{n+1}$$

又 $0 < x_0 < \pi$, 从而

$$0 < x_{n+1} < \frac{nx_n+x_n}{n+1} < x_n$$

故由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx_n+\sin(x_n)}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l = 0$$

由 Taylor 公式可得

$$x_{n+1} = \frac{nx_n+x_n-\frac{x_n^3}{6}+o(x_n^3)}{n+1} = x_n\left(1-\frac{x_n^2}{6(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n+1}^2} &= \frac{1}{x_n^2}\left(1-\frac{x_n^2}{6(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{x_n^2}\left(1+\frac{x_n^2}{3(n+1)}+\frac{o(x_n^2)}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{x_n^2}+\frac{1}{3(n+1)}+\frac{o(1)}{n+1} \end{aligned}$$

由 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\sqrt{\ln n})^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{x_n^2}} \overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{3(n+1)}+\frac{o(1)}{n+1}} = 3$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{\ln n} = \sqrt{3}$.

[6] http://www.mat.uniroma2.it/~tauraso/AMM/amm2018.html
[7] http://www.mat.uniroma2.it/~tauraso/AMM/amm.html

练习 2.9 $a_n>0$, 且$a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n\geq 1)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$

证明 假设 $0<a_n<M$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow a_n-a_1=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\geq 2\frac{n-1}{M}$$

令 $n\to+\infty, a_n$ 无界, 与假设矛盾！显然 a_n 严格单调递增, 故 $a_n\to+\infty(n\to+\infty)$

将 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2+\frac{1}{a_{n+1}^2}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+4$$

从而

$$a_n+\frac{1}{a_n}=\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}$$

用 Stolz 公式, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}-2+\dfrac{1}{a_{n+1}}}}=1$$

例2.126 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\left(a_n-\sqrt{2n}\right)$

解 (by ytdwdw) 首先, a_n 为正, 且严格单调增加. 用反证法立即得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$. 所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{n}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{a_n^2}\right)=2$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\left(a_n-\sqrt{2n}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n+\sqrt{2n})(a_n-\sqrt{2n})}{2\sqrt{2}\ln n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-2n}{2\sqrt{2}\ln n}\overset{\text{Stolz}}{=\!=}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-2}{2\sqrt{2}\ln\frac{n+1}{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2\sqrt{2}a_n^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

例2.127 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}$

证明 记

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

若 a_n 有界, 则 $\exists M>0$ s.t $a_n\leqslant M$ 且 $S_n\leqslant nM$, 故

$$a_k-a_{k-1}=\frac{1}{S_{k-1}}\geqslant\frac{1}{(k-1)M},\ k=2,3,\cdots$$

将以上 $k-1$ 个式子累加可得

$$a_n-a_1\geqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}{M}\to\infty\,(n\to+\infty)$$

从而 a_n 无界. 由数学归纳法可知 $a_n > 0$, 从而 a_n 严格单调递增且趋于 $+\infty$, 所以

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{a_n S_n} < \frac{1}{na_n}$$

从而

$$1 < n + 1 - \frac{na_n}{a_{n+1}} < \frac{1 + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{na_n}}{1 + \frac{1}{na_n}}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(n + 1 - \frac{na_n}{a_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = 1$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = 1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{S_n}\cdot\frac{1}{a_n S_n}\right) = 0$$

再由 Stolz 定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n} \overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{S_n} + \frac{1}{S_n^2}\right) = 1$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$

例2.128 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{n}{a_n}$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

解 由题意易得 $a_2 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{n}{a_n} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n}a_n \tag{2.8}$$

由(2.8)可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n-2}a_{n-2} = \frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}a_{n-4} \\ &= \cdots = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-3}{n-4}\cdots\dfrac{3}{2}a_2, & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-3}{n-4}\cdots\dfrac{2}{1}a_1, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

从而

$$b_n = \frac{1}{a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n}} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(2n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k} &= \lim_{n\to\infty}(2n)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}b_k \\ &\overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{a_k} = \lim_{n\to\infty}(2n+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

例2.129 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+e^{-a_n}$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n}-1\right)=\frac{1}{2}$$

解 我们先证里面层的，就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=1$, 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}}{n}=1$

由条件得 $a_{n+1}>a_n$, 所以数列严格递增，因此有有限正极限或者极限为 $+\infty$,

若 $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 则有

$$A=A+e^{-A}\Longrightarrow 0=e^{-A}$$

因此只能有 $A=+\infty$, 这样就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$

$$e^{a_{n+1}}=e^{a_n}\cdot e^{\frac{1}{e^{a_n}}}=e^{a_n}(1+e^{-a_n}+o(e^{-a_n}))\qquad (n\to+\infty)$$

所以就有

$$e^{a_{n+1}}=e^{a_n}+1+o(e^{-a_n})\qquad (n\to\infty)$$

O.Stolz 马上看到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{a_n}}{n}=1$, 这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}=1$, 而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-n\ln n}{a_n}$$

又由 O.Stolz 得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-n\ln n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n-((n+1)\ln(n+1)-n\ln n)}{a_{n+1}-a_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(a_n+e^{-a_n})-na_n-\ln\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}{e^{-a_n}}\\&\overset{a_n\sim\ln n}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n}(n+1)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例2.130 假设 $x\to 0^+$ 时, 函数 $f(x)=x-Ax^{1+\alpha}+Bx^{1+2\alpha}\ln x+O(x^{1+3\alpha})$ 其中 $A,\alpha>0$. 如果数列 a_n 递减于 0, 并且 $a_{n+1}=f(a_n)$, 那么我们有

$$a_n=\frac{1}{(\alpha An)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{B}{2\alpha^3A^2}\frac{(\ln n)^2}{n}-\frac{2B\ln\alpha A+\alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha^3A^2}\frac{\ln n}{n}+O(n^{-1})\right)$$

解 (by 逆逆) 记 $b_n=a_n^{-\alpha}$, 则 $b_n\to\infty$ 且有

$$\begin{aligned}b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}^a}&=b_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-\alpha}\\&=b_n\left(1-Aa_n^{\alpha}+Ba_n^{2\alpha}\ln a_n+O\left(a_n^{3\alpha}\right)\right)^{-\alpha}\\&=b_n\left(1-\frac{A}{b_n}-\frac{B}{\alpha b_n^2}\ln b_n+O\left(\frac{1}{b_n^3}\right)\right)^{-\alpha}\\&=b_n\left(1+\frac{\alpha A}{b_n}+\frac{B}{b_n^2}\ln b_n+\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\cdot\frac{A^2}{b_n^2}+O\left(\frac{\ln b_n}{b_n^3}\right)\right)\\&=b_n+\alpha A+B\cdot\frac{\ln b_n}{b_n}+\frac{\alpha(1+\alpha)A^2}{2}\cdot\frac{1}{b_n}+O\left(\frac{\ln b_n}{b_n^2}\right)\end{aligned}$$

根据 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}-b_n=\lim_{n\to\infty}\alpha A+O\left(\frac{\ln b_n}{b_n}\right)=\alpha A$$

于是

$$b_n=b_1+\alpha A(n-1)+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+\ln k}{k}\right)$$

$$= \alpha An + O\left((\ln n)^2\right) = \alpha An\left(1 + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)\right)$$

所以

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \alpha A(n-1) + B\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln \alpha An + O\left(\frac{(\ln n)^2}{\pi}\right)}{\alpha \cdot An\left(1 + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)\right)} + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2}A^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1 + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right)}{\alpha An} + O(1) \\ &= \alpha An + B\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln \alpha An}{\alpha An} + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2}A^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha An} + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\ln n)^3}{n^2}\right) + O(1) \\ &= \alpha An + \frac{B}{\alpha A}\left(\frac{(\ln n)^2}{2} + \ln \alpha A \ln n\right) + \frac{(1+\alpha)A}{2}\ln n + O(1) \\ &= \alpha An + \frac{B}{2\alpha A}(\ln n)^2 + \frac{2B\ln \alpha A + \alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha A}\ln n + O(1) \end{aligned}$$

这样就不难得到

$$a_n = b_n^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{(\alpha An)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1 - \frac{B}{2\alpha^3 A^2}\frac{(\ln n)^2}{n} - \frac{2B\ln \alpha A + \alpha(1+\alpha)A^2}{2\alpha^3 A^2}\frac{\ln n}{n} + O(n^{-1})\right)$$

例2.131 正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right) = 1$, 且 $p > -1$ 是已知常数,

求 A, B, 使得 A, B 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A - na_n^{p+1}) = B$$

解 设 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^p$, 容易证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

由 O.Stolz 定理得到

$$\lim_{n\to\infty} na_n^{p+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^{p+1}} - \frac{1}{a_n^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_{n+1}^{p+1} - S_n^p}$$

而

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{p+1} - S_n^{p+1} &= S_{n+1}^{p+1} - (S_{n+1} - a_{n+1}^p)^{p+1} \\ &= S_{n+1} - \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k (-1)^k S_{n+1}^{p+1-k}\cdot a_{n+1}^{pk} \\ &= (p+1)S_{n+1}a_{n+1} - \frac{(p+1)p}{2!}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p} + \cdots \\ &= (p+1) + o(1) \qquad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

所以 $A = \frac{1}{p+1}$, 同时有 $(p+1)a_n^{p+1} \sim \frac{1}{n}$, 这时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(A - na_n^{p+1}) = \lim_{n\to\infty} na_n^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1} - n}{\ln n}$$

又有 O.Stolz 定理

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{A\cdot S_n^{p+1} - n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{A(S_{n+1}^{p+1} - S_n^p) - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{p+1}\left((p+1) - \frac{(p+1)p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_n^{2p} + \cdots\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{p}{2}S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p} + o(S_{n+1}^{p-1}a_{n+1}^{2p})}{(p+1)a_{n+1}^{p+1}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{p}{2(p+1)}$$

所以

$$B = -\frac{p}{2(p+1)^2}$$

例2.132 设 k 是一个大于 1 的整数，且 $x_0 > 0$, 满足 $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt[k]{x_n}}$,

求: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_n^{k+1}}{n^k}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{k+1}}{n^k} - \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

解 (by 西西) 我们将要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{k+1}}{n^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

为此，只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{k}$$

而归纳得到 $x_{n+1} > x_n, x_n > 0$, 因此，x_n 的单调递增序列。设 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, 则有 $A = +\infty$. 说明 $x_n \to +\infty, n \to +\infty$.

$$\begin{aligned}(x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}} - x_n^{1+\frac{1}{k}}) &= x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}} - 1\right)\\ &= x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)\right] - 1\right)\\ &\sim \frac{k+1}{k}(n\to+\infty)\end{aligned}$$

所以，由 O.Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{1+\frac{1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{k}$$

对于加强版本，我们先看一个事实，对任意一个收敛的序列，比如说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 那么，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n^k - A^k)}{a_n - A} = kA^{k-1}$$

这样，设 $a_n = \frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{k+1}{k} = A$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n^k - A^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n - A)\cdot k\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}$$

于是，只要证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(a_n - A) = \frac{1}{2k}$, 就是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} - A\right) = \frac{1}{2k}$$

$$\frac{n}{\ln n}\left(\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} - A\right) = \frac{x_n^{\frac{k+1}{k}} - nA}{\ln n}$$

这时，可以用 O.Stolz 定理了。就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{\frac{k+1}{k}}-nA}{\ln n}\overset{O.Stolz}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{1+\frac{1}{k}}-x_n^{1+\frac{1}{k}}-A}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1+\frac{1}{k}}-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\exp\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right)-1\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left[x_n^{1+\frac{1}{k}}\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}\right)^2\right)^2\right)-A\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{k+1}{2k^2}\frac{n}{x_n^{1+\frac{1}{k}}}=\frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

因此，命题得证。

定理 2.23. 函数极限的 Stolz 定理

设函数 $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, 满足:

(1) $g(x+T)>g(x),\forall x\geqslant a$, 其中 $T>0$ 为常数;

(2) 函数 f,g 在 $[a,+\infty)$ 的任何有限子区间有界;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$$

那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ ♡

证明 由题意, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>a$, 当 $x\geqslant\Delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

对 $\forall x>\Delta+T,\exists k\in\mathbb{N}$, 使 $x=\Delta+kT+r,0\leqslant r<T$, 显然, $x\to+\infty\Leftrightarrow k\to+\infty$. 排出一系列不等式:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x-T)}{g(x)-g(x-T)}<A+\varepsilon$$

$$\vdots$$

$$A-\varepsilon<\frac{f(x-(k-1)T)-f(x-kT)}{g(x-(k-1)T)-g(x-kT)}<A+\varepsilon$$

应用合分比公式

$$\begin{aligned}
A-\varepsilon&=\frac{f(x)-f(x-T)+f(x-T)-f(x-2T)+\cdots+f(x-(k-1)T)-f(x-kT)}{g(x)-g(x-T)+g(x-T)-g(x-2T)+\cdots+g(x-(k-1)T)-g(x-kT)}\\
&=\frac{f(x)-f(x-kT)}{g(x)-g(x-kT)}=\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}<A+\varepsilon
\end{aligned}$$

由 f,g 在 $[\Delta,\Delta+T]$ 中有界及 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\leqslant A+\varepsilon\,,\quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\geqslant A-\varepsilon$$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\leqslant A+\varepsilon$$
$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)-f(\Delta+r)}{g(x)-g(\Delta+r)}\geqslant A-\varepsilon$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任取的, 故有

$$A\leqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

例2.133 求极限: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$

解 (by 向禹) 令 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$, $g(x)=\ln x$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\pi)-f(x)}{g(x+\pi)-g(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+\frac{\pi}{x})}\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\pi}\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\pi\xi}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\,,\ \xi\in[x,x+\pi]\\&\xlongequal{\text{周期性}}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

例2.134 设 $f(x)=|\sin x|$, 记 $g(x)=\dfrac{\displaystyle\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

解 (by 向禹) 令 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t$, $g(x)=x^{m+1}$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\pi)-f(x)}{g(x+\pi)-g(x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(x+\pi)^{m+1}-x^{m+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}t^m|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(m+1)\pi x^m}\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi^m}{(m+1)\pi x^m}\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\,,\ \xi\in[x,x+\pi]\\&=\frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{(m+1)\pi}\end{aligned}$$

.AA

2.6 无穷小的比较

性质 有限个无穷小的和仍是无穷小.

性质 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 有界函数和无穷小的乘积是无穷小.

证明 设函数 $u(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内是有界的,

即 $\exists M>0$ 使得 $|u(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,

即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, 有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,

$$|u|\leqslant M \quad 和 \quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha|=|u||\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}u\alpha=0$.

定理 2.24

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$. ♡

证明 先证必要性. 设 $\alpha\sim\beta$, 则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0,$$

因此 $\beta-\alpha=o(\alpha)$, 即

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

再证充分性. 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

因此 $\alpha\sim\beta$, 证毕.

例2.135 证明：当$x\to0$ 时, 有 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$

证明

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right)$$
$$\sim\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)=x\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\sim x$$

例2.136 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$

解 (by ytdwdw) 注意到

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|,\ \forall x\neq0$$

由夹逼准则得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=0$$

但在承认 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ 的前提下, 对于利用等价关系的算式

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left[x\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0 \tag{2.9}$$

1. (2.9) 错误. 不满足极限定义
2. (2.9) 正确. 因为在那些让 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 为 0 的点上, 不妨认为 $\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}$ 的值为 1, 过于强调此题不能用等价关系是舍本逐末.

例2.137 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{1-\cos^{\alpha}x}\sqrt{1-\cos^{\beta}x}}$

解 注意到

$$1-\cos^{\alpha}x=1-\big(1+(\cos x-1)\big)^{\alpha}\sim-\alpha(\cos x-1)\sim\frac{\alpha}{2}x^2$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{1-\cos^{\alpha}x}\sqrt{1-\cos^{\alpha}x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}x^2}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}x^2}\sqrt{\frac{\beta}{2}x^2}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

例2.138 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos^3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+(\cos^3x-1)}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\cos^3x-1)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{[1+(\cos x-1)]^3-1}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3(\cos x-1)}{x^2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

例2.139 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x\cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}\\&\xlongequal{1=\sin^2x+\cos^2x}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos^2(1-\cos 2x)+\sin^2x}{x^2}\\&\xlongequal{\text{极限的四则运算}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\cos^2x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

例2.140 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^2\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\times\lim_{x\to0}\frac{\cos x+1}{1}\\&=2\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

例2.141 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \xlongequal{\text{取对数}\ f^g=e^{g\ln f}} \exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e}\right)$$

$$\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\exp\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{ex}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}$$

$$\xlongequal{e^x-1\sim x}\exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$\xlongequal{x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

例2.142 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{x}$

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}}{x^2}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}}$$

$$=\frac{e}{2}$$

例2.143 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}}}{x^2}\left(e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-\frac{\ln(1+x)-x}{x}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{e+1}}{x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^2/2}{x}\right)^2=\frac{e^{e+1}}{8}$$

例2.144 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}=2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\ln 2}\sqrt{4+t}\ln(2+t)-1}{t}$$

$$=2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\exp\ln\left(\frac{1}{2\ln 2}\sqrt{4+t}\ln(2+t)\right)-1}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{-\ln 2-\ln\ln 2+\frac{1}{2}\ln(4+t)+\ln\ln(2+t)}{t}\\
&=2\ln 2\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{t}{4})}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\frac{\ln(2+t)}{\ln 2}}{t}\right)\\
&=2\ln 2\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{t}{2})}{\ln 2}\right)}{t}\right)\\
&=2\ln 2\left(\frac{1}{8}+\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{t}{2\ln 2}}{t}\right)=\frac{1}{4}\ln 2+1
\end{aligned}
$$

例2.145 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right)$

解 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{e}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}}-e^{\frac{\ln[(n)!]}{n}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[e^{\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln[(n)!]}{n}}-1\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left[\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}-\frac{\ln(n!)}{n}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\frac{n\ln[(n+1)!]}{n+1}-\ln(n!)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left[\ln[(n+1)!]-\ln(n!)-\frac{\ln[(n+1)!]}{n+1}\right]\\
&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)\right]\\
&=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)=\frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

例2.146 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^\pi\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x+\sin\int_0^\pi\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)$

解 当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x=\dfrac{x^3}{2}$, 于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^\pi\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x+\sin\int_0^\pi\sqrt[n]{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}n^3\left(\tan\int_0^\pi\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x-\sin\int_0^\pi\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\int_0^\pi\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\int_0^\pi\ln\sin x\,\mathrm{d}x\right)^3}{2}=-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}
\end{aligned}
$$

例2.147 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$

解 (by ytdwdw) 由

$$\lim_{n\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{2}{3}$$

得存在常数 C 使得

$$\left|\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\right|\leqslant\frac{C\sin^4 nx}{x}\leqslant Cn,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^3 x\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{分部积分}}\int_0^{+\infty}\frac{6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{Froullani}}\ln 2\end{aligned}$$

例2.148 求 $x\to1^-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解 注意到当 $x\to1^-$ 时，$f(n)=x^{n^2}$ 在 $n\in[0,+\infty)$ 内单调递减，因此

一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}t\\&<1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=1+\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x,\quad x\to1^-\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}t>\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{n^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^{n^2}\,\mathrm{d}x,\quad x\to1^-$$

故

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t+1,\quad x\to1^-$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u]{t^2=u}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.7 函数的连续性与间断点

定义 2.5. $f(x)$ 在 x_0 处连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,\tag{1-6}$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. ♣

例2.149 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

证明 设 x 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点, 当 x 取得改变量 Δx 时, 对应函数的改变量是 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. 因为

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

同时

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

于是得到

$$|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

因为对任意的角度 α, 当 $\alpha\neq 0$ 时有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$, 所以

$$0\leqslant|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|<2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|.$$

故当 $\Delta x\to 0$ 时, 由夹逼定理知 $|\Delta y|\to 0$, 从而 $\Delta y\to 0$, 即函数在 x 处连续.
由 x 的任意性得到 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.
同理可证函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

定义 2.6. $f(x)$ 在 x_0 处连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{1-5}$$

则称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续**.
上述定义用“ε-δ”语言表述如下:
$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ♣

例2.150 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 点连续

证明 [9]

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right]$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right]$$

又, 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 点也连续; 由连续函数的和、差仍连续,
故 $\varphi(x),\psi(x)$ 在点 x_0 点连续

例2.151 设 f 与 g 为两个周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$. 证明: $f=g$

证明 [6] 设 f 和 g 的周期分别为 T_f 和 T_g, 则对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\lim_{n\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)\\&=\lim_{n\to+\infty}\big[(f(x+nT_f)-g(x+nT_f)+\\&\qquad(g(x+nT_f+nT_g)-f(x+nT_f+nT_g))+(f(x+nT_g)+g(x+nT_g))\big]\\&=0+0+0=0\end{aligned}$$

故 $f(x)=g(x)$, 所以 $f=g$

例2.152 (华东师大; 南航) 设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 连续. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为常数

解 当 $x>0$ 时, 由已知条件, 有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x<0$ 时, $f(x)=f(x^2)=f(1)$

$$f(x)=f(x^2)=f(|x|^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(|x|^{\frac{1}{2^n}})=f\left(\lim_{n\to\infty}|x|^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

当 $x=0$ 时, $f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(1)=f(1)$.

综上知, $f(x)\equiv f(1)$(常数)

例2.153 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数, 求 a,b 的值

解 $x=1,x=-1$ 处可能是间断点, 在 $x=1,x=-1$ 分别求左右极限

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{+\infty}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{+\infty}+1}=\lim_{x\to1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{0}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{0}+1}=\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+bx}{1}=a+b$$

$f(x)$ 连续 $\Longrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\Longrightarrow a+b=1$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{0}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{\infty}+1}=\lim_{x\to-1^+}\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+bx}{1}=a-b$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{x^{2n-1}}^{-\infty}+ax^2+bx}{\underbrace{x^{2n}}_{\infty}+1}=\lim_{x\to-1^-}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}}=-1$$

$f(x)$ 连续 $\Longrightarrow\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\Longrightarrow a-b=-1$

$$\begin{cases}a+b=1\\a-b=-1\end{cases}\Longrightarrow a=0,b=1$$

例2.154 设 $f(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|x-a|e^x\,\mathrm{d}x$, 求 $f(a)$ 并判断连续性.

证明 首先去绝对值则有

1: $a\leqslant1$ 时 $f(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(a-x)e^x\,\mathrm{d}x=ae-\frac{a+2}{e}$

2: $a\geqslant1$ 时 $f(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-a)e^x\,\mathrm{d}x=\frac{a+2}{e}-ae$

3：$-1<a<1$ 时 $f(a)=\int_{-1}^{a}(a-x)e^x\,\mathrm{d}x+\int_{a}^{1}(x-a)e^x\,\mathrm{d}x=2e^a-ae-\dfrac{a+2}{e}$

所以

$$f(a)=\begin{cases}ae-\dfrac{a+2}{e} & a\leqslant 1\\ \dfrac{a+2}{e}-ae & a\geqslant 1\\ 2e^a-ae-\dfrac{a+2}{e} & -1<a<1\end{cases}$$

因为

$$\lim_{a\to 1^+}f(a)=\lim_{a\to 1^-}f(a)=e-\frac{3}{e}=f(1)$$

故 $f(a)$ 在 $x=1$ 处连续因为

$$\lim_{a\to -1^+}f(a)=\lim_{a\to -1^-}f(a)=\frac{1}{e}+e=f(-1)$$

故 $f(a)$ 在 $x=-1$ 处连续

定义 2.7. 函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义. ... 同 7p58 ♣

2.7.1 闭区间上连续函数的性质

定理 2.25. 介值定理

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$. ♡

证明 构造辅助函数，设 $\varphi(x)=f(x)-C$.
则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(a)=A-C$ 与 $\varphi(b)=B-C$ 异号 (C 在 A 与 B 之间)，
所以由零点定理知，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi(\xi)=0$. 而 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$，
于是得到

$$f(\xi)=C\quad(a<\xi<b).$$

该定理的几何意义是：连续曲线 $y=f(x)$ 与数 A 和数 B 之间的任一条水平直线 $y=C$ 至少有一个交点

✍ **练习 2.10** 设 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=1,g(0)=0$，单调递增函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\geq 0,f(x)\leq 1$. 证明：$f(x)=g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一定有解.

解 只需考察 $f(0)\neq g(0)$，则 $f(0)>g(0)=0$. 由 $g\in C[0,1]$ 可知 $\exists\varepsilon_0>0$，使得当 $0\leq x\leq\varepsilon_0$ 时，有

$$g(x)<f(0)\leq f(x).$$

令 $A=\{t:x\in[0,t],g(x)<f(x)\}$，则 $\varepsilon_0\in A$，记 $S=\sup A$. 若 $S=1$，则对 $\forall x\in[0,1)$，有 $g(x)<f(x)\leq f(1)$，则

$$1\geq f(1)\geq\lim_{x\to 1^-}g(x)=g(1)=1,$$

因此 $f(1)=g(1)=1$. 若 $S<1$，则对 $\forall x\in[0,S)$，有 $g(x)<f(x)\leq f(S)$，则

$$f(S)\geq\lim_{x\to S^-}g(x)=g(S),$$

则 $f(S)>g(S)$. 于是 $\exists\varepsilon_1>0$，使得 $S\leq x\leq S+\varepsilon_1$ 时，有 $g(x)<f(S)\leq f(x)$，则 $S+\varepsilon_1\in A$，与 $S=\sup A$ 矛盾.

2.8 一致连续性

2.8.1 函数的一致连续性

例2.155 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

证明 因为对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant|x_2-x_1|$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续

例2.156 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 不上一致连续

证明 取原点附近的两点

$$x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数, 这样的 x_1,x_2 显然在 $(0,1]$ 上. 因

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$$

故只要 n 取得足够大, 总能使 $|x_1-x_2|<\delta$. 但这时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon$$

不符合一致连续的定义, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不上一致连续

定理 2.26. 连续周期函数必一致连续

若函数 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. ♡

证明 设 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(x)$ 在 $[0,2T]$ 上一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in[0,2T]$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 满足 $|x_1-x_2|<\delta<T$, 则必存在整数 m, 使 $x_1=mT+t_1,x_2=mT+t_2$, 且 $\min\{t_1,t_2\}\in[0,T]$. 于是, $t_1,t_2\in[0,2T]$ 且满足 $|t_1-t_2|\leqslant|x_1-x_2|<\delta$, 故

$$|f(t_1)-f(t_2)|=|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

例2.157 证明: $f(x)=\sin^2x+\sin x^2$ 不是周期函数.

解 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续显然. 若 $f(x)$ 是周期函数由 (2.8.1) 知, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必一致连续, 所有只需要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一直连续即可. 事实上, 取 $x_1=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, $x_2=\sqrt{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}},n=1,2,\cdots$. 尽管

$$|x_1-x_2|=\frac{\pi}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}}\to0\ (n\to\infty),$$

但 $|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin^2 x_1-\sin^2 x_2-2|\to 2\neq 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. 这里应用了

$$\begin{aligned}|\sin^2 x_1-\sin^2 x_2| &= |\sin x_1-\sin x_2||\sin x_1+\sin x_2|\\ &\leqslant 4\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\\ &\leqslant 2|x_1-x_2|\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

练习 2.11 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 >0, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\alpha)=0$. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=0$.

解 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x,y\in[0,+\infty).$$

对上述 ε, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\delta)=0$ 知: $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|f(n\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$.
取 $A=N\delta,\forall x>A,\exists n\geqslant N$, 使得

$$n\delta\leqslant x<(n+1)\delta\Leftrightarrow 0<x-n\delta<\delta.$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(n\delta)|+|f(n\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

练习 2.12 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界, 证明: $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

解 对任意 $0<x_1<x_2<+\infty$, 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi).$$

设 $M=\sup\{2|f'(x)|\sqrt{x}:x\in(0,+\infty)\}<+\infty$, 则

$$|f(x_2)-f(x_1)|=2|f'(\xi)|\sqrt{\xi}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\leqslant M\sqrt{x_2-x_1}.$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

练习 2.13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:$m(x)=\min\limits_{t\in[a,x]} f(t), M(x)=\max\limits_{t\in[a,x]} f(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续。

解 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 事实上, 对 $\forall\ a\leq x_1<x_2\leq b$

$$0\leq m(x_1)-m(x_2)\leq\max_{t\in[x_1,x_2]} f(t)-\min_{t\in[x_1,x_2]} f(t)=\omega(f,[x_1,x_2])$$

根据 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知它在 $[a,b]$ 上一致连续, 从而

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,st\ \ \forall\ a\leq x_1<x_2\leq b$$

只要 $x_2-x_1<\delta$, 就有 $\omega(f,[x_1,x_2])<\varepsilon$ 从而对这样的 δ,x_1,x_2, 必有

$$0\leq m(x_1)-m(x_2)<\varepsilon$$

从而 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 即连续。[8]

2.8.2 函数列的一致连续性

例2.158 (华师大, 2017) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 对任意的 $x>0$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$. 证明: $\{f(x+n)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

[8]类似地, 当 $M(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 的最大值时, $M(x)$ 亦连续

解 反证法. 假设结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 严格单调递增正整数列 $\{n_k\}$ 和数列 $\{x_k\}$ 使得 $|f(x_k + n_k)| \geqslant \varepsilon_0$. $\{x_k\}$ 有收敛的子列, 不妨仍然记为 $\{x_k\}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = y$, 则

$$|f(x_k + n_k)| \leqslant |f(x_k + n_k) - f(y + n_k)| + |f(y + n_k)|,$$

$|(x_k + n_k) - (y + n_k)| = |x_k - y| \to 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_k + n_k) - f(y + n_k)| = 0,$$

对任意的 $x > 0$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x + n) = 0$, 故

$$\lim_{k\to\infty} f(y + n_k) = 0,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k + n_k)| = 0$, 这与 $|f(x_k + n_k)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾!

定理 2.27. 最值判别法

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上点一致收敛于 $f(x)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = u(x), x \in I$. 令 $M_n = \sup\limits_{x\in I}\{|f_n(x) - f(x)|\}(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$

♡

例2.159 试判断下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \ (-\infty, +\infty)$$

解 首先, 看点收敛, 易知有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + nx^2} = 0, x \in (-\infty, +\infty).$$

其次, 计算 M_n. 由等式

$$M_n = \sup_{(-\infty,+\infty)} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \sup_{(-\infty,+\infty)} \left\{\left|\frac{x}{1 + nx^2}\right|\right\}$$

注意到函数 $\left|\dfrac{x}{1 + nx^2}\right|$ 在 $x \to +\infty$ 或 $-\infty$ 时趋向于 0, 可知其上确界就是函数在正半轴上的最大值. 用导数求极值法,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1 + nx^2}\right) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

易得, 在 $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 处达到最大值, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$. 这说明 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 0.

定理 2.28. 狄尼 (Dini) 定理

1. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上单调,
2. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上收敛于 $f(x)$,
3. 每个 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续,

则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

♡

第 3 章 导数与微分

例3.1 设函数 $f(x)$ 可导, 在 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件

证明 (1) $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 连续, 又 $f(0)=0$, 于是可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned} F'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}\\ &=f'(0)+0=f'(0)\end{aligned}$$

(2) $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 连续, 于是可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\begin{aligned} F'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}\\ &=f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=f'(0)-f(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}\\ &=f'(0)+f(0)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=f'(0)+f(0)\end{aligned}$$

$F(x)$ 可导 $\Longrightarrow F'(0)=F'_-(0)=F'_+(0)\Longrightarrow f(0)=0$

例3.2 (02 年数学 I) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界可导, 则 (　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$

解

(A) 取 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$, 则 $f'(x)=2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在.

(B) 反证法. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k\neq 0$, 不妨设 $k>0$, 由极限的保号性知存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时, 有 $f'(x)>\dfrac{k}{2}$.

$$\int_M^x f'(x)\,\mathrm{d}x>\int_M^x\frac{k}{2}\,\mathrm{d}x\Longrightarrow f(x)>\frac{k}{2}(x-M)+f(M)$$

上式与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界矛盾.

(C) , (D) 取 $f(x)=\sin x$

例3.3 设函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 处可导, 且对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$.

证明 在关系式 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 中令 $x=y=1$, 则得到 $f(1)=0$

$$f(xy)=yf(x)+xf(y)\Longleftrightarrow f(xy)-f(x)=yf(x)-f(x)+xf(y)$$

上式两边同除以 $x(y-1)$ 可得

$$\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{yf(x)-f(x)+xf(y)}{x(y-1)}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

令 $y\to1$ 得

$$\lim_{y\to1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+\lim_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1}$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

$$\lim_{y\to1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$$

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 且 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)$.

例3.4 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0)=0$, 且

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a.$$

证明: $f'(0)=a$.

解 先证明: $f'_+(0)=a$. 由已知条件, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$, 有

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-a\right|<\varepsilon$$

或

$$x(a-\varepsilon)<f(2x)-f(0)<x(a+\varepsilon)\tag{3.1}$$

由式 (3.1) 可得

$$\frac{x}{2}(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{x}{2}(a+\varepsilon)$$

$$\frac{x}{2^2}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)<\frac{x}{2^2}(a+\varepsilon)$$

$$\vdots$$

$$\frac{x}{2^n}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<\frac{x}{2^n}(a+\varepsilon)$$

将上述不等式相加, 可得

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a+\varepsilon),$$

$\forall n$, 令 $n\to\infty$, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以有

$$x(a-\varepsilon)<f(x)-f(0)<x(a+\varepsilon)$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-a\right|<\varepsilon.$$

这表明 $f'_+(0)=a$. 同理可证: $f'_-(0)=a$. 故 $f'(0)=a$

例3.5 若 $f(x)$ 为在 $x=0$ 点处的可微函数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)$ 严格大于 0, 则有极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|=\frac{f'(0)}{\alpha},\ \forall\alpha>1$$

解 (by Bruce) 因为 $f(0)=0$, 且 $f(x)$ 可微, 则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. 由极限定义知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有

$$x(|f'(0)|-\varepsilon)<f(x)<x(|f'(0)|+\varepsilon)$$

取 n 足够大, 使得 $\dfrac{1}{n}<\delta$, 并令 $x=\dfrac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\ (k=1,2,\cdots,n)$. 显然

$$|x|=\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}<\frac{n^{\alpha-1}}{n^\alpha}=\frac{1}{n}<\delta$$

故满足

$$\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}(|f'(0)|-\varepsilon)<\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|<\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}(|f'(0)|+\varepsilon)\tag{3.2}$$

注意到

$$k^{\alpha-1}<\int_k^{k+1}x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{(k+1)^\alpha-k^\alpha}{\alpha}$$

$$k^{\alpha-1}>\int_{k-1}^{k}x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{k^\alpha-(k-1)^\alpha}{\alpha}$$

代回 (3.2) 式, 并对其求和

$$\frac{1}{n^\alpha}(|f'(0)|-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha-(k-1)^\alpha}{\alpha}<\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|<\frac{1}{n^\alpha}(|f'(0)|+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^\alpha-k^\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{n^\alpha-0}{n^\alpha}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha}<\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|<\frac{(n+1)^\alpha-1}{n^\alpha}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha}\tag{3.3}$$

将 (3.3) 两侧同时取 $n\to\infty$, 并有 $\varepsilon\to0$

$$\frac{f'(0)}{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha}<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|<\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-1}{n^\alpha}\frac{|f'(0)|-\varepsilon}{\alpha}=\frac{f'(0)}{\alpha}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k^{\alpha-1}}{n^\alpha}\right)\right|=\frac{f'(0)}{\alpha},\ \forall\alpha>1$$

例3.6 证明: 若存在 $f''(0)$, 则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^4}=f''(0)$.

证明 [3]

$$\frac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^4}=K\big(=K(h)\big)$$

作 $F(x)=f(2x)-2f(0)+f(-2x)-4Kx^2$, 则 $F(0)=0=F(h)$, 由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,h)$(或 $(h,0)$), 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow2f'(2\xi)-2f'(-2\xi)-8\xi=0,$$

$$\frac{2f'(2\xi)-2f'(-2\xi)}{8\xi}=\frac{[f'(2\xi)-f'(0)]-[f'(-2\xi)-f'(0)]}{\xi}=A$$

由此令 $h\to0$, 即得 $A(h)\to f''(0)$

例3.7 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}$ 存在. 问 $f(x)$ 在 0 点是否可导

解 (by ytdwdw) 可导. 不妨设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}=0$ 以及 $f(0)=0$. 我们有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

因此, 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得当 $0<|x|<\eta$ 时,

$$\frac{\sin(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}<0$$

特别, 当 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\eta$ 时, 成立

$$\sin\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}}. \tag{3.4}$$

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, 由假设, 存在 $\varepsilon\in(0,\frac{\eta}{2})$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(\sin x)|\leqslant\varepsilon|x^3|$$

记 $a_0(x)=x, a_{n+1}(x)=\sin(a_n(x))$ 并取整数 k 满足 $\dfrac{1}{x^2}+1\leqslant k\leqslant\dfrac{4}{x^2}$. 则利用 (3.4) 归纳可证

$$|a_n(x)|=a_n(|x|)\leqslant\frac{2}{\sqrt{k+n}},\quad \forall n\geqslant 0.$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f(a_n(x))-f(a_{n+1}(x))|\leqslant\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x)|^3\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(k+n)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\varepsilon\int_{k-1}^{+\infty}\frac{8}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t=\frac{16\varepsilon}{\sqrt{k-1}}\leqslant 16\varepsilon|x|,\quad\forall\,0<|x|<\delta\end{aligned}$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant 16\varepsilon,\quad\forall\,0<|x|<\delta$$

从而得到 $f'(0)=0$.

定理 3.1. 有限增量公式

设 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$ ♡

例3.8 设函数 y 在任意点 x 处的增量满足

$$\Delta y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta y+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\Delta x\cdot\Delta y$$

且 $y(0)=0$. 计算极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\arctan x}y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

解 显然

$$\Delta x\cdot\Delta y=o(\Delta x)=o(\Delta y)\quad(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

故有

$$\Delta y\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

由定义可得 $f(x)$ 可微且

$$y'=\frac{x}{1+x^2}\Longrightarrow y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

又 $y(0)=0$, 故可得 $y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$$\int_0^{\arctan x}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\arctan x}\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(\arctan x)^3\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x^2(x+\sqrt{1+x^2}-1)=x^3\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\sim x^3$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\arctan x}y(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$$

例3.9 (1999.II) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 _____

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}.$$

点 $(0,1)$ 对应参数 $t = 0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{2}$, 于是所求法线方程为

$$y - 1 = -2x \Longleftrightarrow 2x + y - 1 = 0.$$

例3.10 求与抛物线族 $x = ay^2$ 正交的曲线族

解 由题 $x = ay^2 \Longrightarrow a = \dfrac{x}{y^2}$, 等式 $x = ay^2$ 对 x 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2ay} = \frac{y}{2x}$$

由已知所求与 $x = ay^2$ 正交 (垂直), 故

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2ay} = \frac{y}{2x}$$

解此微分方程得

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C$$

推论 3.1. $|x - x_0|g(x)$ **可导条件**

如果 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x) = |x - x_0|g(x)$ 在 x_0 处可导当且仅当 $g(x_0) = 0$ ♡

证明 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 于是 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, 由导数定义我们有

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{|x - x_0|g(x) - 0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = g(x_0)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{|x - x_0|g(x) - 0}{x - x_0} = -\lim_{x\to x_0^-} g(x) = -g(x_0)$$

1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Longrightarrow g(x_0) = -g(x_0) \Longrightarrow g(x_0) = 0$$

2) 若 $g(x_0) = 0$, 显然有 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处可导

定理 3.2. 奇 (偶) 函数的导数

在 $(-a, a)$ 内可导的奇函数的导数是偶函数;
在 $(-a, a)$ 内可导的偶函数的导数是奇函数。 ♡

定理 3.3. 周期函数的导数

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数, 则 $f'(x)$ 仍是以 T 为周期的函数 ♡

证明 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 由导数定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + T + \Delta x) - f(x_0 + T)}{\Delta x} = f'(x_0 + T) \end{aligned}$$

例3.11 证明: $f(x)=\sin^2 x+\sin x^2$ 不是周期函数.

解 [4] 易得 $f(x)$ 是连续可微函数. 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数. 于是结合连续性可得 $f'(x)$ 有界, 然而很明显

$$f'(x)=2\sin x\cos x+2x\cos x^2$$

是无界函数 (可考虑 $f'(\sqrt{2n\pi})$), 所以 $f(x)$ 不是周期函数.

定理 3.4. 反函数的求导法则

如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x|x=f(y), y\in I_y\}$ 内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}. \tag{2-6}$$

♡

证明 由于 $x=f(y)$ 在 I_y 内单调、可导 (从而连续), 由定理 1.1.1 知, $x=f(y)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在, 且 $f^{-1}(x)$ 在 I_x 内也单调、连续.

任取 $x\in I_x$, 给 x 以改变量 Δx ($\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x$), 由 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0,$$

故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

又由于 $y=f^{-1}(x)$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

例3.12 若 $y=f(x)$ 存在单值反函数 $x=\varphi(y)$, 且 $y'\neq 0, y''\neq 0$, 试求 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2y}, \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}$

解 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1/y'$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\right]\cdot\frac{1}{y'}\\&=-\frac{1}{y'}\cdot\frac{1}{(y')^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=-\frac{y''}{(y')^3}.\\\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3y}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{y''}{(y')^3}\right]\cdot\frac{1}{y'}\\&=-\frac{y'''(y')^3-3(y')^2y''\cdot y''}{(y')^6}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.\end{aligned}$$

例3.13 设 $y=y(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的二阶可导函数, 且满足方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a^2y=0,$$

作变量代换 $x=\sin t$ 后, 证明: 函数 y 满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0$

证明 注意到 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t=\sqrt{1-x^2}$, 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}\\ &= (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

再代入到方程即可得证

定理 3.5. 行列式函数的求导法则

设函数 $f_{ij}(x),\ (i,j=1,2,\ ,n)$ 在区间 I 内可导，则行列式函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

也在 I 内可导，且

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

♡

定理 3.6. 常用导数公式

$(C)'=0$

$(x^\mu)'=\mu\,x^{\mu-1}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(a^x)=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)'=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$(\cosh x)'=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$(\tanh x)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$(\coth x)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$(\operatorname{arsinh} x)'=\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{arcosh} x)'=\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

♡

定理 3.7. Darboux 中值定理, 导数的介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则对于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的一切值 λ，

必 $\exists\xi\in[a,b]$, s.t. $f'(\xi)=\lambda$

♡

证明 令 $F(x) \triangleq f(x) - \lambda x,\ x \in [a,b]$. 则

$$F'(a) = f'(a) - \lambda < 0,\ F'(b) = f'(b) - \lambda > 0.$$

由于

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) < 0,$$

由保号性知存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时, $F(x) - F(a) < 0$, 从而 a 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. 同理可证 b 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点.

另外, 由于 $F(x)$ 连续, 它在 $[a,b]$ 上有最小值, 设 $\xi \in [a,b]$ 是一个最小值点, 则 $\xi \in (a,b)$ 从而它是极小值点. 于是 $F'(\xi) = 0$. 也即 $f'(\xi) = \lambda$.

例3.14 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f(\frac{\pi}{4}) = 1$. 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ 使得 $f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi)$.

证明 [4] 记 $F(x) = f'(x) - f^2(x)$. 则 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上可导. 要证明的就是存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 由 Darboux 定理, 若结论不真, 则

$$F'(x) = f''(\xi) - 2f(x)f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.5}$$

或

$$F'(x) = f''(\xi) - 2f(x)f'(x) < 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \tag{3.6}$$

若 (3.5) 式成立, 则

$$f'(x) - f^2(x) = F(x) > F(0) = 1,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right],$$

即

$$\left(\arctan f(x)\right)' > 1,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right].$$

于是又有

$$\arctan f(x) - x > \arctan f(0) - 0 = 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right],$$

特别地, $f(\frac{\pi}{4}) > \tan \frac{\pi}{4} = 1$. 与假设矛盾. 因此 (3.5) 式不成立. 类似可证 (3.6) 式也不成立.
因此, 必存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ 使得 $f''(\xi) = 2f(\xi)f'(\xi)$.

3.1 高阶导数

定理 3.8. 常用高阶导数公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \qquad \left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x \pm a)^{n+1}}$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \qquad (x^n)^{(n)} = n!$$

♡

练习 3.1 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $y^{(n)}$

解

$$\begin{aligned} y &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \end{aligned}$$

练习 3.2 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$

解

$$\begin{aligned} y' &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x \\ &= 6\sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) \\ &= 6\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -3\sin 2x\cos 2x = -\frac{3}{2}\sin 4x \end{aligned}$$

✍ **练习 3.3** 求 $y = x^2e^{3x}$ 的 n 阶导数

解 设 $u = e^{3x}$, $v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x}\ (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v^{(k)} = 0\ (k = 3, 4, \cdots, 20)$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (x^2e^{3x})^{(n)} \\ &= (e^{3x})^{(n)}x^2 + n(e^{3x})^{(n-1)}(x^2)' + \frac{n(n-1)}{2}(e^{3x})^{(n-2)}(x^2)'' \\ &= 3^{n-2}e^{3x}\left[9x^2 + 6nx + n(n-1)\right] \end{aligned}$$

莱布尼茨公式

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

例3.15 $y = (x^2+1)\sin x$, 求 $y^{(60)}$.

证明 首先

$$(x^2+1)' = 2x,\quad (x^2+1)'' = 2,\quad (x^2+1)''' = 0.$$

设 $u = \sin x$, $v = x^2 + 1$, 而

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

故由莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned} y^{(60)} &= u^{(60)}v + C_{60}^1 u^{(59)}v' + C_{60}^2 u^{(58)}v'' \\ &= \sin\left(x + 60\cdot\frac{\pi}{2}\right)(x^2+1) + 60\sin\left(x + 59\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x + \frac{60\cdot 59}{2!}\sin\left(x + 58\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 \\ &= (x^2+1)\sin x + 120x(-\cos x) + 3540(-\sin x) \\ &= (x^2 - 3539)\sin x - 120x\cos x. \end{aligned}$$

✍ **练习 3.4** 设 $f_n(x) = x^n\ln x, n\in\mathbb{N}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$

解 先求 $f_n(x)$ 的一阶导数, 有

$$f'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = nf_{n-1}(x) + x^{n-1}$$

两边同求 $(n-1)$ 阶导数得

$$f_n^{(n)}(x) = nf_{n-1}^{(n-1)}(x) + (n-1)!$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n},\quad n = 1, 2, \cdots$$

将前 n 个排列起来相加, 即有

$$f_1'(x)=(x\ln x)'=1+\ln x$$

$$\frac{f_2''(x)}{2!}=\frac{f_1'(x)}{1!}+\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}=\frac{f_{n-2}^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}+\frac{1}{n-1}$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}$$

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\ln x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$, 就是 $\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\ln\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$$

其中 γ 为 Euler 常数

例3.16 设 $y(x)=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(x)$

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y'=1$. 利用 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+n\cdot 2xy^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$ 得

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)\,,n=1,2,3,\cdots$$

由 $y(0)=0$, $y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0}=0$, 得

$$y''(0)=0\,,\ y''''(0)=0\,,\cdots,\ y^{2n}=0$$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0)=\cdots=(-1)^m(2m)!y'(0)\,,\quad m\in\mathbb{N}$$

故而 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!y'(0)$, $y'(0)$, 综上

$$y^{(n)}=\begin{cases}0\,, & n\text{ 为偶数}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例3.17 设 $y(x)=\arcsin x$, 求 $y^{(n)}(x)$

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $\sqrt{1-x^2}y'=1$. 再次求导, 得到

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Longrightarrow(1-x^2)''-xy'=0$$

利用 Leibniz 公式得

$$y^{(n+2)}(1-x^2)+ny^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2)-\left(xy^{(n+1)}+ny^{(n)}\right)=0$$

整理后得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

现在用 $x=0$ 代入, 就得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0\Longrightarrow y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

由 $y(0)=0$, 得

$$y''(0)=0\,,\ y''''(0)=0\,,\cdots,\ y^{2n}=0$$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y'''(0)=1\,,\ y^{(5)}=3^2\,,\ y^{(7)}=5^2\cdot 3^2,\cdots,$$

即可总结为

$$y^{(2m+1)}(0)=[(2m-1)!!]^2\,,\quad m\in\mathbb{N}_+$$

综上

$$y^{(n)}=\begin{cases}0\,, & n=2m\\ [(2m-1)!!]^2\,, & n=2m+1\end{cases}$$

例3.18 求 $y=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ 的 n 阶导数

证明 利用复数分解公式 $\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{2ai}\left(\dfrac{1}{x-ai}-\dfrac{1}{x+ai}\right)$, 可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{1}{2ai}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+ai)^{n+1}}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]\end{aligned}$$

现在令 $x=a\cot\theta, 0<\theta<\pi, \theta=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, 则

$$x\pm ai=a(\cot\theta\pm i)=\frac{a(\cos\theta\pm i\sin\theta)}{\sin\theta}$$

由此可知

$$\frac{1}{(x\pm ai)^{n+1}}=\frac{\sin^{n+1}\theta}{a^{n+1}}\left[\cos(n+1)\theta\mp i\sin(n+1)\theta\right]$$

代入前式并注意 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}&=\frac{(-1)^n n!\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{a^{n+2}}\\&=(-1)^n n!\frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arccot}(x/a)\right]}{a(x^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}\end{aligned}$$

例3.19 (北京市 1992 年竞赛题) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛, 并求其和

证明 令 $F(x)=(1-x-x^2)f(x)$, 则 $F(x)=1$.
根据莱布尼茨公式, 对上式两边求 $(n+2)$ 阶导数, 有

$$\begin{aligned}F^{(n+2)}(x)&=f^{(n+2)}(x)(1-x-x^2)+C_{n+2}^1f^{(n+1)}(x)(-1-2x)+C_{n+2}^2f^{(n)}(x)(-2)\\&=0\end{aligned}$$

令 $x=0$ 得

$$(n+2)!a_{n+2}+C_{n+2}^1a_{n+1}(n+1)!(-1)+C_{n+2}^2a_nn!(-2)=0$$

$$(n+2)!a_{n+2}-(n+2)!a_{n+1}-(n+2)!a_n=0$$

于是 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 且

$$a_0=\frac{1}{0!}f^{(}(0)(0)=1\,,\ a_1=\frac{1}{1!}f'(0)=\left.\frac{-(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}\right|_{x=0}=1$$

由数学归纳法可得 $n\to\infty$ 时有 $a_n\to\infty$. 原级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_ka_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\to 2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

于是级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛, 且和为 2

练习 3.5 设 $f(x)=e^x\sin 2x$ 求 $f^{(4)}(0)$

解 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

则

$$f(x)=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right)$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项为

$$\frac{2}{3!}x^4-\frac{1}{3!}(2x)^3\cdot x=-x^4$$

即有 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=-x^4$, 故 $f^{(4)}(0)=-24$.

例3.20 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\displaystyle\int_0^x(t-x)^2f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

解

$$f(x)=3x+\int_0^x t^2f(t)\,\mathrm{d}t-2x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=3-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad f'(0)=3$$

$$f''(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=2f(x)\,,\quad f'''(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=2f'(x)\,,\quad f^{(4)}(0)=2\times 3=6$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & n\neq 3k+1\\ 2^k\cdot 3 & n=3k+1\end{cases}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

由于 $2017=3\times 673+1$ 因此

$$f^{(2017)}(0)=3\cdot 2^{673}$$

例3.21 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2+x^4}$ 求 $f^{(100)}(0)$

解 因为

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2+x^4}=\frac{1+x^2}{1+x^6}$$

由带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 有

$$f(x)=(1+x^2)(1-x^6+\cdots+x^{96}-x^{102}+o(x^{102}))$$

所以 $f(x)$ 展开式的 100 次项为 0. 即 $\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}=0$, 故 $f^{(100)}(0)=0$

推论 3.2. 奇 (偶) 函数在 $x=0$ 处高阶导数

- 奇函数的偶数阶导数为奇函数, 奇函数的奇数阶导数为偶函数.
- 偶函数的偶数阶导数为偶函数, 偶函数的奇数阶导数为奇函数. ♡

例3.22 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{x^4}{\sqrt[3]{1+x^2+\arctan^2 x}}$ 求 $f^{(5)}(0)$

解 由 $f(x)$ 为偶函数, 可知 $f^{(5)}(x)$ 为奇函数。又因为奇函数在 $x=0$ 处有定义时, 其值为 0. 故 $f^{(5)}(0)=0$.

3.2 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

例3.23 求 $y=x^{x^x}$ 的导数

解 等式两边取对数得 $\ln y=x^x\ln x$, 注意到

$$(x^x)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=x^x(1+\ln x)$$

$\ln y=x^x\ln x$ 两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y}=x^x(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}x^x$$

整理可得

$$y'=x^{x^x}\left[x^{x-1}+x^x(1+\ln x)\ln x\right]$$

例3.24 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f\neq 0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=$ _____

解 方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 的两边同时对 x 求导, 得

$$e^{f(y)}+xy'f'(y)e^{f(y)}=y'e^y\ln 29$$

又因为 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$, 故 $\dfrac{1}{x}+y'f'(y)=y'$, 即 $y'=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=y''&=-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}+\frac{y'f''(y)}{x[1-f'(y)]^2}\\&=\frac{f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}\end{aligned}$$

3.3 函数的微分

定义 3.1

设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应与自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

注意 通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$

定理 3.9. 函数可微的充要条件

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

证明 (1) **必要性** 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，依定义有

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \Longleftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x \to 0$，由于 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小，所以

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，故 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$.

(2) **充分性** 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0$$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ 是 $\Delta x\to 0$ 的无穷小，记作 α. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Longleftrightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

因为当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，所以 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$，且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx，
故由定义知函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微.

第 4 章 微分中值定理与导数的应用

例4.1 已知 $|f(x)+f'(x)|\leq 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，证明：$|f(x)|\leqslant 1$.

证明 根据条件，可得

$$[e^x(1\pm f(x))]'\geqslant 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

故

$$e^x(1\pm f(x))\geqslant \lim_{x\to-\infty} e^x(1\pm f(x))=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

因此

$$1\pm f(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

即

$$|f(x)|\leqslant 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

例4.2 设 $f:R\to R$ 的二次可导函数, 且满足

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x),\quad x\in R$$

其中 $g(x)\geqslant 0,\forall x\in R$, 求证: f 是有界的

证明 (by 西西) 首先令 $f(-x)$ 换 $f(x)$, 即

$$f(-x)+f''(-x)=-xg(-x)f'(-x)$$

即 $f(-x)$ 也满足. 故只要证明 $x\geqslant 0$ 满足即可.
注意到: 当 $x\geqslant 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((f(x))^2+(f'(x))^2\right)=2f'(x)\big(f(x)+f''(x)\big)=-2xg(x)\big[f'(x)\big]^2\leqslant 0$$

则 $(f(x))^2+(f'(x))^2$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, 故

$$(f(x))^2+(f'(x))^2\leqslant f^2(0)+\big(f'(0)\big)^2$$

即

$$f^2(x)\leqslant f^2(0)+\big(f'(0)\big)^2$$

故 f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

4.1 微分中值定理

4.1.1 费马定理

定理 4.1. 费马 (Fermat) 定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x_0 处可导, 如果对任意的 $x\in U(x_0)$, 有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (\text{或}f(x)\geqslant f(x_0))$$

那么 $f'(x_0)=0$ ♡

证明 [10] 不妨设 $x\in U(x_0)$ 时, $f(x)\leqslant f(x_0)$ (如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 可以类似地证明).

于是, 对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$, 有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

从而, 当 $\Delta x>0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性, 便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

所以, $f'(x_0)=0$. 证毕

例4.3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$，求证：存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

解 由题给不等式，令 $x\to 0$ 得 $f(0)=0$，且由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ 得

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

令

$$F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$$

(1) 若对一切 $x\geqslant 0$ 有 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，所以对任何正数 ξ 有

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

(2) 若存在 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)\neq\dfrac{x_0}{1+x_0^2}$，则 $F(x_0)<0$，由于

$$F(0)=f(0)-0=0,\quad F(+\infty)=f(+\infty)=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内取得最小值，设最小值为 $F(\xi)$，由费马定理得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

4.1.2 罗尔定理

定理 4.2. 罗尔 (Rolle) 定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，即 $f'(\xi)=0$ ♡

证明 由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理, 在 $[a,b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 于是

(1) 若 $M=m$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于常数 M. 因此, 对任意 $x\in(a,b)$, 有 $f'(x)=0$. 所以, 任取 $\xi\in(a,b)$, 有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M > m$, 因为 $f(a) = f(b)$, 所以 M 与 N 中至少有一个不等于 $f(a)$ 与 $f(b)$, 不妨设 $M \neq f(a)$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi) = M$, 即

$$f(x) \leqslant f(\xi) = M\,, \quad \forall x \in [a,b].$$

因为 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处可导, 下面证明 $f'(\xi) = 0$. 利用导数的定义 (2-5), 有

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

注意到当 $x > \xi$ 时,

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0;$$

当 $x < \xi$ 时,

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0;$$

再结合函数在一点可导的条件及极限的保号性, 得到

$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leqslant 0,$$

$$f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0,$$

所以, $f'(\xi) = 0$. 证毕.

罗尔定理构造函数思路

- 微分方程
- 常数 K 值法
- 行列式: 例4.18
- 待定多项式函数: 例4.19, 例4.88

例4.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明

(1) 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (a,b)$, $\eta \neq \xi$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$

解 由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 知存在 $f(\lambda) = 0\,(0 < \lambda < b)$, 令 $g(x) = f(x)e^{-x}$, $g(\lambda) = g(a) = 0$, 显然 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内二阶可导, 由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi_1 \in (a,\lambda)$, 使得

$$g'(\xi_1) = 0\,, (a < \xi_1 < \lambda)$$

同理, 至少存在一点 $\xi_2 \in (\lambda,b)$, 使得

$$g'(\xi_2) = 0\,(\lambda < \xi_2 < b)$$

令 $h(x) = f^2(x) - [f'(x)]^2$, 易知 $h(\xi_1) = h(\xi_2)$. $h(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上满足罗尔定理的条件, 因此至少存在一点 $\eta \in (\eta_1,\eta_2)$, $\eta \neq \xi$, 使得 $h'(\eta) = 0$, 即 $f''(\eta) = f(\eta)$

例4.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明: $f'(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少存在两个不相等的实根

证明 由题意 $f'(a)f'(b) > 0$, 故不妨设 $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$, 由导数定义可得:

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{x - a} > 0\,, \quad f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{x - b} > 0$$

由极限的保号性可知 $\exists x_1 \in (a, a+\delta_1)$ 和 $x_2 \in (b-\delta_2, b)$ 使得

$$f(x_1) > 0,\ f(x_2) < 0$$

其中 δ_1，δ_2 为充分小的正数，显然 $x_1 < x_2$。在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用介值定理得：$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$. 再由 $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$ 及罗尔定理可知：存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$ 使得

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$$

例4.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0,\ f'(1) = 1$
求证：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f''(\xi) = 2$

解 令 $F(x) = f(x) - x^2$, 则 $F(0) = 0, F(1) = -1$, 显然 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 故 $\exists C \in (0,1)$, 使

$$F'(C) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = -1$$

又 $F'(x) = f'(x) - 2x$, $F'(1) = -1$, 且 $F(x)$ 在 $[C, 1]$ 满足罗尔定理的条件. 故 $\exists \xi \in (C, 1) \subset (0, 1)$, 使 $F''(\xi) = f''(\xi) - 2 = 0$.

例4.7 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, 试证: 至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = 0$.

解 令 $x = \tan t$,

$$F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ A, & t = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

则由 $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^+} F(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} F(t) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, 得 $F(t)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 连续, 又 $F(t)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导, 且 $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, 根据罗尔定理, 存在 $\eta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $F'(\eta) = 0$. 即

$$f'(\tan\eta)\sec^2\eta = 0$$

由于 $\sec^2\eta \neq 0$, 故 $f'(\tan\eta) = 0$, 令 $\xi = \tan\eta$, 则 $f'(\xi) = 0$.

例4.8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

试证:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使 $f''(\eta) = f(\eta)$

解 (1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$. 因此,

$$f'(0) = f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 > 0, \quad f'(1) = f'_+(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2 > 0$$

由极限的保号性可知 $\exists x_1 \in (0, \delta_1)$ 和 $\exists x_2 \in (1-\delta_2, 1)$ 使得

$$f(x_1) > 0\ ,\ \ f(x_2) < 0$$

其中: δ_1，δ_2 为充分小的正数，显然 $x_1 < x_2$。在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用介值定理得：$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

(2) 令 $g(x) = f(x)e^{-x}$, 则 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)$, 且 $g(\xi) = g(0) = 0$, 显然 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连

续, $(0,1)$ 内二阶可导, 由罗尔定理知, 至少存在一点 $\eta_1 \in (0,\xi)$, 使得

$$g'(\eta_1) = 0\,(0 < \eta_1 < \xi)$$

同理, 至少存在一点 $\eta_2 \in (\xi,1)$, 使得

$$g'(\eta_2) = 0\,(\xi < \eta_2 < 1)$$

令 $h(x) = f^2(x) - [f'(x)]^2$, 易知 $h(\eta_1) = h(\eta_2)$
$h(x)$ 在 (η_1,η_2) 上满足罗尔定理的条件, 因此至少存在一点 $\eta \in (\eta_1,\eta_2)$, $\eta \neq \xi$, 使得 $h'(\eta) = 0$, 即 $f''(\eta) = f(\eta)$

练习 4.1 函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a) = f'(b)$. 证明：$\exists \xi \in (a,b)$,s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

证明 法 1. 不妨设 $f'(a) = f'(b) = 0$，否则用 $f(x) - xf'(a)$ 即可．令

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \in (a,b], \\ f'(a) = 0, & x = a, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 内可导．若 $F(b) = 0$，
由 Rolle 定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，即

$$\frac{f'(\xi)}{\xi - a} - \frac{f(\xi) - f(a)}{(\xi - a)^2} = 0,$$

从而

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

若 $F(b) > 0$，由于 $F'(b) = -\dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} < 0$，所以存在 $x_1 \in (a,b)$ 使得 $F(x_1) > F(b)$.
因为

$$0 = F(a) < F(b) < F(x_1),$$

故由介值定理可知，存在 $x_2 \in (a,x_1)$ 使得 $F(x_2) = F(b)$，于是由 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (x_2,b) \subset (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，从而结论成立．对 $F(b) < 0$ 类似可证.
法 2. 令

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & a < x \leqslant b, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$$

则 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 上可导. 分三种情况考虑.
1) $g(a) = f'(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(b)$, 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$. 这等价于

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

2) $g(a) = f'(a) > \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(b)$. 此时有

$$g'(b) = \frac{f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}{b - a} = \frac{g(a) - g(b)}{b - a} > 0.$$

从而只要 $x \in (a,b)$ 且充分接近 b, 就有 $g(x) < g(b)$, 故 $g(a), g(b)$ 都不是 g 的最小值, 因此 g 的最小值必在某点 $\xi \in (a,b)$ 处达到. 从而 $g'(\xi) = 0$.

3) $g(a)=f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(b)$. 此时有

$$g'(b)=\frac{f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-a}=\frac{g(a)-g(b)}{b-a}<0.$$

从而只要 $x\in(a,b)$ 且充分接近 b, 就有 $g(x)>g(b)$, 故 $g(a),g(b)$ 都不是 g 的最大值, 因此 g 的最大值必在某点 $\xi\in(a,b)$ 处达到. 从而 $g'(\xi)=0$.

例4.9 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 上可导, 且 $f(1)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\frac{2\xi^2}{\pi}-\xi\sin\xi}f(x)$$

解 (by 西西) 显然为

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\xi^2}}{\frac{2\xi^2}{\pi}-\xi\sin\xi}$$

即两边积分即可

$$\ln\big(f(\xi)\big)=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)}{\frac{2}{\pi}-\frac{\sin\xi}{\xi}}=-\ln\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sin\xi}{\xi}\right)$$

即有

$$F(x)=f(x)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

例4.10 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续，且在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)=0$, 求证: $\exists\xi\in(0,2)$,

$$f'(\xi)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

解 (by 西西) 构造

$$F(x)=\left(2-\pi\cdot\frac{\sin x}{x}\right)f(x)$$

$$F'(x)=\pi\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)f(x)+f'(x)\left(\frac{2x-\pi\sin x}{x}\right)$$

由于 $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=F(1)=0$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=0$

$$\pi\left(\frac{\sin\xi-\xi\cos\xi}{\xi^2}\right)f(\xi)+f'(\xi)\left(\frac{2\xi-\pi\sin\xi}{\xi}\right)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\pi(\xi-\tan\xi)}{2\xi^2\sec\xi-\pi\xi\tan\xi}f(\xi)$$

例4.11 (IMC2013) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f(0)=0$, 证明：存在 $\xi\in(-\pi/2,\pi/2)$, 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)[1+2\tan^2\xi]$$

证明 (by 西西) 设

$$g(x)=f(x)\cos x,\quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

由 Rolle 定理, 那么有

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0,\qquad \xi_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\xi_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

继续考虑

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2x}=\frac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x}{\cos^2x}$$

则显然有

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$$

根据 Rolle 定理, 则有

$$0=h'(\xi)=\frac{1}{\cos\xi}[f''(\xi)-f(\xi)(1+2\tan^2\xi)]$$

4.1.2.1 常数 K 值法

定理 4.3. K 值法 1

1. 对结论进行适当的变形, 把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体, 并令其为常数 K, 构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形, 并且使等式右端为零
3. 再将等式左端中出现区间 (a,b) 的端点 a (或 b) 全部换成 x 并令左端为 $F(x)$, 此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数 ♡

例4.12 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 证明: 在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得

$$bf(b)-af(a)=\big[f(\xi)+\xi f'(\xi)\big](b-a)$$

证明

$$bf(b)-af(a)=\big[f(\xi)+\xi f'(\xi)\big](b-a)\Longrightarrow\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

令 $K=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$, 令 $b=x$, 则

$$K=\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}\Longrightarrow xf(x)-af(a)-K(x-a)=0$$

故令 $F(x)=xf(x)-af(a)-K(x-a)$, 显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow f(\xi)+xf'(\xi)-K=0$$

即

$$bf(b)-af(a)=\big[f(\xi)+\xi f'(\xi)\big](b-a)$$

例4.13 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 开区间 (a,b) 内可导, 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 满足 $2\xi\big[f(b)-f(a)\big]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

证明

$$\xi\big[f(b)-f(a)\big]=(b^2-a^2)f'(\xi)\Longrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{\xi}$$

令 $K=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$, 再令 $b=x$.

$$K=\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}\Longrightarrow f(x)-f(a)-K(x^2-a^2)=0$$

故令 $F(x)=f(x)-f(a)-K(x^2-a^2)$, 显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0\Longleftrightarrow f'(\xi)-2\xi K=0$$

即

$$2\xi\big[f(b)-f(a)\big]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

注意 本题不能使用柯西中值定理, (a,b) 内可能包含 0

例4.14 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

证明

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{12}(b-a)^3} = f'''(\xi)$$

令 $K = \dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}{\frac{1}{12}(b-a)^3}$, 再令 $b = x$.

$$K = \frac{\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x - (x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2}}{\frac{1}{12}(x-a)^3}$$

故令 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x - (x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2} - \frac{1}{12}(x-a)^3 K$, 显然有 $F(a) = F(b) = 0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理, 则有 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi_1) = 0$, 又因为

$$F'(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(x)}{2} - \frac{1}{2}f'(x)(x-a) - \frac{1}{4}(x-a)^2 K$$

又因为 $F'(a) = 0$, 从而由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a,\xi_1) \subseteq (a,b)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

$$F'(\xi) = -\frac{1}{2}f''(\xi) - \frac{1}{2}K = 0 \Longrightarrow f''(\xi) = K$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

例4.15 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(a+b)^3 f''(\xi)$$

证明 令 $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a) f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{24}(x-a)^3 K$ 则 $g(a) = g(b) = 0$,
其中

$$K = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3}$$

所以由罗尔定理知存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g'(x_0) = 0$. 又

$$g'(x) = f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{2} f'\left(\frac{x-a}{2}\right) - \frac{1}{8}(x-a)^2 K$$

所以

$$f(x_0) = f\left(\frac{a+x_0}{2}\right) + \frac{x_0-a}{2} f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right) + \frac{1}{8}(x_0-a)^2 K \tag{4.1}$$

在 $x = \dfrac{a+x_0}{2}$ 处将 $f(x)$ 泰勒展开，并令 $x = x_0$ 得到

$$f(x_0) = f\left(\frac{a+x_0}{2}\right) + \frac{x_0-a}{2} f'\left(\frac{x_0-a}{2}\right) + \frac{1}{8}(x_0-a)^2 f''(\xi) \tag{4.2}$$

其中 $\xi \in \left(x_0, \dfrac{a+x_0}{2}\right) \subseteq (a,b)$ 比较 (4.1)(4.2)，得 $K = f''(\xi)$。所以存在 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(a+b)^3 f''(\xi)$$

✍ **练习 4.2** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 5 次可微, 则

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{6}(b-a)\left(f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{2880}(b-a)^5f^{(5)}(\xi),$$

其中 $a<\xi<b$.

证明 令 $a=c-h, b=c+h$, 即 $c=(a+b)/2, h=(b-a)/2$. 要证的等式可改写为

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}\big(f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)\big)-\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\xi).$$

若令

$$f(c+h)=f(c-h)+\frac{h}{3}\big(f'(c-h)+f'(c+h)+4f'(c)\big)-\frac{h^5}{90}K,$$

则只需要证明 $K=f^{(5)}(\xi)$. 为此定义函数

$$\varphi(x)=f(c+x)-f(c-x)-\frac{x}{3}\big(f'(c-x)+f'(c+x)+4f'(c)\big)+\frac{x^5}{90}K,$$

那么 $\varphi(x)$ 在 $[0,h]$ 上 4 次可微, 并且 $\varphi(0)=\varphi(h)=0$. 于是由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1\in(0,h)$ 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$. 又因为

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}\big(f'(c+x)+f'(c-x)-2f'(c)\big)-\frac{x}{3}\big(f''(c+x)+f''(c-x)\big)+\frac{x^4}{18}K,$$

所以 $\varphi'(0)=0$, 从而由 Rolle 定理, 存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi_2)=0$. 类似地, 由

$$\varphi''(x)=\frac{1}{3}\big(f''(c+x)+f''(c-x)\big)-\frac{x}{3}\big(f'''(c+x)+f'''(c-x)\big)+\frac{2}{9}x^3K,$$

可知 $\varphi''(0)=0$, 从而存在 $\xi_3\in(0,\xi_2)$ 使得 $\varphi'''(\xi_3)=0$. 最后注意

$$\begin{aligned}\varphi'''(x)&=-\frac{x}{3}\big(f^{(4)}(c+x)-f^{(4)}(c-x)\big)+\frac{2x^2}{3}K\\&=-\frac{x}{3}f^{(5)}\big((c+x)-(c-x)\big)+\frac{2x^2}{3}K=\frac{2}{3}x^2\big(K-f^{(5)}(\xi)\big),\end{aligned}$$

其中第二步应用了 Lagrange 中值定理, $\xi\in(c-x,c+x)\subseteq(c-h,c+h)$, 所以由 $\varphi'''(\xi_3)=0$ 得到

$$\frac{2}{3}\xi_3^2\big(K-f^{(5)}(\xi)\big)=0.$$

因为 $\xi_3\neq0$, 所以 $K=f^{(5)}(\xi)$.

✍ **练习 4.3** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,

证明：若 $f(x)$ 不是常数，那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明 记

$$c=\frac{a+b}{2},\ K=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

若对一切 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)\le K$, 利用 Lagrange 中值定理,

$$\left|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}\right|=|f''(\eta)|\le K$$

即 $|f'(x)|\le K(x-c)$, 于是

$$|f(c)-f(a)|\le\int_a^c|f'(x)|\mathrm{d}x\le K\int_a^c(c-x)\mathrm{d}x=\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

同理可以得到

$$\int_c^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

于是

$$|f(b)-f(a)| \leq |f(b)-f(c)|+|f(c)-f(a)| \leq |f(b)-f(a)|$$

利用 $f'(x)$ 的连续性，为使上式中的等号成立必须有 $|f'(x)|=K|x-c|$，再利用 $f'(c)=0$ 得 $f'(x)=K(x-c)$ 或者 $f'(x)=K(c-x)$，不论哪种情况都有 $f(b)=f(a)$，即 $K=0$，这和 $f(x)$ 不是常数相矛盾. 因此必定存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$|f''(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

定理 4.4. K 值法 2

1. 对结论进行适当的变形，把不含中值 ξ 的因子分离出来作为一个整体，并令其为常数 K，构造一个含 K 的等式
2. 对含常数 K 的等式进行适当变形，使等式左端为由 a 构成的代数式，右端为由 b 构成的代数式
3. 上述等式关于区间 (a,b) 端点 a 和 b 的表达式是对称的[a]，此时只要把等式左端中出现的 a 全部换成 x，并令左端为 $F(x)$，此 $F(x)$ 即为所构造的辅助函数

[a]对称式：将 b 换成 a，原式呈 $0=0$

♡

例4.16 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$ 证明：在 (a,b) 内至少存在一个 ξ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$$

证明

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi) \Longrightarrow K=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

分离 a,b. 则

$$\frac{f(b)+K}{b}=\frac{f(a)+K}{a} \Longrightarrow F(x)=\frac{f(x)+K}{x}$$

显然有 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理，则有 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0 \Longleftrightarrow \frac{xf'(\xi)-f(\xi)-K}{\xi^2}=0$$

即

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$$

例4.17 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

证明 对任何固定的 $x \in (a,b)$，令

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b), t \in [a,b],$$

则 $g(a)=g(x)=g(b)=0$，根据 Rolle 定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g''(\xi)=0$，即

$$f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\xi), x \in (a,b).$$

从而

$$|f(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|, \forall x \in [a,b].$$

4.1.2.2 利用行列式构造辅助函数

例4.18 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

解 利用行列式构造辅助函数, 令

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & f(x)\\ 1 & a & a^2 & a^3 & f(a)\\ 1 & b & b^2 & b^3 & f(b)\\ 1 & \dfrac{a+b}{2} & \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2 & \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^3 & f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)\\ 0 & 1 & a+b & \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2 & f'\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \end{vmatrix}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续导数, 且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=0,\ \varphi'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=0$$

反复应用 Rolle 定理, 得存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'''(\xi)=0$, 即

$$\varphi'''(\xi)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & f'''(\xi)\\ 1 & a & a^2 & a^3 & f(a)\\ 1 & b & b^2 & b^3 & f(b)\\ 1 & \dfrac{a+b}{2} & \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2 & \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^3 & f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)\\ 0 & 1 & a+b & \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2 & f'\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \end{vmatrix}=0$$

行列式按第一行展开, 即得最终需要验证的结论

例4.19 (2019, 数II) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

解 (by 向禹)

(1) 由积分中值定理知存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi_1)=1=f(1)$, 于是由罗尔定理知存在 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 待定一组系数 a,b,c 使得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件 $f(0)=0, f(1)=1$. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 故考虑函数 $F(x)=f(x)+3x^2-4x$, 首先有 $F(0)=F(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1[f(x)+3x^2-4x]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1(3x^2-4x)\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由积分中值定理可知存在 $\eta_1\in(0,1)$ 使得 $g(\eta_1)=0$. 因此由罗尔定理知存在 $\eta_2\in(0,\eta_1)$, $\eta_3\in(\eta_1,1)$ 使得 $F'(\eta_2)=F'(\eta_3)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta\in(\eta_2,\eta_3)\subset(0,1)$; 使得 $F''(\eta)=f''(\eta)+6=0$, 从而 $f''(\eta)=-6<-2$, 证毕.

例4.20 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'''(\xi)=3$

解 (by 向禹) 待定一个首项系数为 $\frac{1}{2}$[1] 的三次函数 $g(x)$ 使得它满足 $g(-1)=0, g(1)=1, g'(0)=0$

[1]首项系数为 $\frac{1}{2}$ 是为了保证 $g'''(x)=3$

这就要求

$$g(x)=\frac{1}{2}x^3+bx^2+\frac{1}{2}-b$$

还需满足 $g(0)=f(0)$, 那么 $b=\frac{1}{2}-f(0)$ 即可. 现在令

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2(x+1)+(1+x)(1-x)f(0)$$

$F(-1)=F(0)=F(1)=0$, $F'(0)=0$, 因此由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta_1\in(\xi_1,0),\eta_2\in(0,\xi_2)$, 使得 $F''(\eta_1)=F''(\eta_2)$, 进一步存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(-1,1)$ 使得 $F'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0$, 得证.

定理 4.5. 罗尔原话

若 $f^{(n-1)}(x)$ 最多只有一个实零根, 则 $f(x)$ 最多只有 n 个不同实零点. ♡

4.1.3 拉格朗日中值定理

定理 4.6. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\,(a<\xi<b)$, 使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立 ♡

证明 结论变形为

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即

$$\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}=0.$$

于是构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi\,(a<\xi<b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 于是有

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

例4.21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，试证

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$$

解 设 $f(x)$ 在 $x=c\in(0,1)$ 取得最大值，因 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，故 $f'(c)=0$ 对于函数 $y=f'(x)$，因 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，在区间 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理得：存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c\,,$$

$$f'(1)-f'(c)=f''(\xi_2)(1-c)\,,$$

即

$$f'(0)=-f''(\xi_1)c\ ,\quad f'(1)=f''(\xi_2)(1-c)$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f''(x_1)|c+|f''(x_2)|(1-c)\\&\leqslant Mc+M(1-c)=M\end{aligned}$$

例4.22 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $|f'(x)|<1$, $f(0)=f(1)$
证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$

证明 不妨设 $x_1<x_2$, 由题意对 $[0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,1]$ 分别使用拉格朗日中值定理得

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1\quad \xi_1\in(0,x_1)$$

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1-x_2)\quad \xi_2\in(x_1,x_2)$$

$$f(1)-f(x_2)=f'(\xi_3)(1-x_2)\quad \xi_3\in(x_2,1)$$

以上式子相加, 并注意到 $f(0)=f(1)$, 得

$$2\big(f(x_1)-f(x_2)\big)=f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)$$

因为 $|f'(x)|<1$, 于是

$$\begin{aligned}2\big|f(x_1)-f(x_2)\big|&=\big|f'(\xi_1)x_1+f'(\xi_2)(x_1-x_2)+f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<\big|f'(\xi_1)x_1\big|+\big|f'(\xi_2)(x_1-x_2)\big|+\big|f'(\xi_3)(1-x_2)\big|\\&<x_1+(x_2-x_1)+(1-x_2)=1\end{aligned}$$

例4.23 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 证明：对任何非零实数 x, 存在唯一的 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

证明 (1) 对任意非零实数 x, 由拉格朗日中值定理知 $\theta(x)$ $(0<\theta(x)<1)$ 存在, 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一, 则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ $\theta_1(x)<\theta_2(x)$, 使得 $f'(x\theta_1(x))=f'(x\theta_2(x))$, 由罗尔定理, 存在一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$. 这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾, 所以 $\theta(x)$ 是唯一的

(2) 因为 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

例4.24 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)$ 有界. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解 法 I[2]. 设 $|f''(x)| \leqslant M, \forall x \in [0,+\infty)$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \exists \Delta_1 > 0$, 当 $x > \Delta_1$ 时, 有

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

取 $\Delta_2 > \Delta_1 + \varepsilon$, 当 $x > \Delta_2$ 时, 再取 $x_0 = x - \varepsilon > \Delta_1$, 由中值定理, $\exists \xi \in (x_0, x)(\xi > \Delta_1)$, s.t.

$$\left|f'(\xi)\right| = \left|\frac{f(x) - f\ (x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant \frac{|f(x)| + |f(x_0)|}{\varepsilon} < \varepsilon$$

且 $x - \xi < x - x_0 = \varepsilon$. 故 $\exists \eta \in (\xi, x)$, s, t

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(\xi) + f''(\eta)(x - \xi)| \\ &\leqslant |f'(\xi)| + |f''(\eta)||x - \xi| \\ &< \varepsilon + M\varepsilon = (M + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

例4.25 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明: 对任意的正数 a 和 b, 总存在 $\xi, \eta \in (0,1)$ $(\xi \neq \eta)$, 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$$

证明 设 $0 < c < 1$, 对 $f(x)$ 在区间 $[0,c], [c,1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理可得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c},\ \xi_1 \in (0,c) \Longrightarrow \frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} = \frac{\frac{a}{a+b}c}{f(c)}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c},\ \xi_1 \in (c,1) \Longrightarrow \frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} = \frac{\frac{b}{a+b}(1 - c)}{1 - f(c)}$$

欲使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b \Longleftrightarrow \frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} + \frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} = 1$$

只需

$$f(c) = \frac{a}{a+b} \Longrightarrow 1 - f(c) = \frac{b}{a+b}$$

又 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由连续函数的介值定理知, 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $f(c) = \dfrac{a}{a+b}$

例4.26 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$
证明：存在两个不同的常数 $\eta, \xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$

解 构造函数令 $F(x) = f(x) + x - 1$
因为 $F(0)F(1) < 0$ 故由零点定理知存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $F(x_0) = f(x_0) + x_0 - 1 = 0$, 即 $f(x_0) = 1 - x_0$
在 $(0, x_0)$ 和 $(x_0, 1)$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理可得

$$f(x_0) - f(0) = f'(\xi)(x_0 - 0) \Leftrightarrow \frac{1 - x_0}{x_0} = f'(\xi), \xi \in (0, x_0)$$

$$f(1) - f(x_0) = f'(\eta)(1 - x_0) \Leftrightarrow \frac{x_0}{1 - x_0} = f'(\eta), \eta \in (x_0, 1)$$

于是有

$$f'(\xi)f'(\eta) = \frac{1 - x_0}{x_0} \times \frac{x_0}{1 - x_0} = 1$$

因此存在两个不同的常数 $\eta, \xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

例4.27 设 $f(x)$ 在 $[01]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, 证明：存在 $\xi, \eta \in (0,1)$,

[2]徐森林《数学分析精选习题全解》P169

$\xi \neq \eta$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

证明 令 $G(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ 则 $G(0)=G(1)=0$, 则由 Lagrange 中值定理可知

$$G'(\xi)=\frac{G(\frac{1}{2})-G(0)}{\frac{1}{2}-0}, \quad \xi\in(0,\frac{1}{2})$$

$$G'(\eta)=\frac{G(1)-G(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}, \quad \eta\in(\frac{1}{2},1)$$

故 $G'(\xi)+G'(\eta)=0$

例4.28 (2019 江苏) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, $f(0)=f(1)=0$, 若 $a\in[0,1]$, $f(a)>0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'(\xi)|>2f(a)$.

证明 (by 白朗) (i) 若 $a\neq\frac{1}{2}$, 不妨设 $0<a<\frac{1}{2}$, 由拉格朗日中值定理

$$0<f(a)=f(a)-f(0)=f'(\xi)a<\frac{f'(\xi)}{2}, \quad \xi\in(0,\tfrac{1}{2}).$$

(ii) 若 $a=\frac{1}{2}$, 反证法: 假设 $|f'(x)|\leqslant 2f(a)$, 则

$$\forall x\in(0,a],\ f'(x)\leqslant 2f(a) \tag{4.3}$$

$$\forall x\in[a,1),\ f'(x)\geqslant -2f(a) \tag{4.4}$$

若 (4.3) 中等号不恒成立, 则令 $g(x)=f(x)-2f(a)x, (0\leqslant x\leqslant a)$, 则 $g'(x)\leqslant 0$.

$$0=g(0)>g(a)=0$$

显然矛盾! 从而 (4.3) 中等号恒成立, 即

$$f(x)=2f(a)x,\ x\in[0,a]. \tag{4.5}$$

同理可得,

$$f(x)=2f(a)(1-x),\ x\in[a,1]. \tag{4.6}$$

由 (4.5)(4.6) 可知

$$f'(a)=2f(a)=-2f(a) \tag{4.7}$$

再由题意 $f(a)>0, a\in(0,1)$ 知 (4.7) 不存在！故结论成立.

综上所述, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $|f'(\xi)|>2f(a)$.

练习 4.4 函数 f 在 (-1,1) 上二阶可微，$f(0)=f'(0)=0$，且在该区间上成立不等式 $|f''(x)|\leq|f(x)|+|f'(x)|$，证明：$f(x)\equiv 0$.

解 设 x_0 是 $|f'(x_0)|$ 在 $[-1/2,1/2]$ 上取得最大值的点，由 Lagrange 中值定理有

$$f'(x_0)-f'(0)=x_0f''(\theta x_0), 0<\theta<1.$$

故结合已知，有

$$|f'(x_0)|=|x_0||f''(\theta x_0)|\leq|x_0|(|f'(\theta x_0)|+|f(\theta x_0)|)\leq|x_0|(|f'(x_0)+|f(\theta x_0)|).$$

因 $f(\theta x_0)=\int_0^{\theta x_0}f'(t)dt$，故 $|f(\theta x_0)|\leq\left|\int_0^{\theta x_0}|f'(t)|dt\right|\theta|x_0||f'(x_0)|$。因此

$$|f'(x_0)|\leq|x_0|(|f'(x_0)|+\theta|x_0||f'(x_0)|)=(|x_0|+\theta x_0^2)|f'(x_0)|.$$

因 $|x_0|+\theta x_0^2<1$, 故 $f'(x_0)=0$，这说明 $f'(x)=0$，$\forall x\in[-1/2,1/2]$。

又因 $f(0)=0$，故 $f(x)=0$，$\forall x\in[-1/2,1/2]$。

取 ε, $0<\varepsilon<1/2$，设 x_1 是 $|f'(x)|$ 在 $[1/2,1-\varepsilon]$ 上取得最大值的点。

由 Lagrange 中值定理，有

$$f'(x_1)-f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)f''\left(\frac{1}{2}+\theta_1\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\right),0<\theta_1<1.$$

故

$$\begin{aligned}|f'(x_1)|&=\left|x_1-\frac{1}{2}\right|\left|f''\left(\frac{1}{2}+\theta_1\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\right)\right|\\&\le\left(x_1-\frac{1}{2}\right)(|f'(\xi)|+|f(\xi)|)\le(|f'(x_1)|+|f(\xi)|)\end{aligned}$$

(记 $\xi=1/2+\theta_1(x_1-1/2)$)。而

$$|f(\xi)|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}f'(t)dt\right|\le\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}|f'(t)|dt\le\theta_1\left(x_1-\frac{1}{2}\right)|f'(x_1)|.$$

于是，$f(x)$ 在 $[1/2,1-\varepsilon]$ 上恒为 0，因 $\varepsilon>0$ 可任意小，故 $f(x)=0,\forall x\in[-1/2,1)$。同理可证，当 $x\in(-1,1/2]$ 时，$f(x)=0$。

例4.29 证明: $\ln 3<\sqrt{3}\ln 2$

证明

$$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{2\ln 2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\Longrightarrow x>e^2,f'(x)<0;0<x<e^2,f'(x)>0$

$$\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}-\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}=(4-3)f'(\xi)>0,\quad\xi\in(3,4)$$

例4.30 证明: $\ln\pi>\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$

证明

$$\ln\pi>\sqrt{\frac{\pi}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}>\sqrt{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}>\frac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}>\frac{\ln e}{\sqrt{e}}$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\Longrightarrow x>e^2,f'(x)<0;0<x<e^2,f'(x)>0$

$$\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}-\frac{\ln e}{\sqrt{e}}=(\pi-e)f'(\xi)>0,\quad\xi\in(e,\pi)$$

例4.31 证明: $2^{\sqrt{15}}<15$

证明

$$2^{\sqrt{15}}<15\Leftrightarrow\ln 2^{\sqrt{15}}<\ln 15\Leftrightarrow\ln 2<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{4\ln 2}{4}<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\frac{\ln 16}{\sqrt{16}}<\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\Longrightarrow x>e^2,f'(x)<0;0<x<e^2,f'(x)>0$

$$\frac{\ln 16}{\sqrt{16}}-\frac{\ln 15}{\sqrt{15}}=(16-15)f'(\xi)<0,\quad\xi\in(15,16)$$

例4.32 证明: $3e\ln 2<4\sqrt{2}$

证明

$$3e\ln 2<4\sqrt{2}\Leftrightarrow e\ln 8<4\sqrt{2}\Leftrightarrow\ln 8<\frac{4\sqrt{2}}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln 8}{2\sqrt{2}}<\frac{2}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln 8}{\sqrt{8}}<\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\Longrightarrow x>e^2,f'(x)<0;0<x<e^2,f'(x)>0$

$$\frac{\ln 8}{\sqrt{8}}-\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=(8-e^2)f'(\xi)<0,\quad\xi\in(e^2,8)$$

例4.33 设函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>1$. 证明：$\forall x>1$, 恒有 $1<f(x)<1+e^{\frac{1}{e}}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$

证明 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}},x>1$ 并注意到 $\dfrac{\ln x}{x}>0\ (x>1)$ 故 $f(x)>e^0=1$

由于 e^x 在 $\left[0,\dfrac{\ln x}{x}\right]$ 可导, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{\frac{\ln x}{x}}-e^0=\frac{\ln x}{x}e^{\xi}\quad \xi\in\left(0,\frac{\ln x}{x}\right)$$

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 故 $g(x)$ 在 $(1,e)\uparrow$ 在 $(e,+\infty)\downarrow$ 因此 $g_{max}(x)=\dfrac{1}{e}$ 故

$$f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}=1+e^{\xi}\frac{\ln x}{x}<1+\frac{\ln x}{x}e^{\frac{\ln x}{x}}<1+\frac{\ln x}{x}e^{\frac{1}{e}}$$

例4.34 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 (by 向禹) 利用切线与截距可以得到

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

易知 $x\to0$ 时 $u\to0$. 由拉格朗日中值定理可知存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+f'(x\theta_1(x))x=f'(x\theta_1(x))x.$$
$$f(u)=f(0)+f'(u\theta_2(u))u=f'(u\theta_2(u))u.$$

且由于 $f''(x)\neq0$, 故由导函数介值定理可知 $f''(x)$ 不变号, 即 $f'(x)$ 严格单调. 从而对于给定的 x 上述 $\theta_1(x),\theta_2(u)$ 是唯一的. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}&=\lim_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{u^3f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3f'(\theta_2(u)u)}{u^3f(\theta_1(x)x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\theta_2(u)u)}{\theta_2(u)u}\frac{\theta_1(x)x}{f'(\theta_1(x)x)}\frac{\theta_2(u)x^2}{\theta_1(x)u^2}=\lim_{x\to0}\frac{f''(0)}{f''(0)}\frac{x^2}{u^2}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x-f(x)/f'(x)}\right)^2=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{1-f(x)/(xf'(x))}\right)^2=4.\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{xf'(\theta_1(x)x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to0}\theta_1(x)\frac{f'(\theta_1(x)x)}{\theta_1(x)x}\frac{x}{f'(x)}=\theta_1(x)$$

由于 $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\theta_1(x)x)-f'(0)}{\theta_1(x)x}$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f'(\theta_1(x)x)-f'(0)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\theta_1(x)=\dfrac{1}{2}$

例4.35 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{\sin x}+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(e^{\tan x}+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$.

解 (by fin3574)

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\sin x}+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(e^{\tan x}+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{\sin x-\tan x}\cdot\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$
$$\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=\xi}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=0} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+x)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x}$$
$$= -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)-2}-1}{x} = -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)-2x}{x^2}$$
$$\overset{\text{洛必达}}{=\!=} -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}-2}{2x} = -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x-2x}{2x(e^x+x)}$$
$$= -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x-2x}{2x} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} -\frac{e^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-2}{2} = \frac{3}{4}e^2$$

练习 4.5 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}$

解 法 1. 根据 Lagrange 定理, 对任意 $n\geq 1$, 存在 $\xi_n,\eta_n\in(0,1)$, 使得

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \frac{(n+\xi_n)^{1/n-1}}{n} = n^{1/n-2}(1+\frac{\xi_n}{n})^{1/n-1},$$
$$\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n} = \ln n\cdot n^{\frac{1}{n+\eta_n}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

从而

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\sim\frac{1}{n^2},\ \sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}\sim\frac{\ln(n+1)}{n^2}(n\to\infty).$$

所以

$$\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)} = \frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})}{\ln(n+1)}+\frac{n^2(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}$$
$$\to 0+1=1(n\to\infty).$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}=1.$$

法 2. 注意到 ($\lambda_n\in(0,1)$)

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}-e^{\frac{\ln n}{n+1}}$$
$$= e^{\lambda_n\frac{\ln(n+1)}{n}+(1-\lambda_n)\frac{\ln n}{n+1}}\left(\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln n}{n+1}\right)$$
$$\sim \frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln n}{n+1} = \frac{\ln n}{n(n+1)}+\frac{\ln(1+1/n)}{n}$$
$$= \frac{\ln n}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\sim \frac{\ln n}{n(n+1)}\sim\frac{\ln(n+1)}{n^2}(n\to\infty),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{\ln(n+1)}=1.$$

例4.36 (07 年数学 I) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$. 令 $u_n=f(n)$ ($n=1,2,\cdots$), 则下列结论正确的是 (　　).

(A) 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

解

(A) 设 $f(x)=x^2$

(B) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(C) 设 $f(x)=-\ln x$

(D) 若 $u_1 < u_2$, 则存在 $k > 0$, 使得 $u_2 - u_1 > k > 0$. 在区间 $[1,2]$ 上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (1,2)$ 使得

$$\frac{u_2-u_1}{2-1} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\xi_1) > k > 0.$$

又因为在 $(0,+\infty)$ 上 $f''(x) > 0$, 因此 $f'(x)$ 在 $(\xi_1,+\infty)$ 上单调增加, 于是对任意 $x \in (\xi_1,+\infty)$ 有

$$f'(x) > f'(\xi_1) > k > 0.$$

在区间 $[\xi_1, x]$ 上应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_2 \in (\xi_1, x)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(\xi_1)}{x-\xi_1} = f'(\xi_2) > k > 0,$$

即 $f(x) = f(\xi_1) + f'(\xi_2)(x-\xi_1) \to +\infty\,(x \to +\infty)$.

推论 4.1

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数 ♡

证明 充分性显然, 下面证明必要性.

在区间 I 上任取两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上应用 (3-1) 有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2).$$

由条件知 $f'(\xi) = 0$, 从而 $f(x_1) - f(x_2) = 0$, 即

$$f(x_1) = f(x_2).$$

因为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是区间上的任意两点, 所以 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例4.37 证明：$t \in [0,1]$, 恒有 $2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2) = \dfrac{\pi}{2}$

证明 令 $f(t) = 2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2)$ 则

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-4t}{\sqrt{1-(1-2t^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-4t}{\sqrt{4t^2-4t^4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{-2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理知 $f(x) \equiv C$, 令 $x = 0$ 得 $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$

故 $\forall\, t \in [0,1]$, 恒有 $2\arcsin t + \arcsin(1-2t^2) = \dfrac{\pi}{2}$

例4.38 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 \left(\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$

解 利用恒等变形

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\frac{a-b}{1+ab},\ ab > -1$$

得

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x^4 \left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x^4 \arctan\frac{\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \frac{2x^2+7}{x^2+2}}{1 + \frac{(2x^2+5)(2x^2+7)}{(x^2+1)(x^2+2)}} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^4 \arctan\frac{3}{5x^4+27x^2+37} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

推论 4.2

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上 $f(x)=g(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f(x)=g(x)+C$♡

4.1.4 柯西中值定理

定理 4.7. 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立 ♡

证明 首先 $g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)$ $(a<\eta<b)$, 由条件 (3) 知 $g'(\eta)\neq 0$, 所以有 $g(b)-g(a)\neq 0$. 其次将结论变形为

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$, 则 $F(x)$ 满足

$$F(a)=\frac{g(b)f(a)-g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}=F(b),$$

且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 从而由罗尔定理得到在 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 于是有

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi),$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例4.39 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$.

解 (by 啦神) 由柯西中值定理知，$\forall\xi\in(0,\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\pi^2})\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\sin 2\xi-\sin(2\cdot 0)}=\frac{f''(\omega)}{2\cos(2\omega)},\quad \omega\in(0,\xi)\in(0,\tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{2}{\pi^2})$$

令 $\eta=\dfrac{1}{\pi\cdot\cos(2\omega)}\in(\frac{1}{\pi},\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$, 有

$$f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$$

例4.40 设 x 与 y 均大于 0, 且 $x\neq y$. 证明: $\dfrac{1}{x-y}\begin{vmatrix}x & y\\ e^x & e^y\end{vmatrix}<1$

证明 注意到

$$\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix}x & y\\ e^x & e^y\end{vmatrix}=\frac{xe^y-ye^x}{x-y}\xlongequal{\text{分子分母同除以}xy}\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}<1$$

令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$, 则 $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 连续, 又 $x\neq y$, 故 $f(x),g(x)$ 在 (x,y) 可导,

不妨设 $y>x$, $f(x),g(x)$ 在 $[x,y]$ 应用柯西中值定理,

$$\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{(y-x)\frac{e^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{(y-x)\frac{-1}{\xi^2}}=e^\xi(1-\xi),\quad \xi\in(0<x<\xi<y)$$

又令 $h(x)=e^x(1-x)$, 则 $h'(x)=-xe^x<0$, $x\in(0,+\infty)$, 故 $\max\limits_{x\in(0,+\infty)}h(x)=h(0)=1$

因此不等式成立

✍ **练习 4.6** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导 $(0<a<b)$, $f(a)\neq f(b)$,

证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$

解 考虑

$$\frac{f'(\xi)}{2\xi}\Longrightarrow g'(x)=x^2\Longrightarrow \text{构造 } g(x)=x^2$$

令 $g(x)=x^2$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}\Longrightarrow f(b)-f(a)=\frac{(b^2-a^2)f'(\xi)}{2\xi}$$

考虑

$$\eta f'(\eta)=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}\Longrightarrow g'(x)=\ln x\Longrightarrow \text{构造 } g(x)=\ln x$$

令 $g(x)=\ln x$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\eta\in[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\eta f'(\eta)\Longrightarrow f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\eta f'(\eta)$$

故 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\eta f'(\eta)$. 得证

注意 复杂程度相同, 柯西; 复杂程度不同, 复杂的用柯西, 简单的用拉格朗日

✍ **练习 4.7** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq0$,

试证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

解 考虑

$$\frac{e^\eta}{f'(\eta)}\Longrightarrow g'(x)=e^x\Longrightarrow \text{构造 } g(x)=e^x$$

令 $g(x)=e^x$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由柯西中值定理知 $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(\eta)}{f'(\eta)}=\frac{e^\eta}{f'(\eta)}\Longrightarrow f(b)-f(a)=\frac{(e^b-e^a)f'(\eta)}{e^\eta}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知 $\exists\,\eta\in[a,b]$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

故 $\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$. 得证

✍ **练习 4.8** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $(0,1)$ 内可导. 证明: $\forall\,\xi,\eta\in(0,1)$ 使

$$\frac{3}{7}f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{(1+\eta)^2}$$

证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理可得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad \xi\in(0,1)$$

令 $g(x)=\dfrac{(1+x)^3}{7}$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由柯西中值定理知

$$f(1)-f(0)=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\eta)}{\frac{3}{7}(1+\eta)^2}\quad \eta\in(0,1)$$

故 $\forall\,\xi,\eta\in(0,1)$ 使

$$\frac{3}{7}f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{(1+\eta)^2}$$

4.2 洛必达法则

定理 4.8. $\frac{0}{0}$ 不定型极限, L'Hospital 法则

设

(1) 当 $x\to a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于 0;

(2) 在点 a 的某去心领域内, $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♡

例4.41 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 内的具有二阶连续导数的函数, 且

$$\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\leqslant 1$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明 对分式表达式 $\dfrac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ 使用两次洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f'(x)+xf(x)\right]e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right]e^{\frac{x^2}{2}}}{(x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}}=0\end{aligned}$$

例4.42 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$.

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$

解 由题意

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-3x+3x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}\\&=-\frac{9}{2}+\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=0\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\frac{9}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to0}f(x)=-3$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导, 故

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=-3$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{9}{2}\Longrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)=0$$

由上式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{9}{2}\Longrightarrow f''(0)=\lim_{x\to 0}f''(x)=9$$

例4.43 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可微, 且 $f'(0)=0, f''(0)=A\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^4}&\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)+f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(\sin x)}{4x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)-\cos x f'(\sin x)}{4x^3}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{(x-\sin x)f''(\xi)}{x^3}}_{\xi\text{在}x\text{与}\sin x\text{之间}}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{x}\\&=\frac{A}{24}+\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}f''(\sin x)=\frac{A}{6}\end{aligned}$$

例4.44 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]\\&\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{u\to 0^+}\frac{\left(1-u+\frac{u^2}{2}e^u\right)-\sqrt{1+u^6}}{u^3}\\&=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{u^2e^u}{2}-\frac{3u^5}{\sqrt{1+u^6}}}{3u^2}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{e^u}{2}-\frac{3u^3}{\sqrt{1+u^6}}}{3}\overset{\text{代值}}{=\!=\!=}\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例4.45 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\tan(\frac{\pi}{4}+x)\right)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\tan(\frac{\pi}{4}+x)\right)^{\frac{1}{x}}-e^2}{x^2}&=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2}-1}{x^2}\\&\overset{e^x-1\sim x}{=\!=\!=}e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2x}{x^3}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}e^2\lim_{x\to 0}\frac{2\csc\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-2}{3x^2}\\&=\frac{2}{3}e^2\lim_{x\to 0}\frac{\sec(2x)-1}{x^2}=\frac{4}{3}e^2\end{aligned}$$

例4.46 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&\overset{\text{取对数}}{=\!=\!=}\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)\\&\overset{\text{等价}}{=\!=\!=}\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}-1\right)\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{整理}} \exp\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x}{x^3}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}} \exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{3x^2}=\exp\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2\sqrt{1+x^2}}$$
$$\xlongequal{\text{等价}} e^{-\frac{1}{6}}$$

例4.47 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}\xlongequal{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\arcsin t}{(\arcsin t)^3}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}{6t}=-\frac{1}{3}$$

例4.48 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{x=-t}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1-t}{-1-t}\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1-t}{1+t}\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\arctan t\right)\right)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\arctan\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{t}}=\exp\lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln\left(\arctan\frac{1}{t}\right)}{t}$$
$$\xlongequal{①}\exp\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=1$$

① $-\ln(\arctan\frac{1}{t})\sim\ln t$, 是由于

$$-\ln\left(\arctan\frac{1}{t}\right)=-\ln\left(\frac{1}{t}\times\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1/t}\right)=\ln t-\ln\left(\frac{\arctan\frac{1}{t}}{1/t}\right)\sim\ln t$$

例4.49 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t\,\mathrm{d}t-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{x}{1+x^2}}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x+\sin x-x}{4x^3(1+x^2)}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x+\sin x-x}{x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{x^3}+\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达}}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}=\frac{5}{24}$$

例4.50 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x}}{(x+\sin x)^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\ln(\cos x\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{\cos x}\cdots\sqrt[n]{\cos x})}}{(x+\sin x)^2}\\
=&-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+\ln(\sqrt[2]{\cos x})+\cdots+\ln(\sqrt[n]{\cos x})}{(x+\sin x)^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{2(x+\sin x)(1+\cos x)}\\
=&\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\tan 2x+\cdots+\tan nx}{x+\sin x}\\
=&\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+2\sec^2 2x+3\sec^2 3x+\cdots+n\sec^2 nx}{1+\cos x}\\
=&\frac{1}{8}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{16}
\end{aligned}$$

例4.51 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$ 傲娇小魔王

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{3^4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x^4}\\
&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\frac{1}{4\cdot 3^4}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^{\sin x}\cos x}{x^3}\\
&=\frac{1}{4\cdot 3^4}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(e^x-1)-e^x\cos x+e^x\cos x-e^{\sin x}\cos x}{x^3}\\
&=\frac{1}{4\cdot 3^4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\sin\frac{e^x-1+x}{2}\sin\frac{x-e^x+1}{2}}{x^3}+\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cos x\cdot\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}\right)\\
&=\frac{1}{4\cdot 3^4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{4\cdot 3^5}=-\frac{1}{972}
\end{aligned}$$

例4.52 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\{e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}=+\infty.$

解 令

$$F(t)=\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则

$$F(t)=2\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^x\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}y.$$

根据 L'Hopital 法则

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}e^{-t}F(t)&=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{e^t}=2\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{x-t}}{t-x}\,\mathrm{d}x\\
&=2\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=2\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=+\infty.
\end{aligned}$$

例4.53 设 $f_1(x)=x, f_2(x)=x^x, f_3(x)=x^{x^x}, \cdots, f_n(x)=\underbrace{x^{x^{\cdots^x}}}_{n个x}$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

解

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x)=\begin{cases}0, & n=2m-1(奇数)\\ 1, & n=2m(偶数)\end{cases} \quad m=1,2,\cdots.$$

用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时易证结论成立. 假定 $m=k$ 时结论成立, 即

$$\lim_{x\to 0^+} f_{2k-1}(x)=0\,, \quad \lim_{x\to 0^+} f_{2k}(x)=1$$

都成立. 当 $m=k+1$ 时, 由归纳假定可知

$$\lim_{x\to 0^+} f_{2k+1}(x)=\lim_{x\to 0^+} x^{f_{2k}(x)}=0$$

并且当 x 充分小 (不妨设 $0<x<\delta<1$) 有 $\dfrac{1}{2}<f_{2k}(x)<\dfrac{3}{2}$, 从而

$$x^{\frac{1}{2}}>x^{f_{2k}(x)}>x^{\frac{3}{2}},$$

进而

$$x^{x^{\frac{1}{2}}}>f_{2k+2}(x)>x^{x^{\frac{3}{2}}}<x^{x^{\frac{3}{2}}}.$$

又因 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^{\frac{3}{2}}}=1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{2k+2}(x)=1$.
由数学归纳法可知结论成立

例4.54 设 $f_1(x)=x, f_2(x)=x^x, \cdots, f_n(x)=x^{f_{n-1}(x)}$, 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{f_n(x)-f_{n-1}(x)}{(1-x)^n}$$

解 当 $n=2$ 时,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^{x-1}-1)}{(1-x)^2}=1$$

当 $n>2$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f_n(x)-f_{n-1}(x)}{(1-x)^n}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{f_{n-1}(x)}-x^{f_{n-2}(x)}}{(1-x)^n}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{x^{f_{n-2}(x)}(x^{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)}-1)}{(1-x)^n}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x))\ln x}{(1-x)^n}\\ &=-\lim_{x\to 1}\frac{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)}{(1-x)^{n-1}}\\ &=\cdots=\lim_{x\to 1}(-1)^{n-2}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{(1-x)^2}\\ &=(-1)^{n-2}=(-1)^n\end{aligned}$$

例4.55 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$

解 (by ytdwdw)

引理 4.1

若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, 且对 $0<|x|<\delta$ 成立 $f(x)\neq g(x)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan f(x)-\tan g(x)}{f(x)-g(x)}=1$$

♡

我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7} &\xlongequal{\text{用}x\text{代替}\tan x} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan\sin\arctan x}{x^7}\\
&\xlongequal{??} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\sin x-\sin\arctan x}{x^7}\\
&\xlongequal{\sin\arctan x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x^7}\\
&\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{7x^6}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}-\frac{1}{(1+x^2)^3}}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^4 x-\left(\frac{1+\sin^2 x}{1+x^2}\right)^3}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^4 x-\frac{3(x^2-\sin^2 x)}{1+x^2}}{14x^6}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}
\end{aligned}$$

接下来可以这样计算

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\frac{15-16\cos 2x+\cos 4x}{8}}{14x^6}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{24x^2-4(15-16\cos x+\cos 2x)}{7x^6}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{24x-2(16\sin x-2\sin 2x)}{21x^5}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{24-2(16\cos x-4\cos 2x)}{105x^4}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin x-4\sin 2x}{105x^3}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos x-8\cos 2x}{315x^2}-\frac{1}{14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x+8\sin 2x}{315x}-\frac{1}{14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

也可以这样算

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times 14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1-\cos x-\frac{\sin^2 x\cos x}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times 14}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\frac{\sin^3 x}{2}\right)}{140x^3}-\frac{11}{12\times 14}\\
&=\frac{9}{280}-\frac{11}{12\times 14}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin^2 x-\sin^4 x}{14x^6}-\frac{1}{14}&=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\left(\sin x+\frac{\sin^3 x}{6}\right)^2}{14x^6}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(x-\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\arcsin x-x-\frac{x^3}{6}\right)}{7x^5}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1-\frac{x^2}{2}\right)}{35x^4}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1-\frac{x}{2}\right)}{35x^2}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\left((1-x)^{-\frac{3}{2}}-1\right)}{140x}-\frac{11}{12\times 14}\\&=\frac{9}{280}-\frac{11}{12\times 14}=-\frac{1}{30}\end{aligned}$$

4.3 泰勒公式

皮亚诺余项

定理 4.9. 泰勒中值定理--皮亚诺形式

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶导数, 那么对任一 $x\in U(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

例4.56 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x \sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_0^x \sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t&\xlongequal{u=x+t}\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\sin\frac{\pi}{u}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{\text{泰勒展开}}\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{\pi}{u}+o\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\pi\ln 2\end{aligned}$$

例4.57 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right)$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{x}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right)\\=&\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}-e^{\pi}x\right)\\=&e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}-x\right)\\=&e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\right)\\=&-2e^{\pi}\end{aligned}$$

注:

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad x>0$$

例4.58 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}&=\lim_{x\to1}\frac{x\left(e^{(x-1)\ln x}-1\right)}{\ln x-x+1}\\&=\lim_{x\to1}x\times\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}-1}{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)}\\&=-2\end{aligned}$$

例4.59 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{1+x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]+\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\\&=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例4.60 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}\right)$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)&=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^{n-1}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=2\end{aligned}$$

例4.61 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$

解

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\ (0<\theta_{n+1}<1)$$

$$n!e=\underbrace{n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}_{\text{整数}}+\frac{n!}{(n+1)!}+\overbrace{\frac{n!\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}}^{\sin(x\pm2k\pi)=\sin x,\,k\in\mathbb{Z}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)&=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[2\pi en!-2\pi n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)=2\pi\end{aligned}$$

练习 **4.9** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{(\sin x)^x}-(\sin x)^{x^{\sin x}}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{(\sin x)^x\ln x}-e^{x^{\sin x}\ln\sin x}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^x\ln x}-e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}}{x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}-1}{x^2}\\
=&1\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\ln x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\ln\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^x-x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\right]\ln x}{x^2}-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)}{x^2}\\
=&0-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

练习 **4.10** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\left(n^2+1\right)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\left(n^2+1\right)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt{n+2}-\left(n^2+1\right)(n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{\frac{7}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)-\left(n^{\frac{7}{2}}+n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{\frac{7}{2}}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)-\left(n^{\frac{7}{2}}+n^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}}}\\
=&-\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

注意

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)$$

练习 **4.11** 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)$$

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{x}{e}\right)\\
&=\frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{1}{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)}-1\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty} x\left[\exp\left(1-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)-1\right]\\
&= \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty} x\left[\exp\left(\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-1\right]\\
&= \frac{1}{2e}
\end{aligned}
$$

✍ **练习 4.12** 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$$

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)\\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2}{t^2}\\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right)+\left(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right)-2}{t^2}\\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{-\frac{1}{4}t^2+o\left(t^2\right)}{t^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

注意

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)$$

✍ **练习 4.13** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n.$$

解 (by Hansschwarzkopf) 令

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n.$$

注意到

$$1-\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2, \forall x\in[0,1],$$

得到

$$\left(1-\frac{n+1}{4n^2}\right)^n \leqslant a_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)^n \leqslant \left(1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{48n^4}\right)^n.$$

故

$$a_n = \left(1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{4}}+o(1), \quad n\to\infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{1}{4}}.$$

✍ **练习 4.14** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

解 (by 西西) 记

$$I=n\left[\left(\frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\right)\right)^n-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]$$

则

$$I=\frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(\exp\left(n\ln\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-1\right)$$

注意到

$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\quad(n\to+\infty)$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to+\infty)$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)=1-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)}{4n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}+\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n\ln\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)\right]+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{4}+n\left[-\frac{(n+1)}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{16n^4}-\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=-\frac{15}{96n}-\frac{\pi^2}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

这里得注意到事实

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{\sqrt{(n^2+k)^3}}\right]\sim\frac{\pi^2}{n^2}$$

所以就有

$$\lim_{n\to\infty}I=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{e}}\left(e^{-\frac{15}{96n}-\frac{\pi^2}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)=-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{15}{96}+\frac{\pi^2}{6}\right)$$

练习 4.15 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5}-n\left(n\left(\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)-\frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right]$$

解 (西西) 我们如果利用泰勒公式就可以达到很好的结果

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

注意到

$$e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}\left(1-\frac{k^2}{2n}+\frac{k^3(3k-8)}{24n^2}-\frac{k^4(k^2-8k+12)}{48n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

且注意到

$$\sum_{k=0}^{n}e^{-k}=\frac{e}{e-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2e^{-k}=\frac{e(e+1)}{(e-1)^3}$$

和

$$\sum_{k=0}^{n}k^3(3k-8)e^{-k}=\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^4(k^2-8k+12)e^{-k}=\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7}$$

带入即可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n=\frac{e}{e-1}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{e(e+1)}{(e-1)^3}+\frac{1}{24n^2}\cdot\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{(e-1)^5}$$
$$-\frac{1}{48n^3}\cdot\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{(e-1)^7}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

那么我们可以达到

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e(-e^2+2e+11)(5e+1)}{24(e-1)^5}-n\left(n\left(\frac{e}{e-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)-\frac{e(e+1)}{2(e-1)^3}\right)\right]$$
$$=\frac{e(21+365e+502e^2-138e^3-35e^4+5e^5)}{48(e-1)^7}$$

例4.62 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}{\sin\tan x-\tan\sin x}$

解 It is convenient to do the computation in the general form. Let

$$f(x)=x+ax^3+bx^5+cx^7+o(x^7)\quad\text{and}\quad\phi(x)=x+\alpha x^3+\beta x^5+\gamma x^7+o(x^7)$$

be the Taylor expanxions of two odd infinitely differentiable functions with the gerivatives at $x=0$ equal to 1. Then

$$f(\phi(x))=x+\alpha x^3+\beta x^5+\gamma x^7+a(x+\alpha x^3+\beta x^5)^3+b(x+\alpha x^3)^5+cx^7+o(x^7)$$
$$=x+(a+\alpha)x^3+(b+3a\alpha+\beta)x^5+(c+3a\beta+3a\alpha^2+5b\alpha+\gamma)x^7+o(x^7)$$

Since the coefficients at x^3 and x^5 are symmetric with respect to exchanging Latin and Greek letters, the expansion of $f(\phi(x))-\phi(f(x))$ starts only with x^7. This is a bad news, but the good news is that the

coefficient at x^7 depends on the Taylor coefficients of $f(x)$ and $\phi(x)$ only up to order x^5.

$$f(\phi(x))-\phi(f(x))=\left[3a\alpha(\alpha-a)+2(b\alpha-\beta a)\right]x^7+o(x^7)$$

On the other hand, if $\phi(x)=f^{-1}(x)=x+Ax^3+Bx^5+o(x^5)$, then

$$x=f(f^{-1}(x))=x+(a+A)x^3+(b+aA+B)x^5+o(x^5)$$

i.e. $A=-a$, and $B=3a^2-b$. Substituting into $3a\alpha(\alpha-a)+2(b\alpha-\beta a)$ respectively: $-a$ for a, $-\alpha$ for α, $3a^2-b$ for b, and $3\alpha^2-\beta$ for β, we find:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\phi^{-1}(x))-\phi^{-1}(f^{-1}(x))&=[3a\alpha(a-\alpha)+2(a(3\alpha^2-\beta)-\alpha(3a^2-b))]x^7+o(x^5)\\&=-[3a\alpha(a-\alpha)+2(b\alpha-\beta a)]x^7+o(x^7)\end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(\phi^{-1}(x))-\phi^{-1}(f^{-1}(x))}{f(\phi(x))-\phi(f(x))}=1$$

拉格朗日余项

定理 4.10. 泰勒中值定理--拉格朗日形

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对任一 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间.

泰勒公式证明题

- 区间中点展开
- 极值点或最值点展开
- 区间端点展开
- 任意点展开

例4.63 证明不等式：$\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x-y|$，$x,y\in(-\infty,+\infty)$.

解 将 $\sin x$ 在点 y 处展开成一阶泰勒公式

$$\sin x=\sin y+\cos y\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2,\ (\xi介于x与y之间)$$

则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right|&=\left|\frac{\left|\sin y+\cos y\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2\right|-\sin y}{x-y}-\cos y\right|\\&=\left|-\frac{1}{2}\sin\xi\cdot(x-y)^2\right|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

注意 由不等式的形式很容易让人想到微分中值定理，然后。。。就被套路了

例4.64 设函数 $f(x)$ 满足 $[0,1]$ 内二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$. 证明：$|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{a}$

证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开，其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\qquad①$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \qquad ②$$

由 ②–① 得:

$$f(1)-f(0)=f'(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$$

$$\Longrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(x_0)| &\leqslant |f(1)|+|f(0)|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2\right| \\ &\leqslant 2a+\frac{b}{2}\left[(1-x_0)^2+x_0^2\right]=2a+\frac{b}{2}\underbrace{\left(1+2x_0^2-2x_0\right)}_{x_0\in(0,1)} \\ &\leqslant 2a+\frac{b}{a}\end{aligned}$$

例4.65 (Putnam,14) 设 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ 二次可微, 且满足 $|f(x)|\leqslant 1$, 及 $|f''(x)|\leqslant 1,(x\in[0,2])$. 证明对一切 $x\in[0,2],|f'(x)|\leqslant 2$ 成立.

证明 对任一点 $x\in[0,2]$, 由泰勒公式

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,(0<\xi_1<x)$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2,(x<\xi_2<2)$$

将上面二式相减并整理后得

$$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_2),$$

上式两边取绝对值, 并注意到绝对值不等式得

$$2|f'(x)|\leqslant |f(0)|+|f(2)|+\frac{1}{2}x^2|f''(\xi_1)|+\frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_2)|,$$

由题设我们有

$$2|f'(x)|\leqslant 2+\frac{x^2+(2-x)^2}{2}$$

不难证明二次函数 $g(x)=x^2+(2-x)^2$ 在 $[0,2]$ 上最大值为 4, 因而

$$2|f'(x)|\leqslant 4\Longrightarrow |f'(x)|\leqslant 2,x\in[0,2]$$

练习 4.16 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 也存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$$

证明 由题设极限存在条件, 记

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f'''(x)=b$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_x)h^3 \qquad (4.8)$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(\eta_x)h^3 \qquad (4.9)$$

其中 $\xi_x\in(x,x+h),\eta_x\in(x-h,x)$.

(4.8) 与 (4.8) 两式相加, 得

$$f''(x)=\big(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\big)+\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)-f'''(\eta_x)\big)$$

在式中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=(a+a-2a)-\frac{1}{6}(b-b)=0$$

(4.8) 与 (4.8) 两式相减, 得

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\Big[f(x-h)-f(x+h)-\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi_x)+f'''(\eta_x)\big)\Big] \tag{4.10}$$

在式 (4.10) 中令 $x\to+\infty$, 可推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在, 由 Lagrange 中值定理,

$$f(x-h)-f(x+h)=2hf'(\theta)\,,\quad \theta\in(x-h,x+h)$$

在式 (4.10) 中令 $x\to\infty$, 那么 $\theta\to+\infty$, 于是 $a=a-\dfrac{h^2b}{6}$, 因此 $b=0$ 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$

在 (4.8) 中, 令 $x\to+\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

✍ **练习 4.17** 设 $f(x)\in C^{(2)}(0,1)$, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$. 若存在 $M>0$，使得

$$(1-x)^2|f''(x)|\le M\quad(0<x<1)$$

则 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0$

证明 对 $t,x\in(0,1):t>x$, 用 Taylor 公式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+f''(\xi)\frac{(t-x)^2}{2},x<\xi<t$$

并取 $t=x+(1-x)\delta,\ (0<\delta<\dfrac{1}{2})$, 我们有

$$f(t)-f(x)=\delta(1-x)f'(x)+\frac{\delta^2}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow(1-x)f'(x)=\frac{f(t)-f(x)}{\delta}-\frac{\delta}{2}f''(\xi)(1-x)^2$$

$$|f'(x)(1-x)|\le\frac{|f(t)-f(x)|}{\delta}+\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2$$

注意到 $\xi=x+(t-x)\theta,\ 0<\theta<1$

$$\Rightarrow(1-\xi)^2=(1-x)^2(1-\delta\theta)^2>\frac{1}{4}(1-x)^2$$

（这里是由于 $0<\delta\theta<\dfrac{1}{2}$ ）及条件 $(1-x)^2|f''(x)|\le M(0<x<1)$

$$\frac{\delta}{2}|f''(\xi)|(1-x)^2=|f''(\xi)|(1-\xi)^2\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-\xi)^2}\cdot\frac{\delta}{2}<2M\delta$$

$$\Rightarrow|f'(x)(1-x)|\le\frac{|f(t)-f(x)|}{\delta}+2M\delta$$

现在，对 $\forall\varepsilon$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$ 对上述 $\delta\varepsilon$, 存在 $\eta>0$, 对 $\forall0<1-x<\eta$, 有 $|f(t)-f(x)|<\dfrac{\delta\varepsilon}{2}$
这样，对 $\forall0<1-x<\eta$，就有 $\Rightarrow|f'(x)(1-x)|<\varepsilon$ 故得

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0$$

例4.66 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证明 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处分别泰勒展开得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_a)(x-a)^2,\quad \xi_a\in(a,x)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_b)(x-b)^2,\quad \xi_b\in(x,b)$$

在以上两式分别令 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 可得

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_a')(b-a)^2,\quad \xi_a\in\Big(a,\frac{a+b}{2}\Big) \tag{4.11}$$

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_b')(a-b)^2,\quad \xi_a\in\Big(\frac{a+b}{2},b\Big) \tag{4.12}$$

由 (4.12) – (4.11) 得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}\big(f''(\xi_a')-f''(\xi_b')\big)$$

于是

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\big(|f''(\xi_a')|+|f''(\xi_b')|\big)\\&\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max\big(|f''(\xi_a')|,|f''(\xi_b')|\big)=\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|\end{aligned}$$

这里 ξ 为 $|f''(\xi_a')|$ 或 $|f''(\xi_b')|$ 由此即得原式

例4.67 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)$ 有界. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解 法 II[3]. 设 $|f''(x)|\leqslant M,\forall x\geqslant 0$. 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}$, s,t. $\dfrac{M}{2N}<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 固定 N, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 故 $\exists\Delta>0$. 当 $x>\Delta$ 时, 有 $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3N}$, 由 Tayor 公式得

$$f(x+\tfrac{1}{N})-f(x)=\frac{f'(x)}{N}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\big(N^{-1}\big)^2$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=N|f(x+\tfrac{1}{N})-f(x)-\tfrac{1}{2N^2}f''(\xi)|\\&\leqslant N(|f(x+\tfrac{1}{N})|+|f(x)|)+\frac{|f''(\xi)|}{2N}\\&<N\Big(\frac{\varepsilon}{3N}+\frac{\varepsilon}{3N}\Big)+\frac{M}{2N}<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

柯西余项

定理 4.11. 泰勒中值定理--柯西形

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个领域, 对于该领域内的任一 x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

[3]徐森林《数学分析精选习题全解》P169

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\theta\in(0,1).$ ♡

练习 4.18 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数，$f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbf{N}_+$，且存在常数 $C\geq 0$，使得对所有 $n\in\mathbf{N}_+$ 和 $x\in[-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leq n!C^n$. 证明：$f(x)\equiv 0$.

证明 不妨设 $C>0$. 令 $\delta=\min\{1,\dfrac{1}{2C}\}$, 则对任何 $x\in[-\delta,\delta]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和所给条件, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0, x\in[-\delta,\delta]$. 从而

$$f^{(n)}(x)\equiv 0, x\in[-\delta,\delta], n=0,1,2,\ldots.$$

令

$$a=\inf\{\alpha\in[-1,0):f(x)=0,\forall x\in[\alpha,0]\},b=\sup\{\beta\in(0,1]:f(x)=0,\forall x\in[0,\beta]\},$$

则根据已证结果, $-1\leq a<b\leq 1$. 我们断言必有 $a=-1,b=1$. 先证 $b=1$. 若 $b<1$, 取 $\delta_1=\min\{\delta,1-b\}$. 则对任何 $x\in[b,b+\delta_1]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和已证结果, 存在 $\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i+\frac{f^{(n+1)}(b+\theta_1(x-b))}{(n+1)!}(x-b)^{(n+1)}\right|\leq 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0, x\in[b,b+\delta_1]$, 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[0,b+\delta_1]$, 这与 b 的定义矛盾. 矛盾说明必有 $b=1$. 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$. 类似可证 $a=-1$. 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[-1,0]$. 最后得到 $f(x)\equiv 0, x\in[-1,1]$

积分余项

定理 4.12. 泰勒中值定理--积分型

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域 $U(x_0)$ 内有连续的 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x\in U(x_0)$， 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$ ♡

例4.68 证明: $1+\dfrac{n}{1!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}>\dfrac{e^n}{2}$ 对于每个整数 $n\geqslant 0$ 成立

解 由于 $e^n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$, 问题等价于证明

$$n!>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t\Longleftrightarrow\underbrace{\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=n!}>2e^{-n}\int_0^n(n-t)^ne^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=n-t$, 上式化为

$$\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t>2\int_0^n u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

从而其等价于

$$\int_n^{+\infty}u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u>\int_0^n u^ne^{-u}\,\mathrm{d}u$$

设 $f(u)=u^n e^{-u}$, 则只要证明

$$f(n+h)\geqslant f(n-h)\,,\quad 0\leqslant h\leqslant n$$

则问题得证. 以下证明上式成立. 上式等价于证明

$$(n+h)^n e^{-n-h}\geqslant (n-h)e^{h-n}$$

即

$$n\ln(n+h)\geqslant n\ln(n-h)+h$$

令 $g(h)=n\ln(n+h)-n\ln(n-h)-2h$, 则 $g(0)=0$, 并且对 $0<h<n$, 有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}=\frac{n}{n+h}+\frac{n}{n-h}-2=\frac{2n^2}{n^2-h^2}-2>0$$

从而当 $0<h<n$ 时, $g(h)>0$. 这样问题得证

注意 利用这一结论我们可以证明如下结论。证明存在 $50<a<100$. 使得

$$\int_0^a e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}\right)\mathrm{d}x=50$$

练习 4.19 设 $a>1$，试证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a (e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x=1$$

解 首先,

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}(e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}e^{-y}y^n\,\mathrm{d}y=1.$$

其次, 取 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $a\lambda>1$. 命

$$f(x)=e^{-\lambda x}x\Rightarrow f'(x)=e^{-\lambda x}(1-\lambda x)<0,\quad \forall x\in[a,\infty).$$

因此, $\forall x\in[a,\infty)$, 有 $e^{-\lambda x}x\leq e^{-\lambda a}a$.

$$\begin{aligned}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^{\infty}(e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x&=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^{\infty}e^{-(1-\lambda)xn}(e^{-\lambda x}x)^n\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{n^{n+1}}{n!}(e^{-\lambda a}a)^n\int_a^{\infty}e^{-(1-\lambda)xn}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n^{n+1}}{n!}(e^{-\lambda a}a)^n\frac{e^{-(1-\lambda)an}}{(1-\lambda)n}=\frac{n^n}{n!}a^n\frac{e^{-an}}{1-\lambda}\\&\sim\frac{1}{(1-\lambda)\sqrt{2n\pi}}(ae^{1-a})^n\to 0.\end{aligned}$$

由此可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^a(e^{-x}x)^n\,\mathrm{d}x=1.$$

练习 4.20 设 $a>1$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{na}{1!}+\frac{(na)^2}{2!}+\ldots+\frac{(na)^n}{n!}}{e^{na}}=0$$

解 令 $nx=t$, 则原极限等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{na}t^n e^{-t}\mathrm{d}t=1.$$

注意到

$$1=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t,$$

上式又等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t=0.$$

事实上, 容易算出

$$\int_{na}^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t=\left((na)^n+n(na)^{n-1}+n(n-1)(na)^{n-2}+\ldots+n!\right)e^{-na}.$$

由 $a>1$ 易知

$$(na)^n+n(na)^{n-1}+n(n-1)(na)^{n-2}+\ldots+n!<(n+1)(na)^n.$$

因此

$$\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t<\frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{n!}.$$

根据 Stirling 公式和 $e^{a-1}>a(a>1)$,

$$\frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{n!}\sim\frac{(n+1)(na)^n e^{-na}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{a}{e^{a-1}}\right)^n\to 0(n\to\infty).$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{na}^{+\infty}t^n e^{-t}\mathrm{d}t=0,\ a>1.$$

注意上式即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{na}{1!}+\frac{(na)^2}{2!}+\ldots+\frac{(na)^n}{n!}}{e^{na}}=0, a>1.$$

✍ **练习 4.21** 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

解 (西西): 我们有

$$e^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$$

因此，只要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right)$$

下面来估计 $\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t&=n^{n+1}\int_0^1 e^{nz}(1-z)^n dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{n(z+\ln(1-z))}dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)}dz\\&=n^{n+1}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{n!}{n^n}\left(e^n-\frac{2}{n!}\int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t\right)\\=&\frac{n!e^n}{n^n}-2n\left[\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(1-\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\right]\\=&\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)+2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz\end{aligned}$$

其中 $\theta_n\in(0,1)$. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}-2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}dz\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}2n\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}nz^2}\left(\frac{1}{3}nz^3+o(nz^3)\right)dz=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-z}z\,dz+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{4}{3}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)=\frac{4}{3}$$

练习 **4.22** (Bernstein's limit). Proof that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}$$

解 法 I[4]. 由带积分余项的泰勒展开式知

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

因而原命题等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

再利用斯特林公式

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\ \theta\in(0,1)$$

知原命题等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

首先, 注意到 $e^{-\frac{x^2}{2}}\geqslant(1-x)e^x$ $(x\geqslant 0)$, 于是:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

其次, 对任何 $\alpha>1$ 考虑辅助函数

$$f(x)=(1-x)e^x-e^{-\frac{\alpha x^2}{2}},\ x\leqslant 0.$$

因为 $f'(x)=xe^x\left(\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1\right)$, 而

$$\lim_{x\to 0+}\left(\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1\right)=\alpha-1>0,$$

故存在实数 $x_\alpha\in(0,1)$, 使得当 $x\in(0,x_\alpha)$ 时,

$$\alpha e^{-\frac{\alpha x^2+x}{2}}-1>0$$

因而, $f(x)$ 在 $[0,x_\alpha]$ 内递增, 故 $(1-x)e^x\geqslant e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}$ $(x\in[0,x_\alpha])$. 从而,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{n\alpha x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

[4]《大学数学竞赛指导》

再由 α 的任意性知

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

综上所述, 可得:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{n}(1-x)^n e^{nx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

法 II(by ytdwdw). 由带积分余项的泰勒展开式知

$$e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

得到

$$\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=1-e^{-n}\int_0^n\frac{(n-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t=n!$, 要证明的结论等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\int_n^{+\infty}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t}=1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=1,$$

其中 $f(t)=te^{1-t}$. 为了证明上述不等式, 除了利用积分的收敛性, 我们证明主要利用以下性质: $\forall\beta>1>\gamma>0$,

(1)

$$\begin{cases}\dfrac{f(\beta t)}{f(t)}\leqslant f(\beta)<1,\ t\in[1,+\infty),\\[2ex] \dfrac{f(\gamma t)}{f(t)}\leqslant f(\gamma)<1,\ t\in(0,1].\end{cases}$$

(2) 存在 $\varepsilon=\varepsilon_{\beta,\gamma}\in(0,1)$ 使得

$$f(1+\beta s)\leqslant f(1-s)\leqslant f(1+\gamma s),\quad\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

上式由 $f(1+t)=1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\ (t\to0)$ 推得.

由 (1),

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_\beta^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\beta\int_1^{+\infty}f^n(\beta t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\beta f^n(\beta)=0.$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\int_0^\gamma f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\gamma\int_0^1 f^n(\gamma t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\gamma f^n(\gamma)=0.$$

于是结合 (2) 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{1-\varepsilon}^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{1+\beta\varepsilon}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^\varepsilon f^n(1-t)\,\mathrm{d}t}{\beta\int_0^\varepsilon f^n(1+\beta t)\,\mathrm{d}t}\geqslant\frac{1}{\beta},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\int_{1-\varepsilon}^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{1+\gamma\varepsilon}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\int_0^\varepsilon f^n(1-t)\,\mathrm{d}t}{\gamma\int_0^\varepsilon f^n(1+\gamma t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{1}{\gamma},$$

由 $\beta>1>\gamma>0$ 的任意性即得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,\mathrm{d}t}=1$ 从而结论得证. 解法 2

$$\because\ (1+n+\frac{n^2}{n!}+\cdots+\frac{n^n}{n!})=e^n-\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\xlongequal{n-t=x}e^n-e^n\int_0^n\frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\therefore\ a_n = 1 - \int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

下面求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$

令 $\eta = n^{-\frac{1}{2}+z}, 0<\varepsilon<\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
\because \int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x &\xrightarrow{x=n(z+1)} \int_{-1}^0 \frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^n n^{n+1}}{n!}dz \\
&= n\frac{n^n}{n!e^n}\int_{-1}^0 e^{-nz}(z+1)^n dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})]\int_{-1}^0 [e^{-z}(z+1)]^n dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})][\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(z+1)]^n dz + \int_{-\eta}^0 [e^{-z}(1+z)]^n dz] \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

设 $f(z) = e^{-z}(1+z), (z\le 0), f'(z) = -e^{-z}\cdot z \ge 0$

$$\therefore \int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1+z)]^n dz < (1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n < [e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

$$\therefore\ I_1 = o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2z}})$$

下面考虑 I_2

$$\because e^{-z}(1+z) = e^{-z+\ln(z+1)} = e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}}\quad (0<\theta(z)<1)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^0 e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3})}dz \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^0 e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{n\to\infty} a_n &= 1 - \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\mathrm{d}x \\
&= 1 - (\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})\,\mathrm{d}y \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\int_{-\infty}^0 \frac{y^3}{3}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}(-\frac{2}{3}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

从这个解答也可以看出

$$\begin{aligned}
&(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}) \\
&= e^n - e^n\int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^n (x+n)^n e^{-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{n^n}{n!}\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

解法 3 考虑 Taylor 公式的积分形式, 有

$$e^n = 1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!} &= e^n - \int_0^n e^t(n-t)^n\,\mathrm{d}t \\
\text{令}(n-t=x) \quad &= e^n - e^n\int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x \\
\text{注意到}(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x=1) \quad &= e^n(\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x) \\
&= e^n\int_n^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!}\int_n^{+\infty} x^n e^{n-x}\mathrm{d}x \\
\text{令}(n-x=-t) \quad &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}(n+t)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由 Striling 公式得

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\mathrm{d}x}{e^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

证明:

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

因为

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}+o(\frac{x^3}{n^3})}$$

所以

$$\int_0^1 (1+\frac{x}{n})^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}+o(\frac{x^3}{n^3})}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2n}\int_0^n e^{-t^2}e^{o(\frac{1}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

下面考察

$$\frac{n^n}{n!}\int_1^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x < \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\ln(n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}) = (n+1)\ln n - \frac{n^2}{2} = n^2\left[(1+\frac{1}{n})\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\right]$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}=0$, 且由 $e^{\frac{nx}{2}}>\dfrac{(\frac{nx}{2})^{n+2}}{(n+2)!}\Rightarrow e^{-\frac{nx}{2}}<\dfrac{(n+2)!}{(\frac{nx}{2})^{n+2}}$

$$\Rightarrow \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x<\frac{n^{n+1}e^{-\frac{n^2}{2}}(n+1)(n+2)}{(\frac{n}{2})^{n+2}}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(\frac{n}{2})^{n+2}}=0.\ \lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-\frac{n^2}{2}}\int_n^{\infty}(1+x)^n e^{-nx/2}\,\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\frac{n^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

解法 4 考虑中心极限定理

我们来证一个一般性的结论设 $x_1,x_2,\cdots$ 为相互独立且服从参数 λ 的普阿松分布 $P(x_i=k)=\dfrac{1}{k!}e^{-\lambda}$

$\therefore\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 服从参数 $n\lambda$ 的普阿松分布, 即 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=k\right)=\dfrac{(n\lambda)}{k!}e^{-n\lambda}$ 因为

$$E(\sum_{i=1}^{n}x_i)=n\lambda,\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n}x_i)=n\lambda$$

由中心极限定理对任意的 x 有

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

因为

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}x_i<n\lambda+x\sqrt{n\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{[n\lambda+x\sqrt{n\lambda}]}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

所以取 $x=0,\lambda=1$ 即得到: $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}=\dfrac{1}{2}$

✍ **练习 4.23** 设 $a_n=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}}{e^n}$, 我们来计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解 因为

$$\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)=e^n-\int_0^n\frac{(n-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\overset{n-t=x}{=}e^n-e^n\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\Rightarrow a_n=1-\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x,\ \text{即求}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x\ \text{就好}$$

先令 $\eta{=}n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, 0<\varepsilon<\dfrac{1}{6}$.

因为

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{x^n e^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=n(z+1)} \int_{-1}^0 \frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^n n^{n+1}}{n!}dz\\ &= n\frac{n^n}{n!e^n}\int_{-1}^0 e^{-nz}(z+1)^n dz\\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(\frac{1}{n})\right]\int_{-1}^0 [e^{-z}(1{+}z)]^n dz\\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(\frac{1}{n})\right]\left[\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1{+}z)]^n dz+\int_{-\eta}^0 [e^{-z}\,(1+z)]^n dz\right]\\ &= I_1+I_2\end{aligned}$$

设 $f(z)=e^{-z}(1+z),(z\le 0).f'(z)=-e^{-z}z\ge 0.$

所以

$$\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1{+}z)]^n dz<(1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n<[e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

所以 $I_1=o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}})$

再来考虑 I_2, $e^{-z}(1+z)=e^{-z+\ln(z+1)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}},0<\theta(z)<1$

所以

$$\begin{aligned}I_2&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(n^{-1+4\varepsilon})\right]\int_{-\eta}^0 e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^3}{3})}dz\\ &=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+o(n^{-1+4\varepsilon})\right]\int_{-\eta}^0 e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^n e^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x=1-\left(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)\right)\\ &=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^n e^{-x}}{n!}\,\mathrm{d}x=1-\left(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2)\right)\\ &=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\left(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\\ &=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\int_{-\infty}^0\frac{y^3}{3}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &=1-\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

得证, 从这个解答也可以看出

$$\begin{aligned}\left(1{+}n{+}\frac{n^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)&=\mathrm{e}^n-e^n\int_0^n\frac{x^n}{n!}e^{-x}=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}(x+n)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{n^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &\sim\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\end{aligned}$$

✍ **练习 4.24** 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$$

解 (by 逆逆) 可以证明

$$e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)=\frac{1}{n!}\int_n^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{n^n}{n!e^n}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^ne^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^ne^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t$$

考虑函数列

$$f_n(t)=\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^ne^{-\sqrt{n}t}-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t)$$

根据 $\log(1+x)=x-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+O(x^4)$ 可得

$$f_n(t)=\sqrt{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}+O(\frac{t^4}{n})}-1\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t)\to f(t)=\frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

再根据 $\log(1+x)\leqslant x-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$, 以及 $e^x-1\leqslant xe^x$ 可得

$$f_n(t)\leqslant\sqrt{n}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}}-1\right)\chi_{(0,\sqrt{n})}(t)$$
$$\leqslant\frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^3}{3\sqrt{n}}}\chi_{(0,\sqrt{n})}(t)\leqslant g(t)=\frac{t^3}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

根据控制收敛定理可得

$$\int_0^{\sqrt{n}}\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^ne^{-\sqrt{n}t}-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t\to\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}.$$

另一方面, 存在 $c>0$ 使得 $x\geqslant1$ 时 $\log(1+x)\leqslant(1-c)x$, 于是有

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^ne^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-c\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-cn}}{c\sqrt{n}}.$$

根据

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t=\frac{2e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}$$

可以得到估计式

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^ne^{-\sqrt{n}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}+\left(\frac{2}{3}+o(1)\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

因此根据 Stirling 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O(\frac{1}{n})\right)$ 可得

$$e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

✍ **练习 4.25** 求证

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}-\sqrt{n}\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{23}{270\sqrt{2\pi}}$$

解 (by ytdwdw) 可以证明:

$$\sqrt{s}\int_0^{+\infty}(1+x)^se^{-sx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{s}}+\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k\Gamma(\frac{k+1}{2})}{s^{\frac{k}{2}}}+o\left(\frac{1}{s^{\frac{m}{2}}}\right),\ (s\to+\infty).$$

$$\sqrt{s}\int_{-1}^{+\infty}(1+x)^se^{-sx}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m}\frac{2a_k\Gamma(k+\frac{1}{2})}{s^k}+o\left(\frac{1}{s^m}\right),\ (s\to+\infty).$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}, & a_1 &= -\frac{1}{3},\\
a_2 &= \frac{1}{12}\sqrt{2}, & a_3 &= -\frac{4}{135},\\
a_4 &= \frac{1}{432}\sqrt{2}, & a_5 &= \frac{4}{2835},\\
a_6 &= -\frac{139}{194400}\sqrt{2}, & a_7 &= \frac{8}{25515},\\
a_8 &= -\frac{571}{32659200}\sqrt{2}, & a_9 &= -\frac{1124}{37889775},\\
a_{10} &= \frac{163879}{12345177600}\sqrt{2}, & a_{11} &= -\frac{41768}{7388506125},
\end{aligned}$$

并由此得到 (用到 $a_0, a_1, \cdots, a_5$)

$$\frac{\int_s^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty}(1+x)^s e^{-sx}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{2}s} - \frac{23}{270\sqrt{2\pi s^3}} + \frac{23}{3024\sqrt{2\pi s^5}} + o(s^{\frac{5}{2}}),\ (s \to +\infty)$$

4.4 函数的单调性与曲线的凹凸性

例4.69 证明 $x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7 = 0$ 有且仅有一个正实根.

解 [4] 我们只需证明

$$F(x) \equiv \frac{x^2 + 3x^2 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7}{x^4} = x^{-2} + 3x^{-1} + 7 - 5x^2 - 8x^3$$

在 $(0, +\infty)$ 内有且只要一个零点.

由于 $F(0^+) = +\infty$, 而 $F(+\infty) = -\infty$, 因此, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至少有一个零点. 另一方面,

$$F'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-2} - 10x - 24x^2 < 0,\ \forall x > 0.$$

因此, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单减. 从而 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只要一个零点.

例4.70 试证: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$

解 令 $f(x) = \tan x - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7\right)$, 则 $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sec^2 x - \left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x^6\right)\\
&= \tan^2 x - \left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x^4\right)x^2\\
&= \tan^2 x - \left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2 x^2\\
&\xlongequal{\text{平方差公式}} \left[\tan x - \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right]\left[\tan x + \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right]
\end{aligned}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 上式第二个括号内显然为正. 记 $g(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$. 则有

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 - x^2\\
&\xlongequal{\text{平方差公式}} (\tan x - x)(\tan x + x) > 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

又 $g(0) = 0$, 因此 $g(x) > 0\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. 所以 $f'(x) > 0$. 又因 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

例4.71 设 $0<x<1$, 证明: $(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<4$

证明 (by Hansschwarzkopf) 两边取对数得

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<4 \Longleftrightarrow \frac{\ln(1+x)}{x}+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\ln 4$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{x^3}-\frac{4x^2+2x}{x^2(1+x)^2}=\frac{2}{x^3}\left(\ln(1+x)-\frac{2x^2+x}{(1+x)^2}\right).$$

令 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x^2+x}{(1+x)^2}$, 则 $g'(x)=\dfrac{x^2-x}{(1+x)^3}=\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}<0$, $\forall x\in(0,1)$, 故

$$g(x)<g(0)=0\,,\quad \forall x\in(0,1).$$

因此 $f''(x)<0$, $\forall x\in(0,1)$. 进一步有

$$f(x)<f(1)+f'(1)(x-1)=f(1)=\ln 4\,,\quad \forall x\in(0,1).$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{f(x)}<4\,,\quad \forall x\in(0,1)\,.$$

例4.72 证明: 当 $n\geqslant 2$ 时成立不等式:

$$\frac{3}{4}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}<1$$

证明 (by MSE[5]) 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}=\frac{n+1}{n^{n/(n-1)}}=\mathrm{e}^{u(n)},$$

$\forall x>1, u(x)=\log(x+1)-\dfrac{x}{x-1}\log x$. 则

$$u'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\left(\log(x)-2\frac{x-1}{x+1}\right),$$

令 $v(x)=\log(x)-2\dfrac{x-1}{x+1}$, 则

$$v'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

则当 $x>0$ 时, $v'(x)>0\Rightarrow v(x)\uparrow\Rightarrow v(x)\geqslant v(1)=0\Rightarrow\forall x>1, u'(x)>0\Rightarrow u(x)\uparrow$. 从而, $\log 3-2\log 2=u(2)\leqslant u(n)\leqslant u(+\infty)$,

$$u(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\log x}{x-1}\right)=0$$

从而, 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\frac{3}{4}=\mathrm{e}^{u(2)}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}<\mathrm{e}^{u(+\infty)}=1.$$

练习 4.26 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 证明: $\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

[5] How prove this inequality $\frac{3}{4}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}<1$

证明 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x} \tag{4.13}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x-1\end{aligned}$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}}x&=\frac{1}{3}\left(\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{-\frac{3}{4}}x\right)\\&>\sqrt[3]{\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{\frac{2}{3}}x+\cos^{-\frac{3}{4}}x}=1\end{aligned}$$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'(x)>0$, 从而 $\varphi(x)$ 单调递增，又 $\varphi(0)=0$, 因此 $\varphi(x)>0$, 即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0$$

由 (4.13) 式得 $f'(x)<0$ 从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\tan x+x}{x}\times\lim_{x\to0+}\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\\&=2\times\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$$

例4.73 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 证明: $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}<1-\dfrac{4}{\pi^2}$.

证明 (by ytdwdw)[6] 定义

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right),\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

则

$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2}{\sin^3 x}\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}-\cos x\right)$$

考虑

$$g(x)=\ln\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{3}\ln\cos x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

则 $g(0^+)=0$,

$$g'(x)=\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\tan x=-\frac{1}{x\tan x}\left(\tan x-x-\frac{1}{3}x\tan^2 x\right)$$

[6]《数学分析高等数学例题选解 V6》P56

再考虑

$$h(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x\tan^2 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

则 $h(0)=0$,

$$\begin{aligned}h'(x)&=\sec^2 x-1-\frac{1}{3}\tan^2 x-\frac{2}{3}x\tan x\sec^2 x\\&=\frac{2}{3}\tan x\sec^2 x(\sin x\cos x-x)\\&<0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

由此依次得到在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内, $h(x)<h(0)=0$, $g'(x)>0$, $g(x)>g(0)=0$, $f'(x)>0$, $f(x)<f(\frac{\pi}{2})=0$.
顺便证明了几个不等式

$$x^3\cos x<\sin^3 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x^3<\tan x\sin^2 x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

例4.74 设 $a>b>1$. 证明: $a^{b^a}>b^{a^b}$

证明 (by Hansschwarzkopf)
1) 若 $b^a>a^b$, 则

$$a^{b^a}>b^{b^a}>b^{a^b}.$$

2) 若 $b^a\le a^b$, 则 $\dfrac{\ln a}{\ln b}\ge\dfrac{a}{b}$. 注意到 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上为严格减函数,
从而 $\dfrac{\ln b}{b-1}>\dfrac{\ln a}{a-1}$, 即 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a^b}{b^a}$. 因此

$$\frac{\ln a}{\ln b}\ge\frac{a}{b}>\frac{a^b}{b^a}.$$

即

$$a^{b^a}>b^{a^b}.$$

例4.75 证明: $\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}<\arctan a-\arctan b<a-b$, 其中 $0<b<a$

证明 设 $f(x)=\arctan x$. 则 f 在 $[b,a]$ 上连续可导, $f'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
由拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, $\exists\xi(b,a)$, s.t

$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)<a-b$$

为证明另一半不等式. 令 $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, 则

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}<\arctan a-\arctan b\Longleftrightarrow\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\sec\alpha\sec\beta}<\alpha-\beta$$

$$\Longleftrightarrow\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha<\alpha-\beta\Longleftrightarrow\sin(\alpha-\beta)<\alpha-\beta$$

$\sin(\alpha-\beta)<\alpha-\beta$ 当 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 成立
或者, 令 $F(x)=\arctan x-\arctan b-\dfrac{x-b}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+b^2}}$, 则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2-bx}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\&=\frac{1}{1+x^2}\left[1-\frac{bx+1}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+x^2}}\right]>0\end{aligned}$$

$F(x)$ 单调增, 由 $a>b$ 得

$$\arctan a-\arctan b-\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}=F(a)-F(b)=0.$$

由此得 $\arctan a-\arctan b>\dfrac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$

例4.76 设 a,b,c,d 是 4 个不等于 1 的正数, 满足 $abcd=1$, 问 $a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}+d^{2010}$ 和 $a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}+d^{2011}$ 哪个数大? 为什么?

解

$$f(x)=a^x+b^x+c^x+d^x(x>0)$$

则有

$$f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c+d^x\ln d$$

且有 $f'(0)=0$. 二阶导数

$$f''(x)=a^x\ln^2 a+b^x\ln^2 b+c^x\ln^2 c+d^x\ln^2 d>0$$

故有 $f'(x)>0,x>0$. $f(x)$ 严格单调递增, 故

$$f(2010)<f(2011)$$

本题的推广

设 $a_i>0,p>q,p,q\in\mathbb{R}$ 若 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\geq\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^q$.

例4.77 (CMC, 2015) 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty$$

解 α 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$. 若 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 取 $x_n=(n\pi)^{-1}$, $y_n=\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)^{-1}$. 则

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|^\alpha}=2^\alpha\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1}\to\infty$$

下证 $\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}<+\infty$. 由于 $f(x)$ 为偶函数, 不妨设 $0\leqslant x<y$. 令

$$z=\sup\{u\leq y|f(u)=f(x)\}$$

则 $z^{-1}\leqslant y^{-1+2\pi}$.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|f(z)-f(y)|\\&\leq\int_z^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leq|y-z|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq|x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_z^y\left(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq|x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}|x-y|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

推广[7]: 对任意 $x,y>0$, 均有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant\sqrt{2|x-y|}$$

[7]Note on the hölder norm estimate of the function, Jiaqiang Mei, Haifeng Xu,2014.

例4.78 证明: 当 $x \geqslant 1$ 时成立不等式:

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} + x^{-\frac{1}{x}} > 2$$

解 (by 逆逆) 原命题等价于: 当 $x \geqslant 1$ 时成立

$$e^{\frac{\ln(x+1)}{x+1}} + e^{-\frac{\ln x}{x}} > 2$$

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, 易得 $f(x)$ 在 $(0,e)\uparrow$, 在 $(e,+\infty)\downarrow$. 且 $f(x) \leqslant f(e) = \dfrac{1}{e}$.

当 $1 \leqslant x \leqslant 6$, 有

$$f(1+x) \geqslant \min f(2), f(7) = f(7)$$

$$e^{f(1+x)} + e^{-f(x)} \geqslant e^{f(7)} + e^{-\frac{1}{e}} \approx 1.32047 + 0.692201 \approx 2.01267 > 2$$

当 $6 \leqslant x \leqslant 9$, 有

$$e^{f(1+x)} + e^{-f(x)} \geqslant e^{f(10)} + e^{-f(6)} \approx 1.25893 + 0.741836 \approx 2.00076 > 2$$

当 $x \geqslant 9$, 由泰勒公式我们有

$$e^{f(1+x)} + e^{-f(x)} > 1 + f(1+x) + \frac{1}{2}f^2(1+x) + 1 - f(x) > 2$$

即得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)^2 + \frac{\ln(1+x)}{1+x} > \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\ln^2(1+x)}{1+x} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\ln(1+x)}{1+x} > \frac{1}{x} \Longrightarrow \ln(1+x) > 2\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\ln(1+x) - 2\left(1+\frac{1}{x}\right) \geqslant \ln 10 - 2\left(1+\frac{1}{9}\right) \approx 0.0803629 > 0$$

练习 4.27 某产品的需求函数和总成本函数分别为 $p = 40 - 4q$ 和 $C(q) = 2q^2 + 4q + 10$，政府对产品以税率 t 征税，求：

(1) 厂方以税率 t 纳税后，获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.

(2) $t = 12$ 和 $t = 30$ 时，分别求厂方获得最大利润时产品的产量和单价，以及征税收益.

(3) 税率 t 为多少时，征税收益最大？此时产品的产量和单价为多少？

解 纳税后的利润函数

$$L_t(q) = R(q) - C(q) - tq = 36q - 6q^2 - 10 - tq, \quad L'(q) = 36 - 12q - t = 0,$$

得唯一驻点 $q = \dfrac{36-t}{12}$，又 $L''(q) = -12 < 0$，所以 $q_t = q = \dfrac{36-t}{12}$ 是最大值点，此时

$$p_t = 40 - 4q_t = 28 + \frac{t}{3},$$

因此，以税率 t 纳税时，当产量 $q_t = \dfrac{36-t}{12}$，单价 $p_t = 28 + \dfrac{t}{3}$ 时，厂方获得最大利润，此时征税收益 $T = tq_t = \dfrac{36t - t^2}{12}$.

(2) 把 $t = 12$ 代入上述各值，得

$$q_{12} = \frac{36-12}{12} = 2, p_{12} = 28 + \frac{12}{3} = 32, T = 12 \times 2 = 24,$$

再把 $t = 30$ 代入，得

$$q_{30} = \frac{36-30}{12} = \frac{1}{2}, p_{30} = 28 + \frac{30}{3} = 38, T = 30 \times \frac{1}{2} = 15,$$

(3) 由征税收益

$$T = \frac{36t - t^2}{12}, \quad T' = \frac{18-t}{6} = 0, \quad T'' = -\frac{1}{6}$$

得唯一驻点 $t=18$，又 $T''(18)<0$，所以 $t=18$ 为最大值点．因此，当税率 $t=18$ 时，征税收益最大，此时

$$q_{18}=\frac{36-18}{12}=\frac{3}{2},\quad p_{18}=40-4q_{18}=40-4\times\frac{3}{2}=34,$$

征税收益

$$T=18\times\frac{3}{2}=27,$$

因此，当税率 $t=18$ 时，征税收益最大为 27，此时产品产出量为 1.5，单价为 34.

定理 4.13

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上 n 阶可导，且

$$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1),\quad f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)\ (x>a)$$

则当 $x>a$ 时有 $f(x)>g(x)$ ♡

证明 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$x\geqslant a$. 则

$$F^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

由 $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 及 $F(x)$ 在 $x=a$ 点的 $n-1$ 阶泰勒公式得

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n\quad(a<\xi<x)$$

因为 $F^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-g^{(n)}(\xi)>0$，所以 $F(x)>0$. 即 $f(x)>g(x)$

例4.79 证明不等式：$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x,\ \left(0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

解

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x,\ \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)\Longleftrightarrow\sin^3x\cdot(\cos x)^{-1}\geqslant x^3,\ \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

记 $f(x)=\sin^3x\cdot(\cos x)^{-1}$，$g(x)=x^3$，则

$$f'(x)=2\sin^2x+(\cos x)^{-2}-1,\ g'(x)=3x^2\Longrightarrow f'(0)=g'(0)=0.$$

$$f''(x)=4\sin x\cos x+2(\cos x)^{-3}\sin x,\ g'(x)=6x\Longrightarrow f''(0)=g''(0)=0.$$

$$f'''(x)=4\cos2x-6(\cos x)^{-4}\sin x+2(\cos x)^{-2},\ g'(x)=6\Longrightarrow f'''(0)=g'''(0)=6.$$

$$f^{(4)}(x)=\left[24(\cos x)^{-5}-8(\cos x)^{-3}-16\cos x\right]\sin x,\ g^{(4)}(0)=6.$$

当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$0<\cos x<1$，则

$$(\cos x)^{-5}>(\cos x)^{-3}>\cos x,\ f^{(4)}(x)>0=g^{(4)}(x).$$

故 $f(x)>g(x)\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，即有 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x$

由于不等式两边都是偶函数，所以当 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时不等式仍成立.

例4.80 一个可微函数 $f(x)$，使得 $f'(x_0)>0$，但 $f(x)$ 在点 x_0 的任何领域内都不是单调的

解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

4.4.1 曲线的凹凸性与拐点

定义 4.1. 凹函数

设函数 f 在区间 I 上定义. 若对每一对点 $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ 和每个 $\lambda \in (0,1)$ 成立不等式

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{4.14}$$

则称 f 为区间 I 上的凹函数. ♣

例4.81 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

1. 对于 $a < x < x_0 < y < b$, 存在 $\lambda (0 < \lambda < 1)$, 使 $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$;
2. 对于满足 $0 < \lambda < 1$ 的 λ, 有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

解 1. 令 $\dfrac{y - x_0}{y - x} = \lambda$, 则 $0 < \lambda < 1$, 且有

$$x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$$

2. 令 $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\exists \xi_1 \in (x, x_0), \xi_2 \in (x_0, y)$ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(y - x_0)^2$$

由于 $f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0, x \neq x_0, y \neq y_0$, 故有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(y) > f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0)$$

因此有

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) &> \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + (1-\lambda) f(x_0) + (1-\lambda) f'(x_0)(y - x_0) \\ &= f(x_0) - f'(x_0)\big[\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\big] \\ &= f(x_0) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \end{aligned}$$

故得证

例4.82 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x) \leq 0$，证明：若对于 $0 < a < b < a + b < 2$，有 $f(a) \geq f(a+b)$，则

$$\frac{a f(a) + b f(b)}{a + b} \geq f(a + b).$$

证明 根据 $f''(x) \leqslant 0$, 可知 f 在 $[0,2]$ 上是凹函数. 故

$$f(b) = f\left(\frac{b-a}{b}(a+b) + \frac{a}{b}a\right) \geqslant \frac{b-a}{b} f(a+b) + \frac{a}{b} f(a).$$

再根据条件 $f(a) \geqslant f(a+b)$ 得到 $f(b) \geqslant f(a+b)$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{a f(a) + b f(b)}{a + b} &= \frac{a}{a+b} f(a) + \frac{b}{a+b} f(b) \\ &\geqslant \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(a+b) = f(a+b). \end{aligned}$$

例4.83 求 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}&=1+\sum_{n=2}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}\\&<1+2\sum_{n=2}^{100}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=1+2(10-1)=19\end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

故

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}>2\sum_{n=2}^{100}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2(\sqrt{101}-1)>18$$

因此 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 18

例4.84 证明对于任何自然数 n, 有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

证明 左边有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

右边, 注意到 (凹凸性, 面积法)

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{\sqrt{n}}{2}\\&<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{\sqrt{n}}{2}<\frac{2}{3}n\sqrt{n}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

练习 4.28 设 $n\geq 1, a_1, a_2, \cdots, a_n>0$. 求证

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{n-1}{n}\max_{i.j\in R}(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2$$

解 (by tian27546) 设

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\max_i a_i = b, \min_i a_i = a$$

考虑任意 $a_i \geq a_j$ 则有

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i + \varepsilon, \cdots, a_j - \varepsilon, \cdots, a_n) \\ &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} - \sqrt[n]{a_1 \cdots (a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon) \cdots a_n} \\ &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\left(\sqrt[n]{(a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon)} - \sqrt[n]{a_i a_j}\right) \end{aligned}$$

注意

$$a i a_j - (a_i + \varepsilon)(a_j - \varepsilon) = \varepsilon(a_i - a_j) + \varepsilon^2 \geq 0$$

故

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i + \varepsilon, \cdots, a_j - \varepsilon, \cdots, a_n) \leq 0$$

如此下去, 我们只有当 a_i 中有 k 个值为 a, 有 $n-k-1$ 个取 b, 还有一个是任意的, 不妨设是 $a_p = x > 0$, 故我们考虑

$$f(c) = \frac{ka + (n-k-1)b + x}{n} - \sqrt[n]{a^k b^{n-k-1} x}$$

显然有

$$f''(x) = \sqrt[n]{a^k b^{n-k-1}} \cdot \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}-2} > 0$$

故 f 是凸函数, 那么只有当 $x = b$ 时取得最大. 故我们只要证明

$$\frac{ka + (n-k)b}{n} - \sqrt[n]{a^k b^{n-k}} \leq \frac{n-1}{n}(a - 2\sqrt{ab} + b)$$

即等价证明

$$(n-1-k) + (k-1)b + n\sqrt[n]{a^k b^{n-k}} \geq (2n-2)\sqrt{ab}$$

这显然有 $2n-2$ 元均值不等式有

$$a + \cdots a + b + \cdots b + \sqrt[n]{a^n b^{n-k}} + \cdots + \sqrt[n]{a^n b^{n-k}} \geq (2n-2)\sqrt[2n-2]{a^{n-1-k} b^{k-1} a^k b^{n-k}} = (2n-2)\sqrt{ab}$$

证毕!

按照同样方法我们可以得到下界:

$$\frac{n^2-1}{6} \min_{i,j}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

例4.85 单点二阶导数大于 0 而不具有凹凸性的函数

解 (by 向禹)

$$f(x) = \int_0^x t^2 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}$$

4.5 函数的极值与最大值最小值

定理 4.14. 极值的第三充分条件

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内存在直到 $n-1$ 阶的导数, 且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在. 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则有

1. 当 n 为偶数, x_0 为 $\begin{cases} \text{极小值}, & \text{当 } f^{(n)}(x_0) > 0 \\ \text{极大值}, & \text{当 } f^{(n)}(x_0) < 0 \end{cases}$

2. 当 n 为奇数, x_0 不是极值点 ♡

证明 由泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}+o\big((x-x_0)^n\big)=f(x_0)+\mu_n(x)(x-x_0)^n.$$

其中 $\mu_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$, 它在某领域 $U(x_0;\delta)$ 内恒与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.
(i) 当 n 为偶数, 而 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n>0,\ x\in U(x_0;\delta)$$

故 $f(x)\geqslant f(x_0), x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极小值点;
又当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n<0,\ x\in U(x_0;\delta)$$

故 $f(x)\leqslant f(x_0), x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极大值点.
(ii) 当 n 为奇数时, 有

$$(x-x_0)^n\begin{cases}<0, & x\in(x_0-\delta,x_0),\\ >0, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

从而 $\mu_n(x)(x-x_0)^n$ 在 x_0 左右两侧异号, 这就说明 x_0 不是极值点

例4.86 设函数 $f(x)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}f''(x)+3x[f'(x)]^2=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln^2(1+x)-x$, 若 $x_0>0$ 是 $f(x)$ 的一个驻点, 能否确定 x_0 是 $f(x)$ 的极值点? 若是, 说明是极大值点还是极小值点.

解 由所给方程和 $f'(x_0)=0$ 知

$$f''(x_0)=(1+x_0)\ln^2(1+x_0)-x_0^2.$$

下面证明 $f''(x_0)<0$: 记 $\varphi(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, 因为

$$\varphi'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,\ \varphi''(x)=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]$$

当 $x>0$ 时, 由 $\ln(1+x)<x$, 知 $\varphi''(x)<0$, 所以 $\varphi'(x)$ 单调减少, 又 $\varphi'(0)=0$, 得 $\varphi'(x)<0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 单调减少, 又 $\varphi(0)=0$, 所以 $\varphi(x)<0$.
根据上面的判断可知, $f(x)$ 在 x_0 取得极大值

例4.87 求函数

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

的极值, 其中 n 为正整数

解 $f(x)=e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\\&=e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$, 可解得唯一驻点 $x=0$. 当 n 为奇数时,

$$f'(x)=\begin{cases}>0, & x<0\\ <0, & x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=1$; 而当 n 为偶数时, $\forall x\neq 0$ 有 $f'(x)<0$ 所以此时 $f(x)$ 无极值

✍ 练习 4.29 设 $x>0$, 证明 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac{1}{4}<\theta(x)<\dfrac{1}{2}$

解 (by 蓝兔兔): 由题易得

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\frac{1}{4(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}-x\\&=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{x^2+x}-2x+1\right)\end{aligned}$$

令 $g(x)=2\sqrt{x^2+x}-2x+1$, 则有 $g(0)=1$ 因为

$$g'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}-2=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2+x}}\geqslant 0$$

由此可知 $g(x)\uparrow$

又 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+2\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=2$

所以 $\theta(x)=\dfrac{1}{4}g(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

解 (by Hilbert): 由题

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\Longleftrightarrow\sqrt{1+x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}$$

故

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-x=\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\\&=\frac{3\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}}{4\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

显然 $\theta(x)\uparrow$, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

故 $\theta(x)\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

4.6 Lagrange 差值公式

✍ 练习 4.30 求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}$

解 设

$$f(x)=x^{n+1}-x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

由插值公式我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{(x-j)}{k-j}\right)f(k)$$

比较两边 x^n 系数:

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j\neq k}\frac{k^{n+1}}{k-j}\right)$$

化简得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}=\frac{n(n+1)!}{2}$$

例4.88 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

解 根据 n 给函数点的已知条件构造 $n-1$ 次多项式函数, 由题目中函数特征 $f(a)$, $f(b)$, $f'\big((a+b)/2\big)$, 再考虑 $f\big((a+b)/2\big)$, 则四个点特征可以构造三次多项式函数 $P_3(x)$. 令 $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, 该函数满足

$$P_3(a)=f(a),\quad P_3(b)=f(b)$$

$$P_3\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),\quad P_3'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

令 $\varphi(x)=f(x)-P_3(x)$, 则函数在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数, 并且满足

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=0,\ \varphi'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=0$$

应用 Rolle 定理可以得到三个 $\varphi'(x)$ 存在三个零点, 再两次应用 Rolle 定理, 则可知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'''(\xi)=0$ 即

$$f'''(\xi)-P_3(\xi)=f'''(\xi)-6a_3=0$$

下面计算

$$a_3=\frac{4}{(b-a)^3}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right]$$

由多项式函数满足的四个条件, 可得四个方程构成的关于 a_0,a_1,a_2,a_3 的四元一次方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1a+a_2a^2+a_3a^3=f(a)\\ a_0+a_1b+a_2b^2+a_3b^3=f(b)\\ a_0+a_1\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+a_2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2+a_3\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\ a_1a+2a_2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+3a_3\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2=f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\end{cases}$$

由这个方程组, 即可计算得到

$$a_3=\frac{4}{(b-a)^3}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right]$$

即存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'''(\xi)=6a_3$, 即

$$f'''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right].$$

4.7 函数的凹凸性

定理 4.15

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

1. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；
2. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的. ♡

证明 先证情形 (1). 在 $[a,b]$ 上任取两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，记

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

由泰勒中值定理得:

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,\ \text{其中 } x_1<\xi_1<x_0,$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,\ \text{其中 } x_0<\xi_2<x_2.$$

由于

$$x_1-x_0=-(x_2-x_0),$$

所以

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}(x_1-x_0)^2,$$

由条件知 $f''(\xi_1)>0$, $f''(\xi_2)>0$, 从而有

$$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0),$$

即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的. 情形 (2) 的证明与上类似, 定理证完.

定义 4.2. 拐点[8]

一般地，设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0,f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点 ♣

例4.89 曲线 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ (　　).

(A) 有一个拐点　　(B) 有两个拐点　　(C) 有三个拐点　　(D) 无拐点

解 本题答案为 D.

$$y''=\frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}=\begin{cases}<0, & x<-1\\ >0, & x>-1\end{cases}$$

但 $x=-1$ 不满足拐点定义 (不连续).

4.8 渐近线

定义 4.3. 水平渐近线

曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 与直线 $y=c$ 的距离为 $|f(x)-c|$，当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$ 三种情况之一成立，直线 $y=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线 ♣

注意 一条曲线最多两条水平渐近线

定义 4.4. 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$），则直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线 ♣

注意 当 $x=c$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点时，$x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线

定义 4.5. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线 ♣

注意 有时需要分 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 加以讨论. 一条曲线最多两条斜渐近线

例4.90 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+x}-2x+2x\right)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-2x\ln 2\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln 2\right)\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+2x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]\\
=&\frac{1}{4}\ln 2+1
\end{aligned}$$

练习 4.31 求极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

证明

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\left[(x+a)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x+a}}\right]+\lim_{x\to+\infty}a(x+a)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x}-1\right]+a\\
&\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x+a}}\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x+a}\ln x\right]+a
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\frac{1}{x}\ln(x+a)-\frac{1}{x}\ln x\right)+\left(\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x+a}\ln x\right)\right]+a$$
$$\xlongequal{\ln(1+x)\sim x} \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{a}{x^2}+\frac{a\ln x}{x(x+a)}\right]+a=a$$

定义 4.6. 极坐标渐近线

对于以极坐标表示的曲线 $r=f(\theta)$，其渐近线为 $r\sin(\theta_0-\theta)=p$，其中 $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} f(\theta)=\infty$，$\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta_0-\theta)$.

例4.91 求极坐标系下的曲线 $r=\frac{1}{3\theta-\pi}$ 的斜渐近线

解 写成参数方程形式

$$r=\frac{1}{3\theta-\pi} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\cos\theta}{3\theta-\pi} \\ y=\dfrac{\sin\theta}{3\theta-\pi} \end{cases}$$

当且仅当 $\theta\to\frac{\pi}{3}$ 时，才有 $x\to\infty$. 所以曲线至多有一条斜渐近线，由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\sqrt{3}x)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{3\theta-\pi}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}=\frac{2}{3}$$

所以，有斜渐近线 $y=\sqrt{3}x+\frac{2}{3}$

4.9 曲率

定理 4.16. 曲率 (直角坐标系)

设 $y=f(x)$ 二次可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的曲率值

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

定理 4.17. 曲率 (参数方程)

设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 二阶可导，则 $K=\dfrac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

证明 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

故

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

例4.92 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 的曲率半径

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]\frac{1}{x'(t)}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

故摆线的曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}=a(1-\cos t)^2\left[1+\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{a(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{1-\cos t}=2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}$$

定理 4.18. 曲率 (极坐标系)

当曲线由极坐标形式 $r=f(\theta)$ 表示时, 则曲率为 $K=\dfrac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ♡

定理 4.19. 弧微分

$$y=f(x)\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$ ♡

4.10 方程的近似解

定理 4.20. Newton 迭代法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)<0, f(b)>0$, 且对任意 $x\in[a,b]$ 有 $f'(x)>0, f''(x)>0$. , 且数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,1,2,\cdots,\ x_0=b.$$

那么就有

1. 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内恰有一个根 ξ;
2. 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$.

♡

证明 [11] 1. 因为 $f(a)<0, f(b)>0$, 由连续函数的零点定理知, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$. 又 $f'(x)>0$, 因此方程的根唯一.

2. 由泰勒公式

$$f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{f''(\eta_n)}{2}(\xi-x_n)^2\quad \eta_n\text{ 在 }x_n\text{ 与 }\xi\text{ 之间}$$

又 $f(\xi)=0, f''(x)>0$, 于是

$$f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)=-\frac{f''(\eta_n)}{2}(\xi-x_n)^2<0$$

由此即得到

$$\xi<x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}_+$$

由递推公式得 $\forall f(x_n)>0$ 有 $x_{n+1}<x_n$ 成立. 由于初始值 $x_0=b$ 处有 $f(b)>0$, 而当 $x_n>\xi$ 时就有 $f(x_n)>0$, 因此, 数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列, 且以 ξ 为下界. 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$. 递推式两端取极限

$$A=A-\frac{f(A)}{f'(A)}\Longrightarrow f(A)=0$$

由于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中根唯一, 因此 $A=\xi$.

3. 现在用泰勒公式估计迭代误差

$$0 < x_{n+1} - \xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \xi = \frac{(x_n - \xi) f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= \frac{f''(\theta_n)(x_n - \xi)^2}{2f'(x_n)}$$

其中 $\theta_n \in (\xi, x_n)$. 利用 $f''(x)$ 连续且处处大于 0, 就有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \neq 0$$

因此 $\{x_n\}$ 二阶收敛于 ξ.

例4.93 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001

证明 由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2$ $(0 < \theta < 1)$. 令 $t = \frac{1}{x}$ 得

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2},$$

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \Longrightarrow x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$$

由此知 $x > 500, 0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$, 则有

$$|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$$

所以, $x = 501$ 是满足条件的解

第 5 章 不定积分

正确评估自己的能力, 手写题先上 Wolfram alpha

定义 5.1. 不定和式

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则定义 $f(x)$ 的不定和式为

$$\sum f(x) = F(x) + C.$$

5.1 不定积分的概念与性质

定理 5.1. 原函数存在定理

1. 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$.
2. 含有第一类间断点、无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

表 5.1: 部分初等函数积分表

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

定理 5.2. 积化和差和积化和差公式

积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

积化和差

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

结论 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间上不一定有界

例: $y = \sqrt{x}, x \in (0,1]$ 与 $y = 1 - \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$

练习 5.1 求不定积分 $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x)\sin 3x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \cos x \sin 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 3x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 2x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin 6x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C$$

注意

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

5.2 分段函数的不定积分

例5.1 求 $\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x$

解 由于

$$\max\{1,|x|\} = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

所以

$$\int \max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

由原函数的连续性，若记 $C_2 = C$，则 $C_1 = -\dfrac{1}{2} + C, C_3 = \dfrac{1}{2} + C$. 故

$$\int \max\{1,|x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} + C, & x < -1 \\ x + C, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} + C, & x > 1 \end{cases}$$

例5.2 求 $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} e^x + C_1, & x \geqslant 0 \\ -e^{-x} + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

由于函数满足连续，所以

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x + C_1) = \lim_{x\to 0^-}(-e^{-x} + C_2)$$

故

$$1 + C_1 = -1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = C_1 + 2$$

因此

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} e^x + C, & x \geqslant 0 \\ -e^{-x} + 2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

例5.3 计算不定积分 $\int [x]\,\mathrm{d}x$

解 由微积分基本定理，有

$$\begin{aligned}\int [x]\,\mathrm{d}x &= \int_0^x [t]\,\mathrm{d}t + C = \sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} k\,\mathrm{d}t + \int_{[x]}^x [t]\,\mathrm{d}t + C\\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} k + \int_{[x]}^x [x]\,\mathrm{d}t + C\\ &= \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x-[x]) + C\\ &= x[x] - \frac{[x]^2+[x]}{2} + C\end{aligned}$$

例5.4 计算 $\int \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x\ (x\geqslant 0)$，其中 $\lfloor x\rfloor$ 为取整函数

解 由 $\int \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x = \int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + C$，将区间内插入整数点，

$$\begin{aligned}\int \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + C\\ &= \int_0^1 \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \cdots\\ &\quad + \int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \lfloor x\rfloor|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x + C\\ &= 2 - \int_1^2 \sin \pi x\,\mathrm{d}x + 2\int_2^3 \sin \pi x\,\mathrm{d}x + \cdots +\\ &\quad (-1)^{\lfloor x\rfloor-1}(\lfloor x\rfloor-1)\int_{\lfloor x\rfloor-1}^{\lfloor x\rfloor} \sin \pi x\,\mathrm{d}x + (-1)^{\lfloor x\rfloor}\lfloor x\rfloor\int_{\lfloor x\rfloor}^x \sin \pi x\,\mathrm{d}x + C\\ &= \frac{1}{\pi}\cdot 2 + \frac{2}{\pi}\cdot 2 + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}(\lfloor x\rfloor-1)}{\pi}\cdot 2(-1)^{\lfloor x\rfloor}\\ &\quad + \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor+1}\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\cos \pi x - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\right) + C\\ &= \frac{\lfloor x\rfloor}{\pi}\left(\lfloor x\rfloor - (-1)^{\lfloor x\rfloor}\cos \pi x\right) + C\end{aligned}$$

5.3 换元积分法

5.3.1 凑微分

练习 5.2 求不定积分: $\int \dfrac{2^x\times 3^x}{9^x-4^x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x\times 3^x}{9^x-4^x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{2^x}{3^x}}{1-\left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)=\frac{2^x}{3^x}\ln\frac{2}{3}\,\mathrm{d}x} \frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\int \frac{1}{1-\left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2}d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)\\ &= \frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\int \frac{1}{\left(1-\frac{2^x}{3^x}\right)\left(1+\frac{2^x}{3^x}\right)}d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)\\ &= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}}\left[\int \frac{1}{1-\frac{2^x}{3^x}}d\left(\frac{2^x}{3^x}\right) - \int \frac{1}{1+\frac{2^x}{3^x}}d\left(\frac{2^x}{3^x}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}}\left(\ln\left|1-\frac{2^x}{3^x}\right| - \ln\left|1+\frac{2^x}{3^x}\right|\right) + c\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \ln\left|\frac{1-\frac{2^x}{3^x}}{1+\frac{2^x}{3^x}}\right| + c = \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}} \ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right| + c$$

例5.5 求不定积分: $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 注意到

$$\frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x}$$

故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{8\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{4\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|\sec x - \cot x| + C\end{aligned}$$

例5.6 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-a)-\left(\sqrt{x-a}\right)^2}}$$

$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

例5.7 计算积分 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}}{(1+\sqrt{x^2+1})\ln(1+\sqrt{x^2+1})} = \int \frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+\sqrt{x^2+1})} \\ &= \ln\left|\ln(1+\sqrt{x^2+1})\right| + C\end{aligned}$$

例5.8 求不定积分: $\int \frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)' = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{190}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^{188}x}{(\sin x+\cos x)^{188}}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{189}\frac{\sin^{189}x}{(\sin x+\cos x)^{189}} + C\end{aligned}$$

练习 5.3 求不定积分: $I = \int \frac{f'(x)+f(x)g'(x)}{f(x)\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\left(c+f(x)e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)}\left[f'(x)+f(x)g'(x)\right]$$

故

$$I = \int \frac{e^{g(x)}\left[f'(x)+f(x)g'(x)\right]}{f(x)e^{g(x)}\left[c+f(x)e^{g(x)}\right]}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}\left[c + f(x)e^{g(x)}\right]}{f(x)e^{g(x)}\left[c + f(x)e^{g(x)}\right]} \\
&= \frac{1}{c}\int \left[\frac{1}{f(x)e^{g(x)}} - \frac{1}{c + f(x)e^{g(x)}}\right] \mathrm{d}\left[c + f(x)e^{g(x)}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left\{\int \frac{\mathrm{d}\left[c + f(x)e^{g(x)}\right]}{f(x)e^{g(x)}} - \int \frac{\mathrm{d}\left[c + f(x)e^{g(x)}\right]}{c + f(x)e^{g(x)}}\right\} \\
&= \frac{1}{c}\left[\ln\left|f(x)e^{g(x)}\right| - \ln\left|c + f(x)e^{g(x)}\right|\right] + C
\end{aligned}
$$

例5.9 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(9 + (\sqrt{x-2})^2\right)\sqrt{x-2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}(\sqrt{x-2})}{9 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2} \\
&= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{3} + c
\end{aligned}
$$

例5.10 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{(\frac{1}{x}+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C
\end{aligned}
$$

练习 5.4 求不定积分: $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2-(x+1)+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \\
&= \ln(1+x) - \ln(2\sqrt{x^2+x+1} - x + 1) + C
\end{aligned}
$$

例5.11 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

解

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4(2x+1)-(2x+1)^2}} \\
&\xlongequal{t=\frac{1}{2x+1}} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4t-1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\sqrt{4t-1} + C
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3-2x}{2x+1}} + C$$

例5.12 求不定积分 $\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

可得

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right) - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^n}{n!}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!\int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right) - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!\int \mathrm{d}x - n!\int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\,\mathrm{d}x \\
&= n!x - n!\ln\left|1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right| + C
\end{aligned}$$

例5.13 求不定积分: $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 首先有

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\left(\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x}_{I} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x}_{J}$$

其中

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \\
I &= \int\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\int\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2 - 2\right]\mathrm{d}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = \frac{(5x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C
\end{aligned}$$

于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = I + J = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$$

练习 5.5 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

练习 **5.6** 求不定积分: $\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

例**5.14** 求不定积分 $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2+2}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^4-2x^2+3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2+\sqrt{3}}{x^4+3-2x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2-\sqrt{3}}{x^4+3-2x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}{x^2+\frac{3}{x^2}-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{x^2}}{x^2+\frac{3}{x^2}-2}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2+2\sqrt{3}-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2-2(\sqrt{3}+1)}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \cdots$$

练习 **5.7** 求不定积分: $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

解

$$I = \int \frac{x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x-\frac{1}{x})^2+2)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$J = \int \frac{-x^2+x^4}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x+\frac{1}{x})^2-2)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

表 5.2: 常用的基本初等函数的商的微分形式

$\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	$\frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$
$\frac{xe^x-e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{e^x}{x}\right)$	$\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)$
$\frac{1-x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x}{e^x}\right)$	$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\arcsin x}{e^x}\right)$
$\frac{\cos x-\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)$	$\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)$
$\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sin x}\right)$	$\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x\cdot\ln x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right)$
$\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)$	$\frac{\frac{\sin x}{1+x^2}-\arctan x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\arctan x}{\sin x}\right)$
$\frac{\arcsin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}dx=\mathrm{d}\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)$	$\frac{\frac{\arcsin x}{x}-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{\arcsin x}\right)$
$\frac{e^x\arcsin x-\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{e^x}{\arcsin x}\right)$	$\frac{\sec^2 x\cdot\arcsin x-\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\tan x}{\arcsin x}\right)$

例5.15 求不定积分 $\int\frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int\frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{1+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{1+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}$$

例5.16 求不定积分: $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{1-x^2})\\&=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1-x^2}|+C\end{aligned}$$

例5.17 计算积分: $\int\frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x$

解 (by 向禹)

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}\\&=-2\ln\left((x+2)e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}\right)\end{aligned}$$

练习 5.8 求不定积分: $\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(x\cos x-\sin x)}{x\cos x-\sin x}$$
$$= \ln\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right| + C$$

例5.18 求不定积分: $\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x\tan x)}{(1-x\tan x)^2}$$
$$= \frac{1}{1-x\tan x} + C = \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x} + C$$

练习 5.9 求不定积分 $\int \frac{\sin x - x\cos x}{x(x-\sin x)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{\sin x - x\cos x}{x(x-\sin x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-(x-\sin x)+(x-x\cos x)}{x(x-\sin x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln\left|\frac{x-\sin x}{x}\right| + C$$

5.3.2 第二类换元法

例5.19 求不定积分: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^3(x-1)^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal[x=\frac{u^3+1}{u^3-1}]{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=u} \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}u = -\frac{3}{2}u + C$$
$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

例5.20 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ 傲娇小魔王

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{\sqrt[4]{a1+t^4}}{t}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1+t^4}}$$
$$\xlongequal{u^4=1+t^4} -\int \frac{\frac{1}{4}\cdot 4u^3(u^4-1)^{-\frac{3}{4}}}{u\sqrt[4]{u^4+1}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int \frac{u^2}{u^4-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{(u^2+1)-(1-u^2)}{u^4-1}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$
$$= -\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right| + C$$

例5.21 求不定积分: $\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{\tan x}=t} 2\int \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} d\left(t-\frac{1}{t}\right) - \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} d\left(t+\frac{1}{t}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x-1}{2\sqrt{\tan x}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right| + c$$

例5.22 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x (x>0)$.

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$. 从而有

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$$
$$= \frac{1}{t^2-1}\ln(1+t) - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\ln(t-1) - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{2(t+1)} + C$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2-1}\ln(1+t) + \frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2(t+1)} + C$$
$$= x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} + C$$
$$= x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x+x^2} + C.$$

例5.23 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数, 求积分 $\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x$

解 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$, 则

$$y = \frac{1}{t(1-t)},\quad \mathrm{d}x = \frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

故

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = 3t - 2\ln t + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + C$$

例5.24 设 $y=y(x)$ 是由方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所确定的隐函数, 求积分

$$\int \frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$$

解 令 $y=tx$, 代入所给的方程可得 $x=\sqrt{2}a\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$, 则

$$y=\sqrt{2}a\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}a\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

注意到 $x^2+y^2+a^2=a^2\dfrac{3-t^2}{1+t^2}$, 有

$$\int \frac{1}{y(x^2+y^2+a^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+C$$

练习 5.10 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x$

解 令 $\begin{cases}x-y=u\\ \dfrac{x}{y}=v\end{cases}$ 即 $u^2=v$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{uv}{v-1}=\dfrac{u^3}{u^2-1}\\ y=\dfrac{u}{v-1}=\dfrac{u}{u^2-1}\end{cases}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{u^4-3u^2}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u$

所以

$$\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x=\int\frac{u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u^2-1|+C=\frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1|+C$$

5.3.2.1 三角换元

例5.25 计算不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\,\mathrm{d}x$ (其中根号 $\sqrt{\ }$ 有 n 重)。

解 令 $x=2\cos t$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}&=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos t}}}\\&=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+2\cos(\tfrac{t}{2})}}=\cdots=2\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\end{aligned}$$

从而我能有

$$\begin{aligned}I&=-4\int\sin t\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{积化和差}}-2\int\left[\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}t\right)-\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}t\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\cos\left(\frac{2^n+1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{2^{n+1}}{2^n-1}\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C\end{aligned}$$

5.3.2.2 欧拉代换

例5.26 求不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x$

解 [1] 令 $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}=e^x+t$, 则 $t=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}-e^x$, $x=\ln\dfrac{t^2+1}{4-2t}$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,\mathrm{d}x&=\int(e^x+t)\,\mathrm{d}x=\int e^x\,\mathrm{d}x+\int t\,\mathrm{d}x\\&=e^x+\int t\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{2-t}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

[1] 欧拉代换

$$= e^x + \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1} - 1 + \frac{2}{2-t}\right) \mathrm{d}t$$
$$= e^x + t - 2\arctan t - 2\ln(2-t) + C$$

5.4 分部积分法

例5.27 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x^2+1}}$ 的递推公式 $I_n =$ _____

解 注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}$$
$$\overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + \int \frac{(n+1)\sqrt{x^2+1}}{x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + \int \frac{(n+1)(x^2+1)}{x^{n+2}\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}} + (n+1)I_n + (n+1)I_{n+2}$$

从而得到

$$I_n = -\frac{n-2}{n-1}I_{n-2} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}}$$

练习 5.11 求不定积分: $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{\overbrace{3/4 + (x+1/2)^2}^{x^2+x+1} - (x+1/2)^2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$$

例5.28 求不定积分 $\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-x^4+2x^4}{\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1-x^4} + \frac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C$$

例5.29 (18 数学) 求不定积分: $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \int \arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\sqrt{e^x-1}=t} \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{2}\int (t^2+1)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}\sqrt{e^x-1}(e^x+2) + C
\end{aligned}
$$

✍ 练习 5.12 求不定积分: $\displaystyle\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x &\xlongequal{t=\arctan x} \int \frac{t^2\sec^2 t}{(\tan t - t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2}{(\sin t - t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t - t\cos t}\right) \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} - \int \frac{1}{\sin t - t\cos t}\times\frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{\sin t(\sin t - t\cos t)} + \cot t + C \\
&= \frac{x\arctan x}{x-\arctan x} + C
\end{aligned}
$$

✍ 练习 5.13 求不定积分: $\displaystyle\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} - \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x+\frac{1}{x}} + C
\end{aligned}
$$

例5.30 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(1-x^4)+2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int x\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{-(-4x^3)}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x^4}{1-x^4}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C
\end{aligned}
$$

例5.31 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^x(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{e^{x\ln x}(\cot x + \ln x\cdot\ln\sin x)}{e^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \ln x\cdot\ln\sin x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x(\ln x-1)}\,\mathrm{d}\ln\sin x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x - \int \ln\sin x\,\mathrm{d}e^{x(\ln x-1)}x + \int e^{x(\ln x-1)}\ln x\cdot\ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= e^{x(\ln x-1)}\ln\sin x + C
\end{aligned}$$

练习 5.14 求不定积分: $\displaystyle\int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x\sin+\cos x}) = x\cos x e^{x\sin+\cos x}$$

以及

$$\int \frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x\cos x}$$

故

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int e^{x\sin+\cos x}x^2\cos x\,\mathrm{d}x + \int e^{x\sin+\cos x}\left(\frac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}\left(e^{x\sin+\cos x}\right) + \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x\cos x}\right) \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \int e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{x\cos x}e^{x\sin+\cos x} + \int \frac{1}{x\cos x}x\cos x e^{x\sin+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= xe^{x\sin+\cos x} - \frac{e^{x\sin+\cos x}}{x\cos x} + C
\end{aligned}$$

令 $u = \tan\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$, 则 $x = 2\arctan u$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}$$

5.5 有理分式

例5.32 求 $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1} - x^3 + 1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$ 的最简分式.

解 (by 布布)[2]

$$\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$\xlongequal{\text{有理化}} \frac{\left[(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1\right](\sqrt{x^2+x+1}-x)}{x+1}$$

$$\xlongequal{\text{化简}} \frac{2x^4+x^3+2x^2+1-x+x^4}{x+1}+\frac{(1-x^3)\sqrt{x^2+x+1}-x(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$\xlongequal{\text{有理化}} \frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1}-\frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\left(2x^3-x^2+3x-3\right)+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

例5.33 求 $f(x)=\dfrac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ 的最简分式

解 [4] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \tag{5.1}$$

关键是求 A,B,C.

法 1(比较系数)

$$\begin{aligned}x^2+x+5&=A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)\\&=(A+B+C)x^2+(-3A-B)x^2+(2A-2B-C)\end{aligned}$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B+C=1\,, \\ x & -3A-B=1\,, \\ x^0 & 2A-2B-C=5 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{6}, \\ B=-\frac{7}{2}, \\ C=\frac{11}{3} \end{cases}$$

(法 2) 我们有

$$x^2+x+5=A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1) \tag{5.2}$$

令 $x=-1$, 带入 (5.2) 得 $A=\dfrac{5}{6}$; 令 $x=1$, 带入 (5.2) 得 $B=-\dfrac{7}{2}$;

令 $x=2$, 带入 (5.2) 得 $C=\dfrac{11}{3}$.

(法 3) 式 (5.1) 两边同乘以 $(x+1)$ 得

$$\frac{x^2+x+5}{(x-1)(x-2)}=A+\frac{B}{x-1}(x+1)+\frac{C}{x-2}(x+1)$$

上式令 $x=-1$ 得到 $A=\dfrac{5}{6}$. 同法求 B,C

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x^2+x+5}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1}=\frac{5}{6}$$

$$B=\left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2)}\right|_{x=1}=-\frac{7}{2}$$

$$C=\left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)\cancel{(x-2)}}\right|_{x=2}=\frac{11}{3}$$

例5.34 求 $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{(x-1)(x^2+1)}$ 的最简分式

[2]菲赫金哥尔茨《微积分学教程 (第 2 卷)》P56

解 [4] 设

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

不难得到

$$A=\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=\left.\frac{x^2+5x}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}\right|_{x=1}=3$$

$$Bi+C=\lim_{x\to \mathrm{i}}(x^2+1)f(x)=\left.\frac{x^2+5x}{(x-1)\cancel{(x^2+1)}}\right|_{x=\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}+3$$

例5.35 求 $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ 的最简分式

解 [4] 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

设 x 为 x^2+x+1 的一个根.

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{2x^2+1}{\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}\right|_{x=-1}=3$$

$$Bx+C=\frac{2x^2+1}{(x+1)\cancel{(x^2+x+1)}}\overset{x^2=-x-1}{=\!=\!=}\frac{-2x-1}{x+1}$$

$$=\frac{-(2x+1)x}{(x+1)x}\overset{x^2=-x-1}{=\!=\!=}-(x+2)$$

例5.36 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^3(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3} \tag{5.3}$$

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^3}\right|_{x=-1}=3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B=\mathrm{Res}[f(x),-2]=\lim_{x\to -1}\frac{1}{2!}\lim_{x\to -2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(x-2)^3f(x)\right]=\left.\frac{3}{(x+1)^3}\right|_{x=-2}=-3$$

式 (5.5) 两边同乘以 $(x+2)^3$ 得

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{A(x+2)^3}{x+1}+B(x+2)^2+C(x+2)+D \tag{5.4}$$

令 $x=-2$, 得

$$D=\left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (5.6) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)+2B(x+2)+C$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}=(x+2)^3g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)=3(x+2)^2g(x)+(x+2)^3g'(x)$$

$$C=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^3f(x)\right)\right|_{x=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=\left.-\frac{3}{(x+1)^2}\right|_{x=-2}=-3$$

例5.37 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4} \tag{5.5}$$

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4}\right|_{x=-1}=3$$

由留数的定义知 B 为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的留数

$$B=\operatorname{Res}[f(x),-2]=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3!}\lim_{x\to -2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(x-2)^4f(x)\right]=\left.-\frac{3}{(x+1)^4}\right|_{x=-2}=-3$$

式 (5.5) 两边同乘以 $(x+2)^4$ 得

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{A(x+2)^4}{x+1}+B(x+2)^3+C(x+2)^2+D(x+2)+E \tag{5.6}$$

令 $x=-2$, 得

$$E=\left.\frac{x+4}{x+1}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (5.6) 两边同导得

$$-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)+3B(x+2)^2+2C(x+2)+D$$

可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 我们令 $\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}=(x+2)^3g(x)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A(x+2)^3}{x+1}\right)=3(x+2)^2g(x)+(x+2)^3g'(x)$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$, 同法可知 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\dfrac{A(x+2)^3}{x+1}\right)_{x=-2}=0$. 于是

$$D=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^4f(x)\right)\right|_{x=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=\left.-\frac{3}{(x+1)^2}\right|_{x=-2}=3$$

$$C=\left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((x+2)^4f(x)\right)\right|_{x=-2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)_{x=-2}=\left.\frac{3}{(x+1)^3}\right|_{x=-2}=3$$

例5.38 求 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 的最简分式

解 设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}+\frac{E}{(x+2)^4}$$

$$A=\lim_{x\to -1}(x+1)f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4}\right|_{x=-1}=3$$

在圆环 $0<|x+2|<+\infty$ 内将 $f(x)=\dfrac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}$ 展开为洛朗级数

$$f(x)=C_{-4}(x+2)^{-4}+C_{-3}(x+2)^{-3}+C_{-2}(x+2)^{-2}+C_{-1}(x+2)^{-1}+C_0$$

两边同乘 $(x+2)^4$, 得

$$(x+2)^4f(x)=C_{-4}+C_{-3}(x+2)+C_{-2}(x+2)^2+C_{-1}(x+2)^3+C_0(x+2)^4 \tag{5.7}$$

令 $x=-2$ 得

$$E=C_{-4}=\lim_{x\to -2}(x+2)^4f(x)=\left.\frac{x+4}{(x+2)^4(x+1)}\right|_{x=-2}=-2$$

式 (5.7) 两边求 1 阶导数, 得

$$D = C_{-3} = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x+2)^4 f(x)\right)\Big|_{x=-2} = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2} = -3$$

式 (5.7) 两边求 2 阶导数, 得

$$C = C_{-2} = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left((x+2)^4 f(x)\right)\Big|_{x=-2} = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2} = -3$$

式 (5.7) 两边求 3 阶导数, 得

$$B = C_{-1} = \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left((x+2)^4 f(x)\right)\Big|_{x=-2} = \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)\Big|_{x=-2} = -3$$

例5.39 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

解 [4] 设

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

设 x 为 x^2-x+1 的一个根.

$$A = \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) = \frac{1}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{3}$$

$$Bx+C = \frac{1}{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}} = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{x^2-x-2} \xlongequal{x^2-x=-1} \frac{1}{3}(2-x)$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

例5.40 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$

解

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2+\cos x)\sin x} &= \frac{A+B\cos x}{\sin x} + \frac{C\sin x}{2+\cos x}\\ &= \frac{(A+2B)\cos x + (2A + B\cos^2 x + C\sin^2 x)}{(2+\cos x)\sin x}\end{aligned}$$

比较系数, 得

$$\begin{aligned} &A+2B=0,\\ &2A+B\cos^2 x + C\sin^2 x = 1\end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A = 2/3,\\ B = C = -1/3\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} &= \int\left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cos x}{\sin x} + \frac{-\frac{1}{3}\sin x}{2+\cos x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\ln(\cot x + \csc x) - \frac{1}{3}\ln\sin x + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + C\end{aligned}$$

练习 5.15 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} \\
&= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(2-\sin x\cos x)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\sin x+\cos x}{(1+2\sin x\cos x)\left[1+(\cos x-\sin x)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\left[2-(\sin x-\cos x)^2\right]\left[1+(\sin x-\cos x)^2\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}v}{(2-v^2)(1+v^2)} = 2\int \frac{\frac{1}{3}(2-v)^2+\frac{1}{3}(1+v^2)}{(2-v^2)(1+v^2)} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}+\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2} \\
&= \frac{2}{3}\arctan v-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sin x-\cos x-\sqrt{2}}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}\right)+C
\end{aligned}$$

练习 5.16 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x^8+2x^4+1)-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^4+1)^2-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^4\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\
&= \frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)+C
\end{aligned}$$

练习 **5.17** 求不定积分

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}}{\frac{1}{t}}\times\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-t+t^2}\,d\frac{1}{t} \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{-1+2t}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \int \frac{1}{\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{备注 1} \\
&= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + \frac{1}{2}J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t+t^2}}\,\mathrm{d}t &\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u]{t=\frac{1}{u}} \int \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}}\times\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}\right| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{1-t+t^2}}{t} - \ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}\right| + c \\
&= \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|2-x+2\sqrt{x^2-x+1}\right| + \ln|x| + c
\end{aligned}$$

注：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$$

解

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} d\left(x^2-x+1\right) - J + K = 2\sqrt{x^2-x+1} - J + K$$

$$J = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x$$

$$\xrightarrow[\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t]{\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec t} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos t} + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t| + c$$

$$= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + c$$

$$K = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}} \times \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t = -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + c$$

$$= -\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right| - \ln|x| + c$$

所以

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right| + \ln|x| + c$$

定理 5.3. 奥斯特罗格拉茨基方法

有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x$$

其中 $Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots(x^n+\cdots)$, $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ 的系数可用待定系数法从 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 求出 ♡

例5.41 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

解

$$Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$$

$$Q_1(x)=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$$

$$Q_2(x)=(x-1)(x+1)x^2-1$$

设 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\dfrac{Dx+E}{x^2-1}$, 则

$$x=(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(A^2+Bx+C)(3x-1)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r}
x^4 & D=0,\\
x^3 & -A+D+E=0,\\
x^2 & A-2B-D+E=0,\\
x^1 & -2A-3C+B-D-E=1,\\
x^0 & -B+C-E=0.
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{cases}
A=-\frac{1}{8},\\
B=-\frac{1}{8},\\
C=-\frac{1}{4},\\
D=0,\\
E=-\frac{1}{8}
\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\\&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C\end{aligned}$$

例5.42 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解 设 $\dfrac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\left(\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$, 则

$$x^2+2=A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

比较系数, 得

$$\begin{array}{c|r}
x^3 & C=0,\\
x^2 & -A+C+D=1,\\
x^1 & -2B+C=0,\\
x^0 & A-B+D=2
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{cases}
A=1,\\
B=1,\\
C=0,\\
D=2
\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x+1}{x^2+x+1}+\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\ &= \frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

5.6 Risch 算法

例5.43 证明: $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不能表为初等函数

解 反证法: 设 $u(x)=\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 为初等函数, 则由刘维尔第三定理知:

$$u(x)=R(x)e^{g(x)}+C,$$

(其中 $R(x)$ 为 x 的有理函数, C 为常数, $f(x)\equiv 1, g(r)=-x^2$) 上式两边求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= R'(x)e^{-x^2}-2xe^{-x^2}R(x)\\ &= e^{-x^2}\left[R'(x)-2xR(x)\right]=e^{-x^2},\end{aligned}$$

所以

$$R'(x)-2xR(x)=1.$$

上式右端的 1 在有限平面上无极点, 所以 $R(x)$ 在有限平面无极点, 故 $R(x)$ 不是有理分式函数. 另一方面, $R(x)$ 也不是多项式函数. 否则, 若 $R(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则上式也是 $n+1$ 次多项式, 矛盾. 故 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 不是初等函数.

第 6 章 定积分

正确评估自己的能力, 手写题先上 Wolfram alpha

6.1 定积分的概念与性质

参考同济 7 的 p226

6.1.1 定积分的定义

定义 6.1. 定积分 $\varepsilon-\delta$

设有常数 I, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 δ, 使得对于区间 $[a,b]$ 的任何分法, 不论 ξ_i 在 $[x_{n-1},x_n]$ 中怎样选取, 只要 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}<\delta$, 总有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$$

成立, 那么称 I 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ♣

例6.1 Dirichlet 函数: $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$. 证明: $\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在

解 设

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=I$$

若取 ξ_i 为有理点: $D(\xi)=1$

$$\begin{aligned}\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i\\&=b-a\end{aligned}$$

若取 ξ_i 为无理点: $D(\xi)=0$

$$\int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

这样的数 I 不存在, Dirichlet 函数在任何区间上不可积。

例6.2 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上可积.

将 $[0,1]$ n 等分, 其分点为 $x_i=\dfrac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间 $\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$

长度为 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{1}{n}$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

例6.3 利用定义计算定积分 $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=e^x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $f(x)=e^x$ 在 $[0,1]$ 上可积.

将 $[0,1]$ n 等分, 其分点为 $x_i=\dfrac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间 $\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 长度为 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{1}{n}$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\\ &= e-1\end{aligned}$$

例6.4 利用定义计算定积分 $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

将 $[a,b]$ n 等分, 其分点为 $x_0=a, x_1=aq, x_2=aq^2,\cdots,x_n=aq^n=b, q=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,

小区间 $[aq^{i-1},aq^i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 长度为 $\Delta x_i=aq^{i-1}(q-1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,

取 $\xi_i=aq^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=aq^{n-1}(q-1)\sim\dfrac{b}{n}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$, 故

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{aq^{i-1}(q-1)}{aq^i} = \lim_{n\to\infty} n(1-q^{-1})\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

例6.5 计算积分: $\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$

证明 注意到方程 $x^{2n}-1=0$ 的根为

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k=1,2,\cdots,2n.$$

其中 $x_n=-1, x_{2n}=1, x_{2n-k}=\bar{x_k}$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} &= 1+x^2+\cdots+x^{2n-2}\\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\bar{x_k}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2+1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

令 $\dfrac{x^2+1}{-2x}=2$, 并取 $x=\sqrt{3}-2$. 得到

$$\begin{aligned} x^{2n}-1&=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(-4x-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\ &=(x^2-1)(-2x)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{(\sqrt{3}-2)^{2n}-1}{((\sqrt{3}-2)^2-1)(4-2\sqrt{3})^{n-1}}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\ln\frac{(\sqrt{3}-2)^{2n}-1}{(\sqrt{3}-2)^2-1}-\ln(4-2\sqrt{3})^{n-1}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(-(n-1)\ln(4-2\sqrt{3})\right)=-\pi\ln(4-2\sqrt{3})\\ &=\pi\ln\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}\end{aligned}$$

✍ **练习 6.1** 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$

解 考虑 $f(x)=x^p$ $(x\in[0,2])$. 将 $[0,2]$ n 等分, 分点为 $\dfrac{2i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$,

小区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{2}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{2i-1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{2}{n}$, 故

$$I=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^p=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i)^p\Delta x_i=\frac{1}{2}\int_0^2x^p\,\mathrm{d}x=\frac{2^p}{p+1}$$

✍ **练习 6.2** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\left(\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)$

解 法 1. 考虑 $f(x)=\sin(\pi x)$ $(x\in[0,1])$. 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $\dfrac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 小区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{1}{n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sin(\xi_i\pi)\Delta x_i=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

法 2. 考虑 $f(x)=\sin x$ $(x\in[0,\pi])$. 将 $[0,\pi]$ n 等分, 分点为 $\dfrac{i\pi}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$,

小区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{\pi}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}=\dfrac{\pi}{n}$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right)\\ &=\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sin(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

例6.6 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

解

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}$$

由幂级数展开式, 有 $2^{\frac{1}{n}}>1+\dfrac{\ln 2}{n}$, 由此可得

$$\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=2^{\frac{k-1}{n}}\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}\geqslant 2^{\frac{k-1}{n}}\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{nk}}>2^{\frac{k-1}{n}},\ k>1$$

所以

$$2^{\frac{k-1}{n}}<\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}<2^{\frac{k}{n}},\ \forall k>1$$

因此, 由连续函数的介值定理, 存在 $\xi_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$, 使得 $\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=2^{\xi_k}$, 因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\xi_k},\quad \xi_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

由定积分的定义, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\xi_k}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$$

例6.7 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\ (b>1)$.

解 考虑 $\sin x$ 在 $[1,b]$ 上按以下划分

$$1=b^{\frac{0}{n}}<b^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{2}{n}}<\cdots<b^{\frac{n}{n}}=b$$

所做的积分和, 其中 $\Delta_i=b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}$ 为小区间 $\left[b^{\frac{i}{n}},b^{\frac{i+1}{n}}\right]$ 的长度, 最大区间长度

$$\lambda=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{\Delta_i\}\leqslant b(b^{\frac{1}{n}}-1)\to 0,$$

又 $\xi_i=b^{\frac{2i+1}{2n}}$ 为小区间两端点的比例中项, 因此

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\overbrace{b^{\frac{2i+1}{2n}}}^{\xi_i}\overbrace{\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right)}^{\Delta x_i}\\&=\int_1^b\sin x\,\mathrm{d}x=\cos 1-\cos b\end{aligned}$$

例6.8 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

解

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2$$

练习 6.3 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2}$

解 取对数, 我们有

$$\ln\left(\frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2}\right)=\sum_{i=1}^{2n}\frac{\ln(n^2+i^2)}{n}-\ln n^4$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\ln n^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) - \ln n^4$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

从而可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}\sqrt[n]{n^2+i^2} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}\right)$$
$$= \exp\left(\int_0^2 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\right) = 25e^{2\arctan 2-4}$$

✍ 练习 6.4 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}}$ $(\alpha,\beta\neq -1)$

解

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}} \quad (\alpha,\beta\neq -1)$$
$$= 2^{\alpha-\beta}\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]\right\}^{\alpha+1}}$$
$$= 2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\int_0^2 x^\alpha\,\mathrm{d}x\right\}^{\beta+1}}{\left\{\int_0^2 x^\beta\,\mathrm{d}x\right\}^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^2\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}\Big|_0^2\right\}^{\alpha+1}}$$
$$= 2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

✍ 练习 6.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$

解 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}+\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1^2}{n}}$$
$$= \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+0+0 = \frac{\pi}{4}$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\dfrac{\pi}{4}$

练习 6.6 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+k}-\frac{k}{n+k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n+3}-\cdots+\frac{n}{n+n}-\frac{n}{n+n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k}\right)-\frac{n}{n+n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}-\frac{1}{2}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\\&=\ln 2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例6.9 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\dfrac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\dfrac{n\theta}{n\sqrt{n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

证明 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\ln\left(\cos\frac{\theta}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2\theta}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{n\theta}{n\sqrt{n}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\cos\frac{k\theta}{n\sqrt{n}}-1\right)\right)\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln\lim_{n\to\infty}a_n&=\ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2\theta^2}{2n^3}-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=-\ln\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\theta^2}{2n^3}+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^4\theta^4}{12n^6}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x+0=-\frac{\theta^2}{6}\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{\theta^2}{6}}$

例6.10 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$ 的通解

解 (by ytdwdw) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. 当 $x\in(0,\delta)$ 时, 成立 $\left|\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right|<\varepsilon$, 即 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$. 因此, 当 $n>\dfrac{1}{\delta}$ 时, 由于

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)-\frac{k^2}{n^3}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)-\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

从而原极限为 $e^{\frac{1}{2}}$.

注意 用上极限只是为了叙述简便. 本题中 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$ 不宜换成 $\ln(1+x)=x+o(x)$

练习 6.7 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}$

解 取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\left(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}\right)&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\ln i-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln n-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{n^2+n}{2n^2}\ln n-\frac{1}{2}\ln n\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{\ln n}{2n}\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n}}&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}+\frac{\ln n}{2n}\right)\right)\\&=\exp\left(\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x\right)=e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

例6.11 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]$

解 (by 欧阳) 由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\ln k-\ln^2 n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)^2\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\\&=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)^2=1\end{aligned}$$

或者可以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\right)^2\right]\\&\xlongequal{\text{将平方展开}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \ln^2 x \,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

例6.12 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{i+j}{i^2+j^2}$

解 [[12]]

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{i^2+j^2} &\overset{\text{Stolz}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{i+j}{i^2+j^2} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{i^2+j^2} \right) \\
&= 2\left(\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1^2} + \frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+2^2} + \cdots + \frac{(n+1)+n}{(n+1)^2+n^2} \right) + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{n+1} \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2} + \frac{1+\frac{2}{n+1}}{1+\left(\frac{2}{n+1}\right)^2} + \cdots + \frac{1+\frac{n}{n+1}}{1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \right) + \frac{1}{n+1} \\
&= 2\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \ln 2
\end{aligned}$$

例6.13 求极限: $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} \left[2 + \frac{1}{k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]}{2^n+1}$.

证明 法 1 (定积分).

$$\begin{aligned}
I &= \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left[2 + \frac{1}{k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right] - \ln(2^n+1) \\
&= \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \exp \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \exp \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{n} \,\mathrm{d}x = \exp \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \exp \frac{\pi^2}{48}
\end{aligned}$$

法 2.

$$\begin{aligned}
I &= \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left[2 + \frac{1}{k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right] - \ln(2^n+1) = \exp \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \\
&= \exp \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} k^{2i}}{i n^{2i}} = \exp \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} k^{2i-1}}{i n^{2i}} \\
&= \exp \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2} = \exp \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \exp \frac{\pi^2}{48}
\end{aligned}$$

例6.14 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sin \frac{k}{n}\pi} = \dfrac{2n}{\pi}\left(\ln 2n + \gamma - \ln \pi\right) + O(1)$.

证明 我们有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k}{n}\pi} = \frac{2n}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin \frac{k}{n}\pi} - \frac{1}{\frac{k}{n}\pi} - \frac{1}{\frac{(n-k)}{n}\pi} \right) \frac{1}{n}$$

由定积分定义, 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin \frac{k}{n}\pi} - \frac{1}{\frac{k}{n}\pi} - \frac{1}{\frac{(n-k)}{n}\pi} \right) \frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right) \mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

由此式, 并利用

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

就可以得到

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi} = \frac{2n}{\pi}\left(\ln 2n + \gamma - \ln\pi\right) + O(1)$$

例6.15 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}}\right)^n = \exp\dfrac{\sin 1}{1-\cos 1}$

解 法 I.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{2}{2n}+\sin\frac{4}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n}{2n}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{2n}+\sin\frac{3}{2n}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2n}\right)}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x + \dfrac{\sin 1+\sin 0}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x + \dfrac{\cos 0-\cos 1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)^n = \exp\frac{\sin 1}{1-\cos 1}$$

法 II(by 西西). 由积化和差公式得

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{2n}\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{2k+1}{2n}-\cos\frac{2k-1}{2n}\right)}{\sin\frac{1}{2n}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\cos\frac{1}{2n}\right]}{\sin\frac{1}{2n}}$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos 1-1)}{\sin\frac{1}{2n}}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\cos\frac{1}{2n}}{\cos 1-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{\sin\frac{1}{2}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{2n}+\sin\frac{1}{2n}\cot\frac{1}{2}-1\right)\right]^n = \exp\left[\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\cos\frac{1}{2n}+\sin\frac{1}{2n}\cot\frac{1}{2}-1\right)\right)]$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}\cot\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}}-\frac{1-\cos\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}\right)\right] = e^{\frac{\cot\frac{1}{2}}{2}}$$

法 III(欧拉公式).

例6.16 计算极限 $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

证明 因为 $\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$, 所以部分和

$$\begin{aligned}
S_{m,n}&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\\
&=-\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{-1}^{0}x^{i+1-1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^{i+2-1}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\left(x^{i}+x^{i+1}+\cdots+x^{i+n-1}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}(1-x^{n})}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}-x^{i+n}}{1-x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-1}^{0}\frac{(x^{1}-x^{1+n})+(x^{2}-x^{2+n})+\cdots+(x^{m}-x^{m+n})}{1-x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-1}^{0}\frac{x^{1}+x^{2}+\cdots+x^{m}}{1-x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+m}}{1-x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-1}^{0}\frac{x-x^{m+1}}{(1-x)^{2}}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}-x^{n+m+1}}{(1-x)^{2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

下面证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-1}^{0}\dfrac{x^{t}}{(1-x)^{2}}\,\mathrm{d}x=0$, 事实上, 因为 $x\in[-1,0]$, 所以 $(1-x)^{2}\geqslant 10$,

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{2}}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{0}x^{t}\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{t+2}}{t+1}\to 0$$

当 $t\to+\infty$ 时, 于是

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}S_{m,n}=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^{2}}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

例6.17 计算极限 $\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k}$

解 法 I(by 西西). 先证明如下引理

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{p}}\,\mathrm{d}x\right|=0\left(p\in\mathbb{N}^{+}\right)$$

事实上

$$\left|\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{p}}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_{-1}^{0}|x|^{t}\,\mathrm{d}x\to 0(t\to\infty)$$

故

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k}=-\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j+k-1}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-1}^{0}\sum_{i=1}^{n}x^{j-1}\sum_{j=1}^{m}x^{j}\sum_{k=1}^{l}x^{k}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1}^{0}\frac{x^{2}}{(1-x)^{3}}\left(1-x^{l}\right)(1-x^{m})(1-x^{n})\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-1}^{0}\frac{x^{2}}{(1-x)^{3}}\,\mathrm{d}x+I
\end{aligned}$$

其中 I 与引理中的积分类似, 从而

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j+k}}{i+j+k}=-\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{8}-\ln 2$$

法 II(by 西西).

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}(-1)^{i+j+k}e^{-(i+j+k)x}\,\mathrm{d}x\\
&=\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i e^{-ix}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j e^{-jx}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-e^{-x})^i\right)\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(-e^{-x})^j\right)\left(\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l}(-e^{-x})^k\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)^3\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{t^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{8}-\ln 2
\end{aligned}$$

例6.18 求极限: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}$

引理 6.1

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\frac{2n^2+1}{3}$$

♡

证明 方法 1 利用三角恒等式

$$\begin{aligned}
\sin 2nx&=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^{k-1}\cos^{2n+1-2k}x\sin^{2k}x\\
&=\sin^{2n}x\cot x\left(2n\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots\right)
\end{aligned}$$

若令 $\sin 2nx=0$, 则 $2nx=k\pi$, $x=\dfrac{k\pi}{2n}$. 右边即可得

$$\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0.$$

方程 $\binom{2n}{1}\cot^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cot^{2n-4}x+\cdots=0$ 的所有根为

$$t=\cot^2\frac{k\pi}{2n},\ k=1,\cdots,n-1$$

那么由韦达定理可得 $\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\dfrac{k\pi}{2n}=\dfrac{\binom{2n}{3}}{2n}=\dfrac{(2n-1)(n-1)}{3}$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\csc^2\frac{k\pi}{2n}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{(2n-1)(n-1)}{3}+n=\frac{2n^2+1}{3}.$$

方法 2　利用有理分式展开 $\csc^2 x=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(x+m\pi)^2}$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\csc^2\frac{k\pi}{2n}&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{n}+m\pi\right)^2}=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+nm)^2}\\&=\frac{n^2}{\pi^2}\sum_{\substack{m=-\infty\\ n\mid m}}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{2n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

在这个求和式子中, 对固定的 m,k 从 1 到 $n-1$ 求和, 则 $k+nm$ 刚好不包含被 n 整除的数. 由此可得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\cot^2\frac{k\pi}{2n}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4n^2-1}{3}+1\right)=\frac{2n^2+1}{3}.$$

解 (by 向禹) 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{2n^2+1}{3}=\frac{2}{3}$$

例6.19 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\cos(1)|+|\cos(2)|+\cdots+|\cos(n)|}{n}=\dfrac{2}{\pi}$

解 法 I. 令 $f(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$. 当 $x\in[n\pi,(n+1)\pi)$ 时,

$$2n=\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t\le f(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2(n+1).$$

由此得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{f(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|\cos k|$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos k|=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

法 II. 取 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}|\cos(k+x)|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|\cos(k+x)|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n}|\cos(k+x)|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}|\cos(s+m+x)|=f(x+m).\end{aligned}$$

又

$$f(x+2\pi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos(k+x+2\pi)|=f(x).$$

所以

$$f(x)=f(x+m)=f(x+2\pi).\tag{6.1}$$

对于 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|$, 其中 $\dfrac{1}{n}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $|\cos(k+x)|$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致有界, 由 Dirichlet 判别法可知: 函数 $f(x)$ 一致收敛. 同时(6.1)式说明周期可为任意整数, 又可为 2π, 那么必为常数函数, $f(x)\equiv C$. 所以

$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos k|=\int_0^1 f(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}|\cos(k+x)|dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1|\cos(k+x)|dx\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|\cos t|dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^{n+1}|\cos t|dt=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

法 III(by ytdwdw).

引理 6.2

设 $f(x)$ 以 1 为周期, 在 $[0,1]$ 可积, 若 z 为无理数, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(kz)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

♡

证明

(i) 对 $f(x)=C,\cos 2mx,\sin 2mx$ 成立.

(ii) 利用 Weierstrass 第二逼近定理可推广到 $f(x)$ 为连续函数的情形.

(iii) 当 f 限制在 $[0,1]$ 上为 $\chi_{[a,b]}(x)$ $(0<a<b<1)$ 时. 任取 $\varepsilon\in(0,\min(a,1-b,\frac{b-a}{2}))$,

定义 $F_\varepsilon(x)$ 如下: 在 $[0,a-\varepsilon]\cup[b+\varepsilon,1]$ 上为零, 在 $[a,b]$ 上为 1, 在 $[a-\varepsilon,a]$ 和 $[b,b+\varepsilon]$ 上用直线段连接, 使之连续.

定义 $G_\varepsilon(x)$ 如下: 在 $[0,a]\cup[b,1]$ 上为零, 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上为 1, 在 $[a,a+\varepsilon]$ 和 $[b-\varepsilon,b]$ 上用直线段连接, 使之连续.

则

$$\int_0^1 G_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(kz)\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(kz)\leqslant\int_0^1 F_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得对这样的 $f(x)$ 成立

进而对所有按段常值函数成立.

(iv) 最后证明对可积函数成立.

取 $f(x)=|\cos\pi x|, z=\dfrac{1}{\pi}$, 即得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos k|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(kz)=\int_0^1|\cos\pi x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

法 IV. 构建 $|\cos k|\,(k\in\mathbb{N}^+)$ 在 $|\cos x|$ 上的随机分布, 则 $|\cos k|$ 的均值为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\cos k|=E(|\cos k|)=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\,\mathrm{d}x}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

✍ **练习 6.8** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+2!+3!+\cdots+n!}}{n}$

解 由于

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{1+2!+3!+\cdots+n!}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n\times n!}}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\right\}=\exp\left(\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n\times n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

所以由夹逼准则知所求极限为 $\dfrac{1}{e}$

✍ **练习 6.9** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$

解 由于

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

所以由夹逼准则知所求极限为 $\dfrac{2}{\pi}$

✍ **练习 6.10** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1\cdot2}}{n^2+1}+\dfrac{\sqrt{2\cdot3}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right)$

解 由于

$$\frac{i}{n^2+n}\leqslant\frac{\sqrt{i\cdot(i+1)}}{n^2+i}\leqslant\frac{i+1}{n^2+1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=1\times\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=1\times\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2\cdot3}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$$

✍ **练习 6.11** 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数, 且 $f(x)\geqslant0$. 证明

$$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\leqslant f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

解 一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)&=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}f(n)=f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(n)\,\mathrm{d}x\\&<f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)+\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(n)\,\mathrm{d}x>\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

✍ **练习 6.12** 求 $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

解 一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=2}^{100} n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^{n} n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &< 1 + \sum_{n=2}^{100} \int_{n-1}^{n} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 19\end{aligned}$$

或者

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} < \int_1^{101} \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{100.5} - \sqrt{2} \approx 18.636$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=1}^{100} \int_n^{n+1} n^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &> \sum_{n=1}^{100} \int_n^{n+1} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{101} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{101} - 1\right) \approx 18.1\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 18.

✍ **练习 6.13** 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{n}{n^2+k^2}$

解 法 1. 一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{k-1}^{k} \frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{k-1}^{k} \frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{n^2} \frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{k}^{k+1} \frac{n}{n^2+k^2}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{k}^{k+1} \frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{n^2+1} \frac{n}{n^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2}$$

法 2. 设

$$\mathrm{S}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

因

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} < \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{dx}{1+x^2}$$

则

$$\int_{\frac{n^2+1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < \mathrm{S}_n < \int_0^n \frac{dx}{1+x^2}$$

当 $n\to\infty$ 时，该不等式左右两端的极限都趋于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

由夹逼准则可知原极限为 $\frac{\pi}{2}$

练习 6.14 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{n^2+1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(n-1)^2+1}{n^2}}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\xi_i)^2}\Delta x_i,\quad \xi_i=\frac{(n-1)^2+1}{n^2},\Delta x_i=\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

例6.20 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\sin\frac{1}{n+k}$.

解 (by 楚坛) 当 $n\to\infty$ 时，对 $\forall k=1,\cdots,n$，$\frac{1}{n+k}\to 0$. 利用不等式 $x-\sin x\leqslant\frac{1}{6}x^3$(当 $x\geqslant 0$ 时) 知

$$\left|\sin\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k}\right|\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+k}\right)^3\leqslant\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}. \tag{6.2}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\sin\frac{1}{n+k}\\ =&\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\left(\sin\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k}\right)\\ \triangleq& A_n+B_n.\end{aligned}$$

进而由(6.2)知

$$\begin{aligned}|B_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{6}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{n^2}\to 0.\quad (\text{当}n\to\infty)\end{aligned}$$

故原极限等于

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{n+k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\arctan\frac{k}{n})\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\
&= \int_0^1 (1+\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\\
&= (1+\frac{\pi}{8})\ln 2.
\end{aligned}
$$

例6.21 设 $f(x)=|\sin x|$, 记 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

解 对 $\forall x>0$, 总存在 n 使 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 那么则有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}} &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n\pi)^{m+1}}\\
&= \frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} t^n|\sin t|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{1}{\pi^{m+1}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^m\pi^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由周期性易得

$$
\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}} &\leqslant \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^m\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{m+1}
\end{aligned}
$$

左侧同理亦可得出

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}\geqslant\frac{2\pi}{m+1}
$$

由夹逼准则得

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^m f(t)\,\mathrm{d}t}{x^{m+1}}=\frac{2\pi}{m+1}
$$

例6.22 求极限

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x \sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t}{x}
$$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x \sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t}{x} &\xlongequal{k\pi\leqslant t<(k+1)\pi} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^n t\cos^n t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\sin^n 2t\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{u=2t}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin u}{2}\right)^n\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

例6.23 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}})^n}$

解 注意到

$$1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}=\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}k^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x}^{k^{\frac{1}{n}}>x^{\frac{1}{n}}}>\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x=\int_0^n x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x=\frac{n\cdot n^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}$$

$$1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}<\int_1^{n+1}x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x=\frac{n[(n+1)^{\frac{1}{n}+1}-1]}{n+1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(\frac{n\cdot n^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(\frac{n[(n+1)^{\frac{1}{n}+1}-1]}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)^n}{\left[(n+1)^{\frac{1}{n}+1}-1\right]}$$

$$=\left\{\exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{(n+1)^{\frac{1}{n}+1}}\right)\right]\right\}^{-1}=e$$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}})^n}=e$

练习 6.15 求极限: $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}+\dfrac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}}-\ln n\right]$

解 由于

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}+\frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}}-\ln n\geqslant\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n+1}-\ln n$$

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}+\frac{\ln(n+2)}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\ln(n+n)}{n+\frac{1}{n}}-\ln n\leqslant\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n}-\ln n$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n}-\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n+n\ln n}{n}-\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n)}{n+1}-\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n+n\ln n}{n+1}-\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]-\frac{\ln n}{1+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+n}$$

$$=1\times\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x+0=2\ln 2-1$$

所以由夹逼准则知所求极限是 $\dfrac{2}{\pi}$

例6.24 (2018 北大数分) 在 $[1,+\infty)$ 上, $f(x)>0$, $f''(x)\leqslant 0$, $f(+\infty)=+\infty$, 证明以下计算存在并求之

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}$$

解 Since $f(x)>0$, $f''(x)\leqslant 0$, and $f(+\infty)=+\infty$, it is not hard to see $f'(x)>0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{f^s(2n)}-\frac{1}{f^s(2n+1)}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(\xi_n),$$

where $g_s(x)=\left(\dfrac{1}{f^s(x)}\right)'=-\dfrac{sf'(x)}{f^{s+1}(x)}$ and $\xi\in(2n,2n+1)$. Since

$$g_s'(x)=s\cdot\frac{(s+1)f'^2(x)-f''(x)f(x)}{f^{s+2}(x)}>0,$$

we can get

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(\xi_n)\leqslant-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(2n)&\leqslant-g_s(0)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n-2}^{2n}g_s(x)\,\mathrm{d}x\\&=-g_s(0)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}g_s(x)\,\mathrm{d}x=-g_s(0)+\frac{1}{2f^s(0)}\to\frac{1}{2}\end{aligned}$$

se $s\to 0^+$, Similarly, we have

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(\xi_n)\geqslant-\sum_{n=1}^{\infty}g_s(2n+1)&\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n+1}^{2n+3}g_s(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}g_s(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2f^s(0)}\to\frac{1}{2}\end{aligned}$$

as $s\to 0^+$.

练习 6.16 求极限: $\displaystyle\int_0^n[x]\,\mathrm{d}x$

解

$$\int_0^n[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

练习 6.17 求极限: $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$

解 法 1. 一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}&=\sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+k}\\&<\sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\to\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n\pi]}+\frac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\frac{1}{4n}&=\sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\frac{1}{[n\pi]+k}\\&>\sum_{k=0}^{4n-[n\pi]}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{4n-[n\pi]+1}\frac{1}{[n\pi]+x}\,\mathrm{d}x\to\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{[n\pi]}+\dfrac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\dfrac{1}{4n}\right)=\ln\dfrac{4}{\pi}$

法 2. 显然

$$n\pi-1<[n\pi]\leqslant n\pi$$

故有

$$\frac{1}{n\pi-1}+\frac{1}{n\pi}+\cdots+\frac{1}{4n-1}<I\leqslant\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi+1}+\cdots+\frac{1}{4n}$$

其中

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi+1}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{n\pi+i}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(4-\pi)n}\frac{1}{\pi+\frac{i}{n}}=\int_0^{4-\pi}\frac{1}{\pi+x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi-1}+\frac{1}{n\pi}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{n\pi+i}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(4-\pi)n}\frac{1}{\pi+\frac{i}{n}}=\int_0^{4-\pi}\frac{1}{\pi+x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{[n\pi]}+\dfrac{1}{[n\pi+1]}+\cdots+\dfrac{1}{4n}\right)=\ln\dfrac{4}{\pi}$

✍ **练习 6.18** 求积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x$

解 当 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x&=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\left[\frac{x}{\pi}\right]}{x^3}\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{i}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2\pi^2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

其中：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

✍ **练习 6.19** 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t$

解 当 $n\leqslant t\leqslant n+1$ 时

$$\begin{aligned}&\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\int_0^n(t-[t])^2\,\mathrm{d}t+\int_n^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}(t-[t])^2\,\mathrm{d}t+\int_n^x(t-n)^2\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}(t-i)^2\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}(n-x)^3=\frac{1}{3}\left[n+(x-n)^3\right]\end{aligned}$$

所以

$$\frac{n}{3(n+1)}\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{n+1}{3n},n=1,2\cdots$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n}=\dfrac{1}{3}$, 并且当 $n\to\infty$ 时有 $x\to\infty$, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$$

例6.25 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

解 (by 冬眠的小老鼠)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}&\xlongequal{n^2\to n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{\frac{k-1}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{\frac{k-1}{n}}}\\&=\int_0^1\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

练习 6.20 求极限

$$\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$$

解 当 $n\leqslant\dfrac{2}{x}<n+1$ 即 $\dfrac{1}{2(n+1)}<x\leqslant\dfrac{1}{2n}$ 时, $\left[\dfrac{2}{x}\right]=n$;

同样的, 当 $n\leqslant\dfrac{1}{x}<n+1$ 即 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时, $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$;

由于

$$\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n+1}\right]\bigcup\left(\frac{2}{2n+1},\frac{2}{2n}\right]$$

当 $\dfrac{2}{2n+2}<x\leqslant\dfrac{2}{2n+1}$ 时, $\left[\dfrac{2}{x}\right]=2n+1$, $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$, 此时有

$$\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=(2n+1)-2n=1$$

当 $\dfrac{2}{2n+1}<x\leqslant\dfrac{2}{2n}$ 时, $\left[\dfrac{2}{x}\right]=2n$, $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$ 此时有

$$\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=2n-2n=0$$

因此,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+2}}^{\frac{2}{2n+1}}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2}{2n}}0\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}\right)\\&=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$= 2\left(-\ln 2 + 1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \ln 4 - 1 = 2\ln 2 - 1$$

例6.26 设多项式

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,\ a_m \geqslant 0$$

设 $P(1), P(2), \cdots, P(n)$ 的算术均值和几何均值记作 A_n , G_n 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{G_n}$

解 为了方便, 我们记作

$$S_{n,k} = 1 + 2^k + \cdots + n^k$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n,k}}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$$

那么有

$$A_n = \frac{P(1)+P(2)+\cdots+P(n)}{n} = a_m\frac{S_{n,k}}{n} + a_{m-1}\frac{S_{n-1,k}}{n} + \cdots + a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^m} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{m+1}$$

其次注意 $\dfrac{P_n}{n^m} = a_m$, 故

$$\ln G = \frac{\ln P(1) + \ln P(2) + \cdots + \ln P(n)}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\ln\frac{G_n}{(n!)^{\frac{m}{n}}} = \ln a_m$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^m\cdot\frac{1}{m+1} = \frac{e^m}{m+1}$$

例6.27 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n=1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n} - \frac{2}{\pi}n\right) = \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{2\ln\pi - \ln 4}{\pi}$$

解 (by tian_275461) 记

$$I = \frac{\ln n}{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\ln n} - \frac{2}{\pi}n\right) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) - 2\ln n$$

只要证

$$\lim_{n\to\infty} I = 2\gamma - 2\ln\pi + \ln 4$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}(2\gamma - I) = 2\ln\pi - \ln 4$$

记 $S = 2\gamma - I$, 我们有

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n + c_n \quad \text{其中} c_n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$S = 2\sum_{k=1}^{n-1} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 2c_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)+2c_n$$
$$= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{\pi-\frac{k\pi}{n}}\right)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\left(\frac{k\pi}{n}\right)+2c_n$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty} S=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

故只要证

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=2\ln\pi-\ln 4$$

而

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

第二部分用替换 $y=\pi-x$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

注意到

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

对 n 分奇偶性讨论

(1) $n=2m-1\,(m=1,2,\cdots)$ 时

$$(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left(\frac{(4m-1)(4m-3)}{(4m-2)^2}\right)$$

(2) $n=2m\,(m=1,2,\cdots)$ 时

$$(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left(\frac{(4m)^2}{(4m+1)(4m-1)}\right)$$

而

$$\sum_{m=1}^{k}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\ln\left[\frac{1}{4k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\right]\to\ln\frac{\pi}{4}\quad(\text{用 Wallis 公式})$$

马上得到

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=2\ln\pi-\ln 4$$

6.1.1.1 分段估计 (拟合法)

例6.28 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

解 $\forall \varepsilon>0(\varepsilon>1)$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_0^{\delta}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x<\int_0^{\delta}\mathrm{d}x=\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta^2)^n=0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n>N$, 有 $(1-\delta^2)^n<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 因而

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x&<\int_{\delta}^{1}(1-\delta^2)^n\,\mathrm{d}x\\&=(1-\delta^2)^n(1-\delta)<(1-\delta^2)^n<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x<\int_0^{\delta}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\varepsilon.$$

例6.29 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$

证明 $\forall\,\varepsilon>0\,(\varepsilon<\pi)$, 因

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=0$, 所以 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时

$$0<\frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由极限的定义即得原式成立

例6.30 (北大,2018) 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1\dfrac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$

解 任取 $\varepsilon\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}0<\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\\&<\varepsilon+\int_{\varepsilon}^1\frac{\sin^n\varepsilon}{\varepsilon^n}\,\mathrm{d}x=\varepsilon+\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n(1-\varepsilon)\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n=0$, 故存在 $N>0$, 使得对任意 $n>N$, 恒有 $\left(\dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n<\varepsilon$, 故

$$0<\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x<\varepsilon+\varepsilon(1-\varepsilon)<2\varepsilon,$$

故对任意 $n\in\mathbb{N}^+$

$$n\int_0^1\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\geqslant n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x>n\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin^n(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^n}=\sqrt{n}\left(\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}n\frac{-\frac{1}{6n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=-\frac{1}{6}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \dfrac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x=+\infty$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$$

例6.31 (武汉大学,2018 年) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^\pi \sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{\int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x}$

解 由 $\cos x$ 的连续性知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. $x\in[\pi/2-\delta,\pi/2]$ 时, $\cos x<\varepsilon/2$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_0^\pi \sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{\int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x}\right|&=\left|\frac{2\int_0^{\pi/2}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x}{2\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x}\right|\\&\leqslant\frac{\left|\int_0^{\pi/2-\delta}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x\right|}{\left|\int_{\pi/2-\delta/2}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|}+\frac{\left|\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}\sin^n x\cos^6 x\,\mathrm{d}x\right|}{\left|\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|}\\&\leqslant\frac{\left|\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\cos^6 x\right|}{\left|\delta\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\right|}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

例6.32 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1$.

解 $\forall\varepsilon:0<\varepsilon<1$, 有 $0<1-\varepsilon<1$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0$.

$$1-\varepsilon=\int_0^{1-\varepsilon}e^0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1-\varepsilon}e^{x^n}\,\mathrm{d}x\leqslant e^{(1-\varepsilon)^n}(1-\varepsilon)$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{(1-\varepsilon)^n}=e^0=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon}e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1-\varepsilon.$$

对于上述 $\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N$, 有 $\left|\int_0^{1-\varepsilon}e^{x^n}\,\mathrm{d}x-\varepsilon 1\right|<2\varepsilon$. 而

$$\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=\left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant e\big(1-(1-\varepsilon)\big)=e\varepsilon.$$

$\forall n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x-1\right|&\leqslant\left|\int_0^{1-\varepsilon}e^{x^n}\,\mathrm{d}x-1\right|+\left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2\varepsilon+e\varepsilon=(2+e)\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,\mathrm{d}x=1$.

例6.33 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos^n x\,\mathrm{d}x=0$.

解 设 $f(x)=e^x\cos^n x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则

$$f'(x)=e^x\cos^{n-1}x(\cos x-n\sin x)=0.$$

当 $n\geqslant 0$ 时, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的解为 $\arctan\dfrac{1}{n}$, 即 $x_n=\arctan\dfrac{1}{n}$ 是 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的极大值点. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\dfrac{1}{n}=0$ 知, $\exists N_1\in\mathbb{N}^+,\forall n>N_1$, 有 $0<x_n<\delta$. $\forall x\in[0,\delta]$, 有

$$f(x)=e^x\cos^n x\leqslant e^{x^n}\cos^n x_n=e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n = 1$, 所以 $\exists N_2 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_2$, 有

$$e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n < 2.$$

取 $N_0 = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N_0$, 有

$$0 < \int_0^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\delta} e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n \mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\delta}\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为当 $n > N_1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x < e^{\delta}\cos^{\delta}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) < e^{\delta}\cos^{\delta}\frac{\pi}{2}.$$

要使 $e^{\delta}\cos^{\delta}\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 只要 $n > \ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\pi}e^{-\frac{\varepsilon}{4}}\right)\Big/\ln\cos\dfrac{\varepsilon}{4}$. 取 $N_3 = \left[\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{\pi}e^{-\frac{\varepsilon}{4}}\right)\Big/\ln\cos\dfrac{\varepsilon}{4}\right]$, $N = \max\{N_3, N_0\} \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, 有

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

例6.34 设 $f(x) \in C[0,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

证明 因为 $(n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1$, 所以只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - (n+1)\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 0$, 所以只需证 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x = 0$

$\forall\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, 所以 $\exists\delta > 0$ (不妨设 $\delta < 1$), 当 $0 < 1-x < \delta$ 时, 有 $|f(x)-f(1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 且 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in [0,1]$, 有 $|f(x)| \leqslant M$, 所以

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\ &= n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x + n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\ &< 2Mn\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &< 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} 2M(1-\delta)^{n+1} = 0$$

所以 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $2M(1-\delta)^{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以当 $n > N$ 时, 有

$$\left|n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因而有

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$$

例6.35 设 $f(x)\in D[0,1]$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right]$.

解 (by 叶心致)

$$\begin{aligned} I &\triangleq n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right] \\ &= n^2\int_0^1 x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x - \frac{n}{n+1}f(1) \triangleq I_1 - I_2 \end{aligned}$$

由于 $f(x)\in \mathrm{D}[0,1] \Rightarrow f(x)\in \mathrm{C}[0,1] \Rightarrow \forall x\in[0,1], \exists M, |f(x)|\leqslant M$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $1-\delta<x<1$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f'(1)\right|<\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} f(x)-f(1)<(x-1)\left[f'(1)-\varepsilon\right] \\ f(x)-f(1)>(x-1)\left[f'(1)+\varepsilon\right] \end{cases}$$

于是

$$I_1 = n^2\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1-\delta}^1\right)x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x \triangleq I_3+I_4$$

显然

$$|I_3|\leqslant 2Mn^2\int_0^{1-\delta}x^n\,\mathrm{d}x = 2Mn^2\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

对 I_4 右边进行放缩

$$\begin{aligned} I_4 &= n^2\int_{1-\delta}^1 x^n[f(x)-f(1)]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(f'(1)-\varepsilon\right)n^2\int_{1-\delta}^1 x^n(x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(f'(1)-\varepsilon\right)n^2\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{(1-\delta)^{n-2}}{n+2}+\frac{(1-\delta)^{n-1}}{n+1}\right) \\ &\to -f'(1)\ (n\to\infty) \end{aligned}$$

同理, 对 I_4 左边进行放缩

$$I_4\geqslant -f'(1)-\varepsilon\to -f'(1)(n\to\infty)$$

综上所述

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)\right] = -f(1)-f'(1)$$

例6.36 设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(0)$

解 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<x<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left|\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right| &= \left|\frac{\int_{+\infty}^{\frac{1}{x}}-\frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\frac{\sin u}{u}\right|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}+\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\left[\left|-\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right|+\frac{2}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u\right] \\ &= x\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty} = x\left|\sin\frac{1}{x}\right|+x\leqslant 2x<2\sigma=\varepsilon \end{aligned}$$

同理, 当 $-\delta<x<0$ 时, 也有 $\left|\dfrac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\right|<\varepsilon$, 因此

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0$$

例6.37 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, 证明:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

解 (by 向禹) 首先, 我们证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

当 n 为偶数时; 我们只需考虑 $x\to0^+$ 即可.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

对 $\forall x>0,\exists k\in\mathbb{N}^+$, s.t. $(k-1)\pi\leqslant x<k\pi$, 则 $x\to+\infty$ 时有 $k\to+\infty$, 于是

$$x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t+x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

其中

$$\left|x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|x\int_x^{k\pi}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{k\pi-x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{x}\right|\to0,\quad x\to+\infty$$

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t&=\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(t+i\pi)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

不难得到当 $k\to+\infty$ 时,

$$\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i+1)^2}\sim\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\sim\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\sim\frac{1}{k}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}t\sim\frac{k\pi}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

当 n 为奇数时; 正项级数 $\displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$ 会变成交错级数 $\displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}$, 此时

$$\left|\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\left(i+\frac{t}{\pi}\right)^2}\right|\leqslant\frac{1}{\left(k+\frac{t}{\pi}\right)^2}<\frac{1}{k^2}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0$$

同理可证明

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

例6.38 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t=0.$

证明 法 1. 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $0<a<\dfrac{\varepsilon}{4}$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t&=\int_0^{1-a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1-a}^{1+a}\sin t^n\,\mathrm{d}t+\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}}\sin t^n\,\mathrm{d}t\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

由 $|\sin x| \le 1$ 知 $|I_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 对 I_1, 有

$$|I_1| \le \int_0^{1-a} |\sin t^n|\,\mathrm{d}t \le \int_0^{1-a} t^n\,\mathrm{d}t \le \frac{(1-a)^{n+1}}{n+1}$$

显然可以找到一个 $N_1 > 0$ 使得 $n > N_1$ 时有 $|I_1| \le \dfrac{\varepsilon}{4}$, 而对 I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}} \sin t^n\,\mathrm{d}t = \int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(-\cos t^n)}{nt^{n-1}} \\ &= \frac{-\cos t^n}{nt^{n-1}}\Big|_{1+a}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos(1+a)^n - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n(1+a)^{n-1}} + \frac{1-n}{n}\cdot\int_{1+a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t^n}{t^n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

显然存在 N_2, 使得当 $n > N_2$, 时有 $|I_3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, 这样，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时，就有 $|I| < \varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t^n\,\mathrm{d}t = 0$$

法 2

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t^n dt = \frac{1}{n}\cdot\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} y^{\frac{1}{n}-1}\sin y dy \qquad (y = t^n)$$

而

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{n}} e^{-u} du = \int_0^{\infty} y^{1-\frac{1}{n}}\cdot x^{-\frac{1}{n}} e^{-xy} dx$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}\left(\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{n}} e^{-xy} dx\right)\cdot\sin y dy \\ &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{n}}\cdot\left(\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} e^{-xy}\sin y dy\right) dx \\ &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2} dx - \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}} dx \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

而我们知道 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) = S_1 + S_2$$

其中

$$\begin{aligned} |S_1| &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left|\int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}} dx\right| \\ &\le \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^1 \frac{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + 1\right]x^{-\frac{1}{n}}}{e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}} \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} z^{-\frac{1}{n}} e^{-z} dz \\
&\leq \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}} \int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{n}} e^{-z} dz \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-n}\right] \to 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|S_2| &= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left| \int_1^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\right]}{(1+x^2)e^{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{n}}}{1+x^2} dx \leq \frac{\pi}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to 0
\end{aligned}
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t^n dt = 0
$$

例6.39 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos^n\left(\frac{1}{x}\right) dx = 0$

证明 法 1. 作变量替换 $u = \frac{1}{x}$, 则有

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right| du &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right| du + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{3}{2}\right)\pi} \left|\frac{\cos^n u}{u^2}\right| du \\
&\leq \cos^n 1 \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u^2} du + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \int_0^{\pi} |\cos^n u| du \\
&= \cos^n 1 \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u^2} du + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\cos^n u| du
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$, 知 $\cos^n 1 \to 0$, $\int_0^{\pi} |\cos^n u| du \to 0$. 这是由于

$$
\int_0^{\pi} |\cos^n u| du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = 2I_n
$$

由于单调有界收敛原理知 $n \to \infty$ 极限必然存在. 所以考虑偶序列递推公式和 Wallis 公式

$$
I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2n}}, \ n \to \infty
$$

法 2. 做变换 $x = \frac{1}{u}$, 得到

$$
\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n u \, \mathrm{d}u}{u^2}.
$$

从而

$$
\left| \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{|\cos^n u| \, \mathrm{d}u}{u^2}.
$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2} &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}\frac{|\cos^n u|\,\mathrm{d}u}{u^2}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_{1+(i-1)\pi}^{1+i\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(i-1)\pi)^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u\\ &< \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

得到

$$\left|\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u,\forall n=1,2,\ldots.$$

易证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\cos^n u|\,\mathrm{d}u=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

例6.40 (北大,2014) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界. 求极限

$$\lim_{t\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 由连续性, 存在 $\delta>0$, 使得对一切 $|x|\leqslant\delta$, 有 $|f(x)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{\pi}$. 从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x++\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 4M\arctan\frac{t}{\delta}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\arctan\frac{\delta}{t}\\ &< \frac{4Mt}{\delta}+\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\overline{\lim_{t\to0^+}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,\forall\varepsilon>0.$$

根据 $\varepsilon>0$ 的任意性,

$$\lim_{t\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x=0.$$

法 2. 注意到, 对任意 $t>0$, 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in(-\sqrt{t},\sqrt{t})$, 使得

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= |f(\xi)-f(0)|\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2M\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{t}}+\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\right)\frac{t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x+2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\\ &= 4M\arctan\sqrt{t}+2|f(\xi)-f(0)|\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\\ &< 4M\sqrt{t}+\pi|f(\xi)-f(0)|.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x=0.$$

例6.41 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

证明 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

于是，对于任意 ε, 存在 $\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时 $\cos x>1-\varepsilon$

$$I=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt$$

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt\le\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}dt$$

令 $y=x(1-\cos t),\Rightarrow t=\arccos\left(1-\frac{y}{x}\right),\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{x}\right)^2}}dy$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{x(\cos t-1)}dt&=\sqrt{x}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}\frac{1}{x\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{x}\right)^2}}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}}-1\right)dy+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\\&=A+B\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{y}{2x}}{\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{y}{2x}}\right)}dy\\&\le\frac{1}{2\sqrt{2}x}\int_0^{x}e^{-y}y^{\frac{1}{2}}dy\to 0\end{aligned}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x(1-\cos\delta)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}\qquad(x\to+\infty)$$

另外

$$\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt\ge\sqrt{x}\int_0^{\delta}e^{-\frac{1}{2}xt^2}(1-\varepsilon)dt\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon)$$

而不难证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt=0$$

这里只要用

$$\cos t-1=-2\sin^2\frac{t}{2}\le-2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2$$

并注意到替换后的反常积分收敛就好，最后，由 ε 的任意性，得

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{x(\cos t-1)}\cos t\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例6.42 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right)$

解 设 $\delta = n^{-\frac{2}{5}}$, 则

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n)}$$
$$= \frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-1)!!} \to 0\ (n\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta} e^{\ln\cos x - n\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)$$

因为

$$\ln\cos x - n\ln(1+x^2) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2 + n(x^4),\ x\in[-\delta,+\delta]$$

所以

$$\ln\cos x - n\ln(1+x^2) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)x^2 + o\left(n^{-\frac{8}{5}}\right)$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta} e^{\ln\cos x - n\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-(n+\frac{1}{2})x^2}\,\mathrm{d}x\right) \quad y = \sqrt{n+\frac{1}{2}}x$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\int_{-\delta\sqrt{n+\frac{1}{2}}}^{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$$

6.1.2 定积分的近似计算

例6.43 证明: $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x > 0$

解

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x + \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x}^{t=2\pi-x}$$
$$= \int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} e^{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\,\mathrm{d}(\sin x)$$
$$= 2\sin x e^{\cos x}\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$> 0$$

例6.44 证明不等式

$$\frac{1}{200} < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{100}$$

证明 一方面

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x>\int_0^{1}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{101}\int_0^{1}e^{-x}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{200}$$

另一方面

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{100}\int_0^{100}e^{-x}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{100}$$

证毕

例6.45 设 $a>0$, 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^a}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^a}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)+(\sin t-\cos t)(1+x^a)}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\left(1-\frac{\pi}{2x}\right)^a-1\right)x^a}{(1+x^a)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^a\right)}\,\mathrm{d}x\\&>0\end{aligned}$$

例6.46 证明: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}$

解 (by 向禹)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}&=\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}}_{t=-x}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}}\,\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{1}{2}}2\,\mathrm{d}x=1\end{aligned}$$

例6.47 试证

$$\left|\int_a^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a},\quad a>1$$

证明 法 1: 由于

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}d\cos x^2\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\cos x^2\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\cos x^2 d\frac{1}{x}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos a^2}{a}-\int_a^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_a^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{2}\left|\frac{\cos a^2}{a}\right|+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\leq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}.$$

法 2: 对任何 $A>a$, 根据积分第二中值定理, 存在 $\xi\in[a,A]$, 使得

$$\int_a^A \sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_a^A \frac{1}{2x}\cdot 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int_a^\xi 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\cos a^2-\cos\xi^2}{2a}.$$

从而

$$\left|\int_a^A \sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{a},\forall A>a.$$

因此

$$\left|\int_a^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{a}.$$

例6.48 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\geq\frac{\pi}{4+2a\pi}\quad(a>0)$

证明 我们考虑

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}(\frac{\pi}{2}\sin x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sin 2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\geq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\geq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^a x+ax\tan^{a-1}x\sec^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=x\tan^a x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\geq\frac{\pi}{4+2a\pi}$$

练习 6.21 证明

$$I(n)=\int_0^{\pi/2}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<\frac{\pi^2n^2}{4},n\geq 2.$$

证明 $n=1$ 时直接验证不等式成立. $n\geq 2$ 时, 首先注意到如下不等式:

$$|\sin nt|\leq n\sin t,\forall t\in[0,\pi/2],$$

$$\sin t\geq\frac{2t}{\pi},\forall t\in[0,\pi/2].$$

故对任意 $\delta\in(0,\pi/2)$,

$$I_1(n)=\int_0^{\delta}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<n^4\int_0^{\delta}t\,dt=\frac{n^4\delta^2}{2},$$

$$I_2(n)=\int_{\delta}^{\pi/2}t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4dt<\frac{\pi^4}{16}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{dt}{t^3}=\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

因此

$$I(n)=I_1(n)+I_2(n)<\frac{n^4\delta^2}{2}+\frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

易知上式右边在 $\delta=\dfrac{\pi}{2n}$ 处到达最小值 $\dfrac{\pi^2n^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{8}$, 从而

$$I(n)<\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{\pi^2}{8},n\geq 2.$$

练习 6.22 当 n 为正整数时，证明：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|\mathrm{d}t<\frac{2+\ln n}{2}$$

证明

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&\le\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\
&\le\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n
\end{aligned}$$

欲证题中不等式，只需说明

$$2-\pi+2\ln 2+2\ln n<\frac{\pi^2}{2}\ln n$$

当 $n>1$ 时有：

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n-\frac{2+\ln n}{2}\\
=&\frac{1}{\pi^2}\left[\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)\ln n+2+\ln 4-\pi\right]\\
<&\frac{1}{\pi^2}\left[-2\ln n+2+\ln 4-\pi\right]<0
\end{aligned}$$

即

$$1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(1+\ln 2)+\frac{2}{\pi^2}\ln n<\frac{2+\ln n}{2}$$

如果 $n=1$，在前面式子中有

$$I\le\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}\right)=1+\frac{3-\pi}{\pi^2}<1$$

例6.49 试证:

$$\frac{16}{9}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x<\frac{418}{225}$$

证明 右边 (by tian27546)：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x&\leqslant\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2\,\mathrm{d}x}\\
&=\sqrt{\pi\ln 2\times\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\approx 1.849<\frac{418}{225}\approx 1.8577
\end{aligned}$$

现在来证明左边更强的式子 (by Hansschwarzkopf)

注意到 $f(u)=e^u$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格凸函数和

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{e},$$

得到

$$\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x>\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi^2}{2e}\approx 1.81541228>\frac{16}{9}.$$

例6.50 (18 中科院数分) 证明积分不等式:

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

证明 (by Hansschwarzkopf) 注意到

$$x^2-x+25=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{99}{4}>\frac{99}{4},a.e.x\in[0,1],$$

从而

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

另一方面, 分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}&=\frac{(x-1)e^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{5}+\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}$, $g(x)=(x-1)e^x$, 则

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+\frac{97}{4}}{\sqrt{(x^2-x+25)^5}}>0,\forall x\in[0,1],\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,g'(x)=xe^x,$$

因此 f,g 在 $[0,1]$ 上严格递增. 根据 Chebyshev 积分不等式,

$$\int_0^1\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})e^x}{\sqrt{(x^2-x+25)^3}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

故

$$\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}>\frac{1}{5}.$$

最后得到

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+25}}<\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

例6.51 设 $x\leqslant 1$ 且是实数，求证

$$I(x)=\int_0^x\frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t\geqslant e^{x-1}$$

–傲娇小魔王

其中 $\lfloor t\rfloor$ 表示取整函数

证明 设 $m<x<m+1$, 则有

$$I(x)=\int_0^1\frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{m-1}^m\frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t+\int_m^x\frac{x^{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!}(x-m)$$

显然有

$$I'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(x-m)$$

想减得

$$I'(x) - I(x) = \frac{x^{m-1}}{m!}(x-m)(m+1-x)$$

显然 $m < x < m+1$, 有 $I'(x) - I(x) > 0$, 故令

$$G(x) = \ln(I(x)) \Longrightarrow G'(x) > 1$$

故由中值定理我们有

$$G(x) = G(m) + (x-m)G'(\xi) > G(m) + x - m$$

由于

$$I(m) \geqslant e^{m-1} \Longrightarrow G(m) \geqslant m-1$$

所以

$$G(x) > x - 1 \Longrightarrow I(x) > e^{x-1}$$

其中我们用到了

$$I(m) \geqslant e^{m-1}$$

即证明

$$\sum_{x=0}^{m-1} \frac{m^x}{x!} \geqslant e^{m-1}$$

显然利用

$$\sum_{x=0}^{m-1} \frac{m^x}{x!} = e^m - \frac{e^m}{(m-1)!}\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t$$

则我们需要证明

$$\int_0^m e^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t \leqslant (m-1)!\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

假设 $m = k$ 成立，利用分部积分有

$$k^k e^{-k} + \int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant k!\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

注意到

$$\int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant \max_{k\leqslant t\leqslant k+1} e^{-t}t^k = e^{-k}k^k$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant k^k e^{-k} + \int_0^k e^{-t}t^k\,\mathrm{d}t \leqslant k!\left(1 - \frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

例6.52 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

证明 令 $M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 若 $M = 0$, 则等式平凡成立. 故不妨设 $M > 0$. 设 $x_0 \in [a,b]$ 满足 $M = |f(x_0)|$.

则对任何 $\varepsilon \in (0, M)$, 存在区间 $[c, d]$, 使得 $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ 且 $|f(x)| \geqslant M - \varepsilon, \forall x \in [c, d]$. 从而

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (d-c)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon).$$

因此

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得到

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M.$$

另一方面, 显然有

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M.$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

✍ **练习 6.23** $f_0(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积,

$$f_0(x) > 0; f_n(x) = \sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

证明 设 $0 < \delta < 1$. 因为 $f_0(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积且 $f_0(x) > 0$,

所以 $f_1(x) = \sqrt{\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t}$ 是区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 故存在正数 m, M, 使得

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq M \qquad (x \in [0, 1]) \\ f_1(x) &\geq m \qquad (x \in [\delta, 1]) \end{aligned}$$

对任一自然数 n, 用数学归纳法可以证明如下不等式

$$m^{\frac{1}{2^n}} a_n (x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} \leq f_{n+1}(x) \leq M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \tag{6.3}$$

其中

$$a_n = \left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^n-1}} \left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^n-2}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $n = 1$ 时, 有

$$f_2(x) = \sqrt{\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t} \leq M^{\frac{1}{2}} x^{1-\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}} a_1 x^{1-\frac{1}{2}}$$

设 $n-1$ 时结论成立, 则对 n 有

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sqrt{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t} \leq M^{\frac{1}{2^n}} a_{n-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^x t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}\,\mathrm{d}t} \\ &= M^{\frac{1}{2^n}} a_{n-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}} = M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

故 (6.3) 式右边的不等式对一切自然数 n 都成立, 同理可证左边的不等式亦真.

因为

$$\ln a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

所以根据特普利茨定理（容易验证此时条件全部满足）有

$$\lim_{n\to+\infty} \ln a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{1}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} = \ln \frac{1}{2}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} m^{\frac{1}{2^n}} a_n (x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x-\delta}{2}$$

由 δ 的任意性即知对任一切 $x \in (0, 1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}$$

又因 $f_{n+1}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$ 所以对一切 $x \in [0, 1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}$$

6.1.2.1 Laplace 渐近积分定理

定理 6.1. Laplace 渐近积分定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且满足下面的条件：

1. $\forall n > N$, $f(x)e^{n\cdot g(x)} \in \mathbb{R}[a, b]$;
2. $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有一个最大值点 $x = \xi \in (a, b)$，且在任何不包含 ξ 的闭区间 $[\alpha, \beta]$ 中，有 $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} g(x) < g(\xi)$;
3. 在 ξ 的某领域内，$g''(x) < 0$ 且连续;
4. $f(\xi) \neq 0$, $f(x)$ 在 $x = \xi$ 连续.

则当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_a^b f(x)e^{n\cdot g(x)}\,\mathrm{d}x \sim f(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{ng''(\xi)}}e^{ng(\xi)}$$

♡

证明 徐利治的渐近分析方法及应用的 43-45 页

例6.53 Wallis 公式: $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}},\ n \to +\infty$

证明 由于

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$$

由 Laplace 渐近积分定理，我们取 $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin^2 x, g(x) = \dfrac{1}{\pi}, \xi = \dfrac{\pi}{2}$. 得到

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2\pi}{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}},\ n \to \infty$$

例6.54 Stirling 公式: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n,\ n \to +\infty$

证明 我们知道对于 Γ 函数有

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\int_0^{+\infty} (xe^{-x})^n\,\mathrm{d}x$$

由 Laplace 渐近积分定理, 我们取 $a=0, b=+\infty, f(x)=1, g(x)=\ln x - x, \xi=1$, 易得

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\ n\to+\infty$$

6.1.3 积分中值定理

练习 6.24 设 $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}, x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$, 则函数 y 在该区间的平均值 $\bar{y}=$ _____

解 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为函数 y 在区间 $[a,b]$ 上的平均值 ——同济 6 版高数上 (p234)

$$\bar{y}=\frac{\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}}=\frac{1-2\sqrt{3}+\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

定理 6.2. 积分第一中值定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 不妨设在 $[a,b]$ 上 $g(x)\geqslant 0$. 因为 $f(x)\in C[a,b]$, 由最值定理知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M, 最小值 m, 即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \Longrightarrow mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$$

$$\int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$, 则 $m\leqslant\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M$. 由介值定理知, $\xi\in[a,b]$, 使得即

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}=f(\xi)\quad\text{即}\quad\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 由 (6.4) 式知 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则对 $\forall\xi\in[a,b]$, 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.55 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\,\mathrm{d}t&\xlongequal{u=x+t}\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\sin\frac{\pi}{u}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{u}}\lim_{x\to\infty}\pi\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\xi_x}{\xi_x}\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{x}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\pi\ln 2\end{aligned}$$

例6.56 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x$

解 (by 蓝兔兔) 注意到

$$\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=nx} \int_0^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-x^2n^2}f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\int_{\sqrt{n}}^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\end{aligned}$$

例6.57 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

解 注意到

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=nx}\int_0^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{n}}^n\frac{1}{t^2+1}e^{\frac{t^2}{n^2}}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\int_{\sqrt{n}}^n\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{\xi_n^2}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\sqrt{n}-\arctan 0\right)+0=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

例6.58 计算极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int_0^1\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{-n^{\frac{1}{3}}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\xlongequal[\xi\in\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)]{\text{积分第一中值定理}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+\cos^2\xi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$$

注意到

$$\int_0^a e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left[\int_0^{a\sqrt{n}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]^2$$

利用二重积分 (同济 7p150),

$$\frac{1}{4}\iint_{\rho<a\sqrt{n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_0^{a\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}\iint_{\rho<a\sqrt{2n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\rho<a\sqrt{n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \pi(1-e^{-a^2n})$$

$$\iint_{\rho<a\sqrt{2n}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \pi(1-e^{-2a^2n})$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

例6.59 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 对 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx|\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=nx} \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 应用积分中值定理得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\text{积分中值定理}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\frac{\pi}{n} \xlongequal{\text{积分定义}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.60 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

解 首先令 $\cos x = t$, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}\ln\left(1+\frac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1}t}\right)t^n\,\mathrm{d}t$$

令 $f(t)=\dfrac{\cos^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\cos^{-1}t}\right)t^n$ 易知 $f(t)\downarrow$ $t\in[0,1]$ 且 $\lim\limits_{t\to1} f(t)=\ln 2$

运用积分第二中值定理 $\exists\xi\in(0,1)$, s.t

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t &= f(0)\int_0^{\xi} t^n\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to1} f(x)\int_{\xi}^1 t^n\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f(0)}{n+1}\xi^{n+1} + \frac{\ln 2}{n+1}\left[1-\xi^{n+1}\right]\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln 2}{n+1} + \frac{n\xi^{n+1}}{n+1}\left(f(0)-\ln 2\right)\right]$$
$$= \ln 2$$

例6.61 (CMC,2019) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数, 且 $|f(x)| \leqslant 1$, $f'(x) > 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$. 证明: 对于 $0<\alpha<\beta$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 0$.

证明 令 $y = x - \frac{1}{nx}$, 则 $y' = 1 + \frac{1}{nx^2} > 0$. 故函数 $y(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调增加. 记 $y(x)$ 的反函数为 $x(y)$, 则 $x(y)$ 定义在 $\left[\alpha-\frac{1}{n\alpha}, \beta-\frac{1}{n\beta}\right]$ 上, 且

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{nx^2}} > 0.$$

于是

$$\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(ny)x'(y)\,\mathrm{d}y.$$

根据积分中值定理, 存在 $\xi_n \in \left[\alpha-\frac{1}{n\alpha}, \beta-\frac{1}{n\beta}\right]$, 使得

$$\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(ny)x'(y)\,\mathrm{d}y = x'(\xi_n)\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(ny)\,\mathrm{d}y = \frac{x'(\xi_n)}{n}\left[f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)-f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

因此

$$\left|\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{|x'(\xi_n)|}{n}\left[\left|f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)\right| - \left|f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right]$$

注意到

$$0 < x'(\xi_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n\xi_n^2}} < 1,$$

则

$$\left|\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{n},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 0$$

6.1.4 Riemann 引理

定理 6.3. Riemann 引理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$$

♡

证明 [13] 先设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故必有界, 即存在常数 M, 使得 $|f(x)| \leqslant M$, 记 $\forall x \in [a,b]$. 则当 $n = \lfloor\lambda\rfloor$ 时, 则当 $\lambda\to+\infty$ 时, $n\to\infty$. 现在将 $[a,b]$ 等分, 分点为

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),\ i = 0,1,\cdots,n.$$

记 ω_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i = 0,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 注意到

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}|\sin x_i - \sin x_{i-1}| \leqslant \frac{2}{\lambda}, \quad |\cos\lambda x| \leqslant 1.$$

有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)-f(x_i)]\cos\lambda x\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i + \frac{2n}{\lambda}M = \sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i + \frac{2\lfloor\lambda\rfloor}{\lambda}M \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}M \quad (\lambda\to+\infty).\end{aligned}$$

再设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义绝对可积. 不妨设 b 为 $f(x)$ 唯一的瑕点, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$, 使得

$$\int_{b-\eta}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b-\eta]$ 上 Riemann 可积, 由刚才证明的结果知, $\exists\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 便有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b-\eta}^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| + \int_{b-\eta}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$$

同理, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$$

定理 6.4. 推广的 Riemann 引理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $g(x)$ 以 T 为周期, 且在 $[a,b]$ 上可积. 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 [4] I 首先, 设 $f(x)$ 连续可导, $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 记

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

则易见, $G(x)$ 是以 T 为周期的函数, 从而它在 $\mathbb{R}$ 上有界. 容易得到 (先假设 $g(x)$ 连续, 然后再后面的 II 中也

同时对 $g(x)$ 用连续函数逼近)

$$\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\big(f(b)G(\lambda b) - f(a)G(\lambda a)\big) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)G(\lambda x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x), f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

II 设 $f(x), g(x)$ 可积, $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 取 $[a,b]$ 上连续可导的函数列 $f_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

由于

$$\big|(f(x) - f_n(x)g(\lambda x)\big| \leqslant M|f(x) - f_n(x)|,\ \forall x\in[a,b],$$

其中 $M \triangleq \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\left|\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\left|\int_a^b f_n(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b M|f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b M|f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上式两边令 $n\to+\infty$, 得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

III 一般地, 在定理的假设下, 由 II 的结果, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\left(g(\lambda x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 0.$$

此即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注: 定理的结果可简单地推广到 $f(x)$ 为可积且绝对可积的反常积分情形

例6.62 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, 其中 $x\in[0,\pi]$

解 (1) 当 $x=0$ 时, 级数为 0

(2) 当 $x\in(0,\pi]$ 时, 设 $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$, 则

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right)' = \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此:

$$f_n(x) = \int_\pi^x\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{\pi-x}{2} - \int_x^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

由黎曼引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_x^\pi \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=0$, 故 $x\in(0,\pi]$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{\pi-x}{2}$

6.1.5 一些重要的积分不等式

定理 6.5. 柯西 – 斯瓦茨不等式

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

♡

证明 法 1. 对任意实数 λ, 有 $\int_a^b\left[f(x)+\lambda g(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$, 即

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式, 它非负的条件是其系数判别式非正, 即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)-4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

从而本题得证

法 2(by 向禹). 利用二重积分, 从不等式

$$\int_a^b\int_a^b\left(f(x)g(y)-g(x)f(y)\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0$$

出发, 展开得到

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_a^b\int_a^b g^2(x)f^2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \geqslant&2\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y+\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\\ \geqslant&2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意到定积分与积分变元无关, 因此

$$2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

定理 6.6. 赫尔德 (Hölder) 不等式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 p 次方可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 q 次方可积, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b|g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}},$$

其中 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

♡

证明 设 $A=\dfrac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}$, $B=\dfrac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}$, 利用 Young 不等式, 得

$$\frac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x},$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x)||g(x)|&\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\\&\quad+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{1-\frac{1}{q}}}\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{p}|f(x)|^p\frac{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}+\frac{1}{q}|g(x)|^q\frac{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}\end{aligned}$$

对上式两边在 $[a,b]$ 上关于 x 积分, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\frac{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}}\\&\quad+\frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\frac{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}}\\&=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

又由 $\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$, 命题得证

定理 6.7. Young 不等式

设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导且严格单调增加, $f(0)=0, a,b>0$, 则有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y.\tag{6.5}$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 而等号当且仅当 $b=f(a)$ 时成立. ♡

证明 [11] 将 (6.5) 右边的两个积分之和记为 I. 利用 $g(f(x))\equiv x$, 对其中第二个积分作变量代换 $y=f(x)$, 即 $x=g(y)$, 然后分部积分得到:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{g(b)} x\,\mathrm{d}f(x)\\&=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+xf(x)\Big|_0^{g(b)}-\int_0^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\\&=bg(b)-\int_0^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{6.6}$$

其中利用了 $f(g(b))=b$. 如果 $a=g(b)$, 也就是 $b=f(a)$, 则已经得到 (6.5) 中成立等号的情况.

在 $a<g(b)$ 时, 对于 (6.6) 中的积分利用 $f(x)$ 在区间 $[a,g(b)]$ 上严格单调增加, $f(x)\leqslant f(g(b))=b$, 就得到 $I>bg(b)-[g(b)-a]b=ab$. 在 $a>g(b)$ 时, 类似地可得到

$$I=bg(b)+\int_{g(b)}^a f(x)\,\mathrm{d}x>bg(b)+[a-g(b)]b=ab$$

定理 6.8. 切比雪夫 (Chebyshev) 不等式

设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 对 $x, y \in [a,b]$, 则

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0$$

即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\cdot f(y)g(y) \geqslant g(y)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + f(y)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得:

$$\begin{aligned}&(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b f(y)f(y)\,\mathrm{d}y\\ \geqslant &\int_a^b g(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将上式中 y 改为 x 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 6.9. 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

设 $p>1$, 函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且 $\forall x \in [a,b]$, $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 而 $\forall y \in [c,d]$, $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则

$$\left(\int_c^d \left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

简言之, (6.7) 式表示积分的范数小于等于范数的积分

♡

证明 [4] 在定理的假设之下, 下面涉及的积分都是有意义的. 记

$$F(y) = \left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^{p-1}.$$

q 为 p 的对偶数, 则

$$\begin{aligned}\int_c^d \left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p \mathrm{d}y &= \int_c^d F(y)\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b F(y)|f(x,y)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d F(y)|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_a^b \left(\int_c^d |F(y)|^q\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_c^d |f(x,y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_c^d \left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此立即可得 (6.7) 式.

定理 6.10. Opial 不等式

设 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上绝对连续, 则

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}a\int_0^a [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

若 $f(0)=0$, 当且仅当 $f(x)=cx$ 时取等号. ♡

证明

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \left|\int_0^a |f'(x)|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \iint_{0\leqslant t\leqslant x\leqslant a} |f'(x)||f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{(Cauchy-Schwarz 不等式)}\end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $f'(x)\equiv c$(常数) 时取等号.

6.1.6 积分不等式

积分不等式的证明思路

- 分部积分: 例6.63
- 柯西不等式: 例6.69
- 分区间拆分: 例6.81, 例6.82
- 缩放积分区间: 例6.83, 例6.66
- 泰勒展开: (最大值处) 例6.64
- 重积分换序: 例6.65, 例6.70
- 凹凸性: 例6.68, 例6.80
- 构造多项式: 例6.73, 例6.79 例6.78, 例6.88
- 分区间构造函数: 例6.84, 例6.85

例6.63 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上有一阶连续导数，且

$$f(0)=f(1)=0,\ M=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{4}$

证明

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(a+x)\right|\\ &= \left|\left|(x+a)f(x)\right|_0^1 - \int_0^1 (x+a)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leq M\int_0^1 |x+a|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取 $a=-\frac{1}{2}$ 即得欲证不等式。

例6.64 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{4}M \quad (M=\max|f'(x)|)$$

证明

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

用 Taylor 公式二阶展开, 记 $M=\max|f'(x)|$.

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)\mathrm{d}x| &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(a)+f'(\xi)(x-a)|\mathrm{d}x\\ &\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|x-a|\mathrm{d}x = M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x = M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)\end{aligned}$$

同样的方法和步骤得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x \le M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)$$

上面两个式子相加得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{4}M$$

练习 6.25 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续可导, $f(0)=0, f(\frac{\pi}{2})=1$, 求证:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)\cdot\sin x+f'(x)|dx \geqslant 1$$

证明 设 $F(x)=e^{-\cos x}f(x)$, 则

$$F'(x)=e^{-\cos x}\left(f(x)\sin x+f'(x)\right)\Rightarrow F'(x)e^{\cos x}=f(x)\cdot\sin x+f'(x)$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)\cdot\sin x+f'(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|e^{\cos x}F'(x)|dx$$

注意到 $e^{\cos x}\ge 1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|e^{\cos x}F'(x)|dx\ge\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}F'(x)dx\right|=1$$

例6.65 (Poincare 不等式) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数, 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

解 (by 向禹)

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b\left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\left(\int_a^x\mathrm{d}t\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_a^b\left((x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例6.66 设函数 $f(x)>0$, 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1$$

证明: $\forall a,b,a<b$, 有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}$.

解 由于 $\forall a,b(a<b)$, 有

$$\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1$$

因此

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant b-a$$

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t = \int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}t + \int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}t = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)\left(2 - e^{a-x} - e^{x-b}\right)\mathrm{d}x \leqslant b-a \tag{6.8}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \quad \text{和} \quad \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

把以上两个式子入 (6.8), 即得结论。

例6.67 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 非负的连续的凹函数，且 $f(0)=1$, 求证:

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{12} \leq \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 设 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由于 $f(x)$ 是凹函数，所以有

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ t \in (0,x)$$

因此, $f(t) \geq \frac{t}{x}(f(x)-1)+1$, 故

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}F(x) &= F(1) - 2\int_0^1 x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leq F(1) - I - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

所以 $2I \leq F(1) - \frac{1}{3}$, 只要证明

$$F(1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \leq F^2(1) \Leftrightarrow \left(F(1) - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$$

显然成立。

例6.68 设 $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ 是连续可微函数，若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 求证：

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \geq 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 证法 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - f(\tfrac{1}{2}))\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\int_{\frac12}^1\int_{\frac12}^x f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^{\frac12} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&= \Big[\int_{\frac12}^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac12} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac12}^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t\Big]^2 + 2\Big[\int_0^{\frac12} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac12}^1 (1-t)^2\mathrm{d}t\int_{\frac12}^1 f'(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^{\frac12} x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac12} f'(t)^2\mathrm{d}t\Big]\\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

整理即得欲证不等式。

证法 2 先看一个更加一般的结论

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$$

利用 Schwarz 不等式

$$\int_0^{\frac12} [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac12} x^2\mathrm{d}x \ge \Big(\int_0^{\frac12} xf'(x)\mathrm{d}x\Big)^2 = \Big[\frac12 f(\frac12) - \int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x\Big]^2$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac12} [f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 24(\frac12 f(\frac12) - \int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x)^2$$

再利用 Schwarz 不等式

$$\int_{\frac12}^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_{\frac12}^1 (1-x)^2\mathrm{d}x \ge \Big(-\frac12 f(\frac12) + \int_{\frac12}^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\frac12}^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \ge 24\Big((-\frac12 f(\frac12) + \int_{\frac12}^1 f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)$$

二者相加, 利用 $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$ 得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x &\ge 24\Big((\frac12 f(\frac12) - \int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x)^2 + (-\frac12 f(\frac12) + \int_{\frac12}^1 f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)\\
&\ge 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x\Big)^2
\end{aligned}
$$

当 $\int_0^{\frac12} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 时，上式 $= 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$, 故

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \ge 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$$

✍ **练习 6.26** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$, 证明: $|f(x)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \Big|\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_0^x |f'(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \sqrt{\Big(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\Big)^2}
\end{aligned}
$$

且由柯西不等式有

$$\left(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x\right) = \left(\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)$$

因此

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\left(\int_0^1 |f'(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x\right)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

例6.69 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 因为

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) = \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.70 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f(1)=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 因为

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

由柯西积分不等式有

$$\begin{aligned} f^2(x) = \left(\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_0^x f'^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

又

$$f(x) = f(x) - f(1) = -\int_x^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.71 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连可微函数, 且 $f(a)=f(b)$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

则

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=c\cos\dfrac{2\pi}{b-a}x+d\sin\dfrac{2\pi}{b-a}x.$

证明 [1] 利用线性变换 $x=\dfrac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a$ 将区间 $[a,b]$ 上的函数变为 $[-\pi,\pi]$ 上的函数, 应用 Wirtinger 不等式 (例15.20) 即可.

例6.72 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可积函数. 且 $|f(x)|\leqslant 1$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 令 $F(x)=\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+5\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 10\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 (by 向禹) 由于

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_y^1 f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_y^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

故有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x=F^2(1)-\int_0^1 f(y)F(y)\,\mathrm{d}y$$

利用 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$ 得

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1),\quad \int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F^2(1)\geqslant 0.$$

利用 $A^2+B^2\geqslant 0$ 则有

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

另外由 Cauchy 不等式

$$4\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 2F(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=4F^2(1)=8\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

相加即得原式.

注意到有更一般的式子

$$A\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+B\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2(A+B)\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 $A=B=0$ 或 $f(x)=F(x)=0$.

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)&=\int_0^1 \mathrm{d}(xF(x))\\&=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$F^2(1)=\int_0^1 \mathrm{d}F^2(x)=2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

[1] 梅加强《数学分析》P380

由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F^2(1) = 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F^2(1) = 2\int_0^1 f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

相加即可

例6.73 (2015CMC) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$.

求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

解 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此根据 Newton-Leibniz 公式, 得

$$6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-3x^2)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

再根据 Cauchy 积分不等式, 得

$$\begin{aligned}36\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \int_0^1 (1-3x^2)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{5}\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此即得

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

等号当且仅当 $f'(x)=A(1-3x^2)$ 积分并由 $f(0)=f(1)=0$. 即得

$$f(x) = Ax(1-x)(1+x) = A(x-x^3).$$

例6.74 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

并且当且仅当 $f(x)\equiv cx$ 时等号成立, 其中 c 是常数.

证明 (by 向禹)

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}(1-x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从柯西不等式的取等条件来看, 等号成立当且仅当 $f'(x)\equiv c$ 恒成立, 又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)\equiv cx$.

例6.75 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可导函数, 若 $\int_0^{\frac12} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)'\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 由条件我们有

$$\int_0^{\frac12} xf'(x)\,\mathrm{d}x=\frac12 f\left(\frac12\right)$$

由牛顿--莱布尼茨公式和 Cauchy–Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left[\int_{\frac12}^1\left(f(x)-f\left(\frac12\right)\right)\mathrm{d}x+\frac12 f\left(\frac12\right)\right]^2\\&=\left[\int_{\frac12}^1\int_{\frac12}^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac12} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\&=\left[\int_{\frac12}^1(1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac12} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\&\leqslant 2\left[\int_{\frac12}^1(1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right]^2+2\left[\int_0^{\frac12} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\&\leqslant 2\left[\int_{\frac12}^1(1-t)^2\,\mathrm{d}t\int_{\frac12}^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t+\int_0^{\frac12}x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac12}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{12}\int_0^1\left(f'(x)\right)'\end{aligned}$$

由此, 不等式得证

练习 6.27 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明：当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11$$

并给出取等号的条件。

证明 由条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

利用离散柯西不等式, 即 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2$, 等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立.

有

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}&=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac12(x+27)}+\sqrt{\frac23}\cdot\sqrt{\frac32(13-x)}\\&\leqslant\sqrt{1+2+\frac23}\cdot\sqrt{x+\frac12(x+27)+\frac32(13-x)}=11\end{aligned}$$

且等号成立的充分必要条件是：

$$x=\frac12(x+27)=\frac23\sqrt{\frac32(13-x)}\ ,\quad \text{即 } x=9$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11$$

特别当 $x=9$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

根据周期性, 以及 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 有

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=11\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=11$$

所以取等号的充分必要条件是 $x=9$

例6.76 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 求证:

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{15}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 (by 西西) 由 Cauchy–Schwarz 不等式

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 (1+3x^4)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 (1+3x^4)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

即

$$\sqrt{\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

再利用均值

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

平方即有

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{15}{4}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.77 $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的连续可导函数, $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

解 法 I (by ytdwdw). 利用 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}&=\left[\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right)^2\right]^{\frac12}=\left[\int_0^1\left(\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac12}\\&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1|f'(xt)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{\int_0^t|f(x)|^2\,\mathrm{d}x}{t00^2}\right)^{\frac12}\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=2\left(\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

法 II (by 西西). 注意到

$$f^2(x)=\int_0^x f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}LHS&=2\int_0^1\frac{1}{x^2}\int_0^x f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{换序}}2\int_0^1 f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\int_t^1\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f'(t)f(t)\frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 2\int_0^1 f'(t)f(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\sqrt{\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

平方显然!

本题的套路: 建立 f 与 f' 的不等式关系:

$$
f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t
$$

若题中涉及 f^2 将上式 f 换 f^2 即可, 也就是说 f 是可以表示任意复杂的东西, 从而转换重积分交换次序进行柯闵等即可

例6.78 (西西) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可微, 且 $f(0)=0, m<n\in\mathbb{N}^+$. 证明:

$$
\int_0^1 \frac{|f^n(x)|}{x^m}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^m}{(m-1)^m}\int_0^1 |f'(t)|^m|f(t)|^{n-m}\,\mathrm{d}t
$$

证明 (by 西西) 注意到 (不妨设 $f>0$)

$$
|f(x)|^n=n\int_0^x f'(t)f^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t
$$

故

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f^n(x)}{x^m}\,\mathrm{d}x&=n\int_0^1\left(\frac{1}{x^m}\int_0^x f'(t)f^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\text{换序}} n\int_0^1\left(f'(t)f^{n-1}(t)\int_t^1 x^{-m}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&=n\int_0^1 f'(t)f^{n-1}(t)\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1-t^{m-1}}{t^{m-1}}\,\mathrm{d}t \\
&<\frac{n}{m-1}\int_0^1 f'(t)f^{n-1}(t)\cdot\frac{1}{t^{m-1}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Holder}}{\leqslant}\frac{n}{m-1}\left(\int_0^1\frac{f^n(t)}{t^m}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_0^1 f'^m(t)f^{n-m}(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}
$$

从而可得

$$
\int_0^1 \frac{|f^n(x)|}{x^m}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^m}{(m-1)^m}\int_0^1 |f'(t)|^m|f(t)|^{n-m}\,\mathrm{d}t
$$

例6.79 (Favard 不等式) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负凹函数, 则

$$
\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p
$$

证明 (by 西西)[2] 不妨设 $f(0)=f(1)=0$, $f\in C^2[0,1]$, 则 $f''(x)<0$. 设 $f(x)=-\int_0^1 K(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 Green 函数

$$
K(x,t)=\begin{cases}t(1-x), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\\ x(1-t), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}
$$

由 Minkowski 不等式

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&=\left[\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)(-f''(t))\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1 K^p(x,t)(-f''(t))^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

[2]西西的大学数学竞赛搞笑秘密献给浪哥

$$= (1+p)^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 t(1-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \int_0^1 K(x,t) f''(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 K(x,t) f''(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$$

对于一般情况, 用光滑凹函数逼近 f 即可.

注：令 $p \to +\infty$ 可得不等式 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \leqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

例6.80 若 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续上凹函数, 且满足 $f(0)=1$, 证明:

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 法 1: (by 西西) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 利用上凹函数的性质可得

$$\begin{aligned}F(x) &= x\int_0^x f(ux+(1-u)\cdot 0)\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant x\int_0^1 \left[uf(x)+(1-u)\right]\mathrm{d}u = \frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\end{aligned}$$

令 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x, U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则原命题等价于证明 $2U^2-3I\geq 0$, 又

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}F(x) = F(1)-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant U-\int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

即 $3I\leqslant 2U-\frac{1}{2}$, 故

$$2U^2-3I \geqslant 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right) = 2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

原命题得证

法 2: (by 西西) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 由 $f(x)$ 的上凹性质得

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1\int_0^x \left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(xf(x)+x\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \big(xf(x)+x\big)\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

法 3: (by 西西) 设

$$I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x, \quad U = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow 2U^2 - 3I \geq 0$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 因为

$$f(ax) = f(ax + (1-a)\cdot 0) \geq af(x) + 1 - a$$

对 $\forall a \in (0,1)$ 积分

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2} \quad \text{即 } 2F(x) \geq xf(x) + x$$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leq F(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 (xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{2}I \leq F(1) - \frac{1}{4}$$

因为 $U = F(1)$，所以

$$2U^2 - 3I = \frac{16U^2 - 24I}{8} \geq \frac{(6I+1)^2 - 24I}{8} = \frac{(6I-1)^2}{8} \geq 0$$

例6.81 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求证：

$$\int_0^1 \big|f'(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big|f''(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

证明 对任意 $0 < \xi < \frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3} < \eta < 1$, 则存在 $\lambda \in (\xi,\eta)$, 使得

$$|f'(\lambda)| = \left|\frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}\right| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)|$$

因此对任意的 $x \in (0,1)$ 成立

$$|f'(x)| = |f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t)dt| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \int_0^1 |f''(t)|dt$$

分别对 ξ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上和对 η 在 $(\frac{2}{3},1)$ 上积分以上不等式，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}|f'(x)| &\leq \int_0^{\frac{1}{3}} |f(\xi)|d\xi + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(\eta)|d\eta + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt\end{aligned}$$

于是

$$|f'(x)| \leq 9\int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f''(t)|dt, \qquad x \in [0,1]$$

对上式两边在 $[0,1]$ 积分, 得到

$$\int_0^1 \big|f'(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big|f''(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

例6.82 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq A \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

A 的最小值

证明 (by Veer) 设 $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(a)|$, 由积分中值定理得

$$\int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x = |f'(\xi)|, \quad \xi \in (0,1)$$

$$f'(\xi) = f'(a) + \int_a^{\xi} f''(x) \mathrm{d}x \Longrightarrow |f'(\xi)| \leqslant |f'(a)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x \tag{6.9}$$

1° 若存在 x_0 使得 $f(x_0) = 0$. 则 $|f(x)| = |f(x) - f(x_0)|$

2° 若不存在 x_0 使得 $f(x_0) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不变号, 且取 $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$

$$f(x) \geqslant |f(x)| - |f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$$

所以

$$f(x) \geqslant |f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi_x)||x - x_0| \geqslant |f'(a)||x - x_0|$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x &\geqslant |f'(\xi)| \int_0^1 |x - x_0| \mathrm{d}x \\ &= |f'(\xi)| \left(\int_0^{x_0} (x_0 - x) \mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 (x - x_0|) \mathrm{d}x \right) \\ &= |f'(\xi)| \left(\frac{1}{2} - x_0(1 - x_0) \right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{2} - x_0(1 - x_0) \geqslant \frac{1}{2} - \left(\frac{x_0 + 1 - x_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

所以

$$\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4} |f'(a)| \Longrightarrow |f'(a)| \leqslant 4 \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$$

综合 (6.9) 式得

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq 4 \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

4 是最小值, 因为当 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ 时

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x = 4 \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x$$

例6.83 (CMC, 2018) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x.$$

证明 设 $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(x_1)|$, $\min\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x \geqslant \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(x) \mathrm{d}x \right| = |f'(x_1) - f'(x_0)| \geqslant M - m$$

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^1 \mathrm{d}x = M$. 故, 只需证明

$$m \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m=0$. 此时 (6.10) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x)>0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情况讨论.

(i). $f(0)\geqslant 0$. 此时 $f(x)\geqslant 0\,(x\in[0,1])$. 由 $f'(x)=|f'(x)|\geqslant m$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x + f(0)\\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(\xi)x\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^1 mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

故, (6.10) 成立.

(ii). $f(0)<0$. 此时有 $f(1)\leqslant 0$, 根据 f 的单调性, 有 $f(x)\leqslant 0\,(x\in[0,1])$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(1)-f(x))\,\mathrm{d}x - f(1)\\ &\geqslant \int_0^1 |f(1)-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|f'(\xi)\right|(1-x)\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_0^1 m(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

此时 (6.10) 也成立.

注：由 $f(0)f(1)\geqslant 0$, 可不妨设 $f(x)\geqslant 0, x\in[0,1]$. 可只考虑 (i).

例6.84 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 若成立 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{\frac12}^1 F(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[0,1]$. 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 24\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

解 由分部积分,

$$-2\int_{\frac12}^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac12}^1 F(x)\,\mathrm{d}(1-2x) = -F(1) - \int_{\frac12}^1 (1-2x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac12}(1+x^2)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac12}^1 [1+(1-x)^2]f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

令 $g(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\in[0,\frac12),\\ 1+(1-x)^2, & x\in[\frac12,1)\end{cases}$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+\lambda g(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 (1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

而

$$\int_0^1 (1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac12}(1+\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$= 1 + \frac{13}{6}\lambda + \frac{283}{240}\lambda^2 = \frac{4}{849} + \frac{283}{240}\left(\lambda + \frac{260}{283}\right)^2$$

因此，

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{849}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例6.85 (AMM11946)Let f be a twice differentiable function [0,1] to $\mathbb{R}$ with f'' continuous on [0,1] and $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Proof:

$$4860\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 11\int_0^1 \big(f''(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

解 Let $g(x)$ be the piecewise differentiable function defined as

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \in [0, 1/3), \\ 1-2x & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ x-1 & \text{if } x \in [2/3, 1), \end{cases}$$

and let

$$G(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{if } x \in [0, 1/3), \\ -x^2 + x - \dfrac{1}{6} & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} & \text{if } x \in [2/3, 1). \end{cases}$$

Since $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, it follows that

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hence, by integrating by parts,we obtain

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(g(x)) = \big[f(x)g(x)\big]_0^1 - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}(f(x)) = \int_0^1 g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}(G(x)) = -\big[f'(x)G(x)\big]_0^1 + \int_0^1 f''(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f''(x)G(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Finally, by Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 \big(G(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \big(f''(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4860}\int_0^1 \big(f''(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

because

$$\int_0^1 \big(G(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^4}{4}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 + x - \frac{1}{6}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4860}.$$

练习 6.28 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导且可积，若 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 0$

求证：

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 27\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证明 考虑

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 1-2x, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ x-1, & x \in [\frac{2}{3}, 1) \end{cases}$$

由 Cauchy-Schwarz 容易证明. 以下略

✍ **练习 6.29** 若 $f(x):[0,1]\to R$ 是连续可导函数，且 $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx=0$, 则有:

$$\int_0^1 (f'(x))^2dx \geq \frac{12n^2}{4n^2-10n+7}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证明 提示：设

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\frac{1}{2n}] \\ 1-(2n-1)x, & x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}] \\ x-1, & x\in[\frac{1}{n},1]. \end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz

✍ **练习 6.30** 若 $f(x):[a,b]\to R$ 是连续可导函数，且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则有:

$$\int_a^{2b-a}(f'(x))^2dx \geq \frac{3}{2(b-a)^3}\left(\int_a^{2b-a} f(x)dx\right)^2$$

证明 设

$$g(x)=\begin{cases} x-a, & x\in[a,b] \\ 2b-a-x, & x\in[b,2b-a]. \end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz

✍ **练习 6.31** 若 $f(x):[0,1]\to R$ 是连续可导函数，且 $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2}{2n+1}} f(x)dx=0$, 则有:

$$\int_0^1 (f'(x))^2dx \geq \frac{3(2n+1)^2}{4n^2-6n+3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证明 设

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\frac{1}{2n+1}] \\ 1-2nx, & x\in[\frac{1}{2n+1},\frac{2}{2n+1}] \\ x-1, & x\in[\frac{2}{2n+1},1]. \end{cases}$$

然后仿照上面一样用 Cauchy-Schwarz

例6.86 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\geqslant 0$, 并满足

$$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.11}$$

证明: $f(x)\leqslant 1+x,\ 0\leqslant x\leqslant 1$.

解 (by 楚坛) 令 $g(x)=1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $g(0)=1$. 由 f 的连续知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $g'(x)=2f(x)$. 由 (6.11) 知

$$f(x)\leqslant g(x),\ \forall x\in[0,1], \tag{6.12}$$

由此得微分不等式

$$g'(x)\leqslant 2\sqrt{g(x)},\ \forall x\in[0,1]. \tag{6.13}$$

尝试解微分方程 $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{g}$, 可得到通解 $\sqrt{g}-x=C$, 由此我们构造辅助函数 $h(x)=\sqrt{g(x)}-x$, 结合 (6.13) 得

$$h'(x)=\frac{1}{2}\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}-1\leqslant 0\ \forall\in[0,1].$$

上式表明 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减, 从而

$$h(x)\leqslant h(0),\ \forall x\in[0,1]. \tag{6.14}$$

结合 (6.12)、(6.14) 两式, 即知

$$f(x) \leqslant \sqrt{g(x)} = h(x) + x \leqslant x + 1, \ \forall x \in [0,1].$$

例6.87 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足

$$\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

求证:

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \geqslant 6 + 3\sqrt{2}$$

证明 首先由题设知对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 x(x-\alpha) f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

用反证法. 假设 $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| < 6 + 3\sqrt{2}$. 则上式结合 f 的连续性知, 对 $\forall \alpha \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} 1 = \left| \int_0^1 x(x-\alpha) f(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_0^1 |x(x-\alpha) f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &< (6+3\sqrt{2}) \int_0^1 x(x-\alpha)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由上式知对 $\forall \alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} < \int_0^1 |x(x-\alpha)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha x(\alpha - x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 x(x-\alpha)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha \triangleq g(\alpha) \end{aligned} \tag{6.15}$$

然而 $g'(\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{2}$, 故 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0,1]$ 为 $g(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值点, 且

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

此与 (6.15) 式矛盾!

例6.88 设 $f(x) \in C$ 是实值函数，且满足

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \cdots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)dx = 1$$

证明:

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq n^2$$

证明 首先，我们考虑多项式 $P(x)$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

若多项式 $P(x)$ 也满足上面的条件，那么

$$\int_0^1 (P(x))^2 dx = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

为了求出系数 a_i 我们再次利用条件.

$$\int_0^1 x^k P(x)dx = 1 \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{k+n}=1 \qquad k=0,1,\ldots n-1$$

设

$$H(x)=\frac{a_0}{x+1}+\frac{a_1}{x+2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x+n}-1$$

则显然有

$$H(0)=H(1)=\cdots=H(n-1)=0$$

$H(x)$ 应该有

$$H(x)=\frac{A\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

通过对比系数得 $A=-1$, 及

$$a_k=(-1)^{n-k-1}\frac{(n+k)!}{(k!)^2\cdot(n-k-1)!} \qquad k=0,1,\ldots n-1$$

用数学归纳法不难证明 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k=n^2$, 所以，若多项式 $P(x)$ 满足上面的性质，则

$$\int_0^1(P(x))^2dx=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=n^2$$

取满足以上条件的多项式 $P(x)$ 应用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_0^1(P(x))^2dx\int_0^1(f(x))^2dx\geq\left(\int_0^1P(x)f(x)dx\right)^2=n^4$$

$$\Rightarrow\int_0^1(f(x))^2dx\geq n^2$$

例6.89 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且满足 $\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x=0$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 求证：

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}M\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}M$$

证明 即证

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{M}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{M}$, $x=a+(b-a)x$, 从而有 $\max\limits_{x\in[a,b]}g(x)=1$, 以及

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_0^1(b-a)g\big[a+(b-a)t\big]\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g\big[a+(b-a)t\big]\,\mathrm{d}t$$

再令 $G(t)=g\big[a+(b-a)t\big]$, 且 $\int_0^1G^3(t)\,\mathrm{d}t=0$ 于是, 欲证的不等式变为:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant\int_0^1G(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

又 $\int_0^1G(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\big[G(t)-G^3(t)\big]\,\mathrm{d}t$, 于是令 $G(t)=y\in[-1,1]$

对于函数 $H(y)=y-y^3$ 有 $H'(y)=1-3y^2$, 令 $H'(y)=0\Longrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 从而

在 $[-1,1]$ 上, $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant y-y^3\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, 于是

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\int_0^1\big[G(t)-G^3(t)\big]\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

从而

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant -\frac{2\sqrt{3}}{9} \leqslant \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9} \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

即成立

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

综上，原不等式得证。

例6.90 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续的一阶导数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f^2(x)+(f'(x))^2\right)dx=1$

证明: $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $|f(x)|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 (by 西西) 由条件可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx \leq 1\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}(f''(x))^2dx \leq 1$$

故知道这两个无穷积分收敛，由 Cauchy-Schwarz 不等式，知道

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)f'(x)|dx \leq 1$$

上面的无穷积分也是收敛的，接着，我们证明

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x)=\lim_{x\to-\infty} f^2(x)=0$$

为此，先看正无穷的情况。由于积分收敛，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$,
当 $x,y>M$，(不妨设 $x<y$) 有

$$\int_x^y|f(x)f'(x)|dx<\varepsilon$$

因此，对任意的 $x,y>M,(x<y)$, 有

$$|f^2(x)-f^2(y)|=2\left|\int_x^y f'(t)f(t)dt\right|<2\int_x^y|f'(t)f(t)|dt<2\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=A$, 再次看到无穷积分收敛，故只能有 $A=0$，因此有

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x)=0$$

同理可得

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x)=0=\lim_{x\to-\infty} f^2(x)$$

对 $\forall x\in\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}(f^2(x)-f(a))+\frac{1}{2}(f^2(x)-f(-a)) \\
&= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_a^x f(y)f'(y)dy+\int_{-a}^x f(y)f'(y)dy\right) \\
&= \int_{+\infty}^x f(y)f'(y)dy+\int_{-\infty}^x f(y)f'(y)dy \\
&\leq \int_{-\infty}^x|f(y)f'(y)|dy \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f^2(x)+(f'(x))^2\right)dx\right]=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

马上得到

$$|f(x)|<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例6.91 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上处处大于 0, 且对于 $L>0$ 满足 Lipschiz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$, 又已知对于 $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$ 有

$$\int_c^d \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\alpha\,,\quad \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\beta$$

证明下列积分不等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

解 法 I(by 西西). 由积分第一中值定理知 $\exists x_0\in[c,d]$. s.t

$$\frac{d-c}{f(x_0)}=\int_c^d \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\alpha$$

则 $f(x)\leqslant f(x_0)+L|x-x_0|$, 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^{x_0} f(x_0)+L|x-x_0|\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b f(x_0)+L|x-x_0|\,\mathrm{d}x\\&=f(x_0)(b-a)+\frac{L}{2}(x_0-a)^2+\frac{L}{2}(b-x_0)^2\\\beta&\geqslant\int_a^{x_0}\frac{1}{f(x_0)+L|x-x_0|}\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b\frac{1}{f(x_0)+L|x-x_0|}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{L}\ln\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)\right]\end{aligned}$$

即

$$\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)\leqslant e^{L\beta}$$

记

$$m=1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\,,\quad n=1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}$$

则 $mn\leqslant e^{L\beta}(m,n\geqslant 1)$. 由 Cauchy 不等式

$$1=\frac{1}{(d-c)^2}\left(\int_c^d\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{\alpha}{(d-c)^2}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

再由 $m^2n^2\geqslant m^2+n^2-1(m,n\geqslant 1)$ 即知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac{(d-c)^2}{\alpha}\left(\frac{b-a}{d-c}+\frac{\alpha L[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2]}{2(d-c)^2}\right)\\&=\frac{(d-c)^2}{\alpha}\cdot\frac{m^2+n^2-2}{2\alpha L}\leqslant\frac{(d-c)^2}{\alpha}\cdot\frac{m^2n^2-1}{2\alpha L}\\&\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

法 II(by 西西). 记 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=m$, 则

$$m\leqslant f(x)\leqslant m+L|x-x_0|$$

从而

$$\begin{aligned}&2L\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant 2L\frac{d-c}{m}\int_a^{x_0}(m+L|x-x_0|)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b(m+L|x-x_0|)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\frac{2(b-a)L}{m}+\frac{L^2(x_0-a)^2+L^2(b-x_0)^2}{m^2}\right]\\&=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{m}\right)^2+\left(1+\frac{L(b-x_0)}{m}\right)^2-2\right]\end{aligned}$$

再由 $s^2t^2 \geqslant s^2+t^2-1(s,t\geqslant 1)$ 即知

$$\begin{aligned}
&2L\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)^2\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)^2-1\right]\\
=&\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[e^{2\ln\left(1+\frac{L(x_0-a)}{m}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{m}\right)}-1\right]\\
=&\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\exp\left(2L\int_a^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{m+L(x_0-x)}+2L\int_{x_0}^b\frac{\mathrm{d}x}{m+L(x-x_0)}\right)-1\right]\\
=&\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\left[\exp\left(2L\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)-1\right]
\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

练习 6.32 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，且

$$f(a)=f(b)=0,f'(a)=1,f'(b)=0,$$

求证:

$$\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\geq\frac{4}{b-a}$$

证明 方法 1 由 Schwarz 不等式知

$$\left(\int_a^b(6x-2a-4b)|f''(x)|\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b(6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x$$

又

$$\begin{aligned}
&\int_a^b(6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x=4(b-a)\\
&\int_a^b(6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x=4(b-a)^3\\
\therefore&\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\geq\frac{\int_a^b(6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x)^2}{\int_a^b(6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x}=\frac{4}{b-a}
\end{aligned}$$

方法 2 注意到对 $\forall\, c\in[a,b]$, 有

$$\int_a^b(x-c)f''(x)\mathrm{d}x=(c-a)-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=c-a,$$

而

$$\begin{aligned}
(c-a)^2\leq&\int_a^b(x-c)^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\\
=&\frac{(b-c)^3+(c-a)^3}{3}\cdot\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\geq&\frac{3(c-a)^2}{(b-c)^3+(c-a)^3}\\
=&\frac{3(c-a)^2}{(b-a)\left[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2\right]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2 - \frac{b-c}{c-a} + 1\right]}.$$

取 $\frac{b-c}{c-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a+2b}{3}$, 我们有

$$\int_a^b |f''(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}.$$

✍ **练习 6.33** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)| \leq M$. 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 对 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 证明:$|F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$.

证明 证法 1 设 $|F(c)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |F(x)|$, 则 $F'(c) = f(c) = 0$

$$\begin{aligned} |F(c)| = |\int_a^c f(x)\mathrm{d}x| &= |\int_a^c (f(x) - f(c))\mathrm{d}x| \\ &= |\int_a^c f'(\xi)(x-c)\mathrm{d}x| \\ &\leq M\int_a^c (c-x)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(c-a)^2 \end{aligned}$$

类似的可得

$$|F(c)| \leq M\frac{(b-c)^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$|F(x)| \leq \left\{\max\left\{M\frac{(c-a)^2}{2}, M\frac{(b-c)^2}{2}\right\}\right\}_{\min} \leq M\frac{(b-a)^2}{8}$$

证法 2 令

$$G(t) = F(t) - \frac{(t-a)(t-b)F(x)}{(x-a)(x-b)} \qquad t \in (a,b)$$

则 $G(t)$ 在 (a,b) 上二阶可微, 且 $G(a) = G(x) = G(b) = 0$

反复运用 *Rolle* 定理

$$\exists \quad \xi = \xi(x) \in (a,b) \quad st \quad G''(\xi) = 0$$

整理后得

$$F(x) = \frac{f'(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad x \in (a,b)$$

从而

$$|F(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{(b-a)^2}{8}$$

✍ **练习 6.34** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$,
证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

证明 令

$$F_1(x) = \int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|\mathrm{d}t, x \in [a, \frac{a+b}{2}]$$

$$F_2(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x |f'(t)|\mathrm{d}t, x \in [\frac{a+b}{2}, b]$$

则 $F_1(x), F_2(x)$ 分别在 $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$ 上有连续的导函数, $F_1(\frac{a+b}{2}) = F_2(\frac{a+b}{2}) = 0$, 且

$$F_1'(x) = -|f'(x)|, x \in [a, \frac{a+b}{2}]$$
$$F_2'(x) = |f'(x)|, x \in [\frac{a+b}{2}, b]$$

再由 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ 知

$$f(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f'(t)\mathrm{d}t, x \in [a, b]$$

从而

$$|f(x)| \le F_1(x), x \in [a, \frac{a+b}{2}]$$
$$|f(x)| \le F_2(x), x \in [\frac{a+b}{2}, b]$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \\
&\le -\int_a^{\frac{a+b}{2}} F_1(x)F_1'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b F_2(x)F_2'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}F_1^2(a) + \frac{1}{2}F_2^2(b) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x \int_a^{\frac{a+b}{2}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x \int_{\frac{a+b}{2}}^b \mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.35** $f(x)$ 定义在 $[0,1], f(x)$ 有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ge 4\max|f(x)|$$

证明 若 $f(x) \equiv 0$, 结论显然成立. 否则, $\exists x_0 \in (0,1), s.t \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)| = |f(x_0)| > 0$, 则

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = f'(\xi_1), \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = f'(\xi_2)$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x &\ge \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)|\mathrm{d}x \ge \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= |f'(\xi_1) - f'(\xi_2)| = \frac{|f(x_0)|}{x_0(1-x_0)} \\
&\ge 4|f(x_0)| = 4\max_{0\le x\le 1} |f(x)|
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.36** 设 $f(x)$ 为凸函数, 单调递减趋于 0, 且 $f(1) = 1, f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$, 证明:

$$-\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty} (x - [x] - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x < -\frac{1}{18}$$

证明

$$\because \quad \forall k, \int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore \quad \int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=-(\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\frac{1}{8}f(1))$$

其中

$$a_k=\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k))\mathrm{d}x+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+1)-f(x))\mathrm{d}x<0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，我们作分段线性函数

$$L(x)=2(f(k+1)-f(k+\frac{1}{2}))(x-k-\frac{1}{2})+f(k+\frac{1}{2})$$

由于 $f(x)$ 是凸的，有 $L(x)-f(x)\geq 0, x\in(k,k+1)$，故

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}-(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-f(x))\mathrm{d}x]\\&>\sum_{k=1}^{\infty}[\int_k^{k+\frac{1}{2}}-(x-[x]-\frac{1}{2})(L(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-L(x))\mathrm{d}x]\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+1))\\&>\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(f(k+\frac{1}{2})-f(k+\frac{2}{3}))\\&=\frac{1}{12}f(\frac{3}{2})=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

综合即得

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{18}$$

✍ **练习 6.37** 求所有的连续可导函数 $f:[0,1]\to(0,\infty)$，满足 $f(1)=ef(0)$，且

$$\int_0^1\frac{dx}{(f(x))^2}+\int_0^1(f'(x))^2dx\leq 2$$

证明 注意

$$\begin{aligned}0&\leq\int_0^1\left(f'(x)-\frac{1}{f(x)}\right)^2dx=\int_0^1(f'(x))^2dx-2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx+\int_0^1\frac{dx}{(f(x))^2}\\&=\left(\int_0^1(f'(x))^2dx+\int_0^1\frac{dx}{(f(x))^2}dx\right)-2\int_0^1(\ln f(x))'dx\\&=\left(\int_0^1(f'(x))^2dx+\int_0^1\frac{dx}{(f(x))^2}dx\right)-2\ln\frac{f(1)}{f(0)}\\&\leq 0\end{aligned}$$

所以 $f(x)f'(x)=1\Longrightarrow f(x)=\sqrt{2x+C}$, $C>0$, 由于

$$\frac{f(1)}{f(0)}=e\Longrightarrow C=\frac{2}{e^2-1}$$

故 $f(x)=\sqrt{2x+\dfrac{2}{e^2-1}}$

✍ 练习 6.38 是连续的, 且 $f,\dfrac{g}{f}$ 递增的, 求证:

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right)dx\le 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}dx$$

并说明右边系数 2 是最佳的.

证明 由切比雪夫不等式有

$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}dt\right)\le\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\le\frac{x}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}dt}$$

另外由 Cauchy-Schwarz 有

$$\left(\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}dt\right)\left(\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}dt\right)\ge\left(\int_0^x tdt\right)^2=\frac{x^4}{4}$$

即

$$\frac{1}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}dt}\le\frac{4}{x^4}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}dt$$

所以有

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\le\frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}dt$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}dx&\le\int_0^1\left(\int_0^x\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}dt\right)dx=\int_0^1\left(\int_t^1\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}dx\right)dt\\&=\int_0^1\frac{4t^2f(t)}{g(t)}\left(\int_t^1\frac{dx}{x^3}\right)dt\\&=2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)dt\\&\le 2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}dt\end{aligned}$$

另外一方面: 我们令 $f(t)=1,g(t)=t+\varepsilon,\varepsilon>0$ 则

$$\int_0^1\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}dx=\int_0^1\frac{x}{\frac{1}{2}x^2+\varepsilon x}dx=2\ln(1+2\varepsilon)-2\ln 2-2\ln\varepsilon$$

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt = \int_0^1 \frac{dt}{t+\varepsilon} = \ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\ln(1+2\varepsilon) - 2\ln 2 - 2\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon} = 2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-\frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\ln\varepsilon} + \frac{\ln 2}{\ln\varepsilon} + 1}{-\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln\varepsilon} + 1} = 2$$

例6.92 设 $f:[0,1]\to R$ 是连续可导函数，若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0$, 求证:

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx \geq 12\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证明

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 &= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - f(\tfrac{1}{2}))dx + \frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})\right]^2 \\
&= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dtdx + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\
&= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\
&\leq 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(t)dt\right]^2 + 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx\right]^2 \\
&\leq 2\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 dt \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)^2 dt + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)^2 dt\right] \\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2 dx
\end{aligned}$$

练习 6.39 设 f 是在 R 上有四阶连续可导的函数, $x\in[0,1]$, 满足

$$\int_0^1 f(x)dx + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$$

证明：存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(c) = 0$

证明 令 $G(t) = \int_{-t}^{t} g(x)dx - 8\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} g(x)dx$, 其中

$$g(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

易得 $G(0) = 0, G\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 由 Rolle 定理有存在 $t_0\in(0,1/2)$ 使得 $G'(t_0) = 0$. 由于

$$G'(t) = g(t) - 4g(\tfrac{t}{2}) - 4g(-\tfrac{t}{2}) + g(-t)$$

则 $G'(0) = 0, G'(t_0) = 0$, 则由 Rolle 定理有：$G''(t_1) = 0$, 又

$$G''(t) = g'(t) - 2g'(\tfrac{t}{2}) + 2g'(-\tfrac{t}{2}) - g'(-t)$$

显然 $G''(0) = 0$, 故由中值定理有 $G'''(t_2) = 0$, 又

$$G'''(t) = (g''(t) - g''(\tfrac{t}{2})) - (g''(-\tfrac{t}{2}) - g''(-t))$$

即

$$G'''(t_2) = (g''(t_2) - g''(\frac{t_2}{2})) - (g''(-\frac{t_2}{2}) - g''(-t_2))$$

又由拉格朗日中值定理有存在 $\theta_+ \in (t_2/2, t_2), \theta_- \in (-t_2, -\frac{t_2}{2})$,

$$(g''(t_2) - g''(\frac{t_2}{2})) - (g''(-\frac{t_2}{2}) - g''(-t_2)) = g'''(\theta_+)\frac{t_2}{2} - g'''(\theta_-)\frac{t_2}{2}$$

注意 $t_2 \neq 0$, 即 $g'''(\theta_+) - g'''(\theta_-) = 0$, 再利用拉格朗日中值定理 $g''''(\theta) = 0$, 即 $f^{(4)}\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = 0$. 将 $\theta + \frac{1}{2} \to \theta$, 即有 $f^{(4)}(\theta) = 0$

例6.93 Prove that

$$\int_0^1 \sin(\pi x) x^x (1-x)^{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e}{4!}$$

证明 First, we use $z^z = \exp(z\log z)$ where $\log z$ is defined for $-\pi \leq \arg z < \pi$.
For $(1-z)^{1-z} = \exp((1-z)\log(1-z))$, we use $\log(1-z)$ defined for $0 \leq \arg(1-z) < 2\pi$.
Then, let $f(z) = \exp(i\pi z + z\log z + (1-z)\log(1-z))$.
As shown in the Ex VI in the wikipedia link, we can prove that f is continuous on $(-\infty, 0)$ and $(1, \infty)$, so that the cut of $f(z)$ is $[0, 1]$. We use the contour: (consisted of upper segment: slightly above $[0, 1]$, lower segment: slightly below $[0, 1]$, circle of small radius enclosing 0, and circle of small radius enclosing 1, that looks like a dumbbell having knobs at 0 and 1, can someone edit this and include a picture of it please? In fact, this is also the same contour as in Ex VI, with different endpoints.)
On the upper segment, the function f gives, for $0 \leq r \leq 1$,

$$\exp(i\pi r) r^r (1-r)^{1-r} \exp((1-r)2\pi i).$$

On the lower segment, the function f gives, for $0 \leq r \leq 1$,

$$\exp(i\pi r) r^r (1-r)^{1-r}.$$

Since the functions are bounded, the integrals over circles vanishes when the radius tend to zero.
Thus, the integral of $f(z)$ over the contour, is the integral over the upper and lower segments, which contribute to

$$\int_0^1 \exp(i\pi r) r^r (1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r - \int_0^1 \exp(-i\pi r) r^r (1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r$$

which is

$$2i\int_0^1 \sin(\pi r) r^r (1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r.$$

By the Cauchy residue theorem, the integral over the contour is

$$-2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}).$$

From a long and tedious calculation of residue, it turns out that the value on the right is

$$2i\frac{\pi e}{24}.$$

Then we have the result:

$$\int_0^1 \sin(\pi r) r^r (1-r)^{1-r}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi e}{4!}.$$

6.2 微积分基本公式

定义 6.2. 定和式

如果 $\Delta(F(x))=f(x)$，则 $f(x)$ 的定和式等于

$$\sum_a^b f(x)=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

其中，定和式 $\sum\limits_a^b f(x)$ 表示有限和 $\sum\limits_{k=a}^{b-1} f(k)$.

例6.94 利用不定和式的公式计算 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

解 (by 吕荐瑞)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2&=\sum_1^{n+1} x^2=\sum_1^{n+1}\left(x(x-1)+x\right)\\&=\sum_1^{n+1}\left(x^{\underline{2}}+x^{\underline{1}}\right)=\left[\frac{1}{3}x^{\underline{3}}+\frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right]_1^{n+1}\\&=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}+\frac{(n+1)\,n}{2}-0\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

类似地，也可以计算出高次方和.

定理 6.11. 分部求和

定和式的分部求和公式为

$$\sum_a^b u\Delta v=[uv]_a^b-\sum_a^b Ev\Delta u.$$

其中移位算子 $E(f(x))=f(x+1)$.

例6.95 求 $\sum\dfrac{x}{2^x}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^k}$

解 在分部求和公式中令 $u=x$，$\Delta v=\dfrac{1}{2^x}$，得到

$$\begin{aligned}\sum\frac{x}{2^x}&=-2\sum x\cdot\Delta\left(\frac{1}{2^x}\right)\\&=-2x\cdot\frac{1}{2^x}+2\sum\frac{1}{2^{x+1}}\cdot\Delta x\\&=-2x\cdot\frac{1}{2^x}+\sum\frac{1}{2^x}\\&=-2x\cdot\frac{1}{2^x}-2\frac{1}{2^x}+C=-\frac{2x+2}{2^x}+C\end{aligned}$$

由上面不定和式的结果，可以得到定和式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_1^{n+1}\frac{x}{2^x}=\left[-\frac{2x+2}{2^x}\right]_1^{n+1}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

以及无限和式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\sum_1^{\infty}\frac{x}{2^x}=\left[-\frac{2x+2}{2^x}\right]_1^{\infty}=2-0=2$$

例6.96 求定积分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

解 由反函数定义我们知

$$\arccos(\cos \text{狗}) = \text{狗},\ \text{狗} \in [0,\pi)$$

结合诱导公式

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)) = x - \tfrac{\pi}{2}$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \arccos(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$$

例6.97 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2$ 则 $f(x) =$ _____

解 令 $A = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x) = 3x^2 - A - 2$, 故

$$A = \int_0^1 (3x^2 - A - 2)\,\mathrm{d}x = 8 - 2(A+2) = 4 - 2A$$

解得 $A = \frac{4}{3}$, 因此 $f(x) = 3x^2 - \frac{10}{3}$

例6.98 设函数 $f(x)$ 是连续可导函数, 且

$$f(x) = x + x\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + x^2 \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

求 $f(x)$

解 设 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = A$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0) = B$, 则 $f(x) = x(1+A) + Bx^2$

$$A = (1+A)\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + B\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$B = 1 + A$$

解得 $A = 5, B = 6$, 于是得 $f(x) = 6x + 6x^2$

例6.99 设 $f(x)$ 满足 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. 求 $f(x)$

证明 令 $A = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $f^2(x) = (3x - A\sqrt{1-x^2})^2$, 故

$$A = \int_0^1 (3x - A\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x = \frac{2A^2}{3} - 2A + 3$$

解得 $A = \frac{3}{2}$ 或者 $A = 3$, 因此 $f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$

例6.100 设 $f \in [0,1]$, 若有 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x$. 求 $f(x)$

证明 (by 欧阳) 首先有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{d}t^2 = \int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,\mathrm{d}x$$

(凑完全平方公式) 故

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\int_0^1\left(f(x^2)-x\right)^2\mathrm{d}x\Longrightarrow f(x^2)=x\Longleftrightarrow f(x)=\sqrt{x}$$

(by 啦啊啦)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f^2(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

故

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\right)^2\leqslant 0$$

当且仅当 $f(x)=\sqrt{x}$ 取 “=”

例6.101 已知 $f(x)=\int_0^1\left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t$, 则 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=$

解

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^1\left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t=\int_0^x\left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t+\int_x^1\left|\ln|x-t|\right|\mathrm{d}t\\&=\underbrace{\int_0^x\left|\ln(x-t)\right|\mathrm{d}t}_{u=x-t}+\underbrace{\int_x^1\left|\ln(t-x)\right|\mathrm{d}t}_{u=t-x}\\&=\int_0^x|\ln u|\,\mathrm{d}u+\int_0^{1-x}|\ln u|\,\mathrm{d}u=-\int_0^x\ln u\,\mathrm{d}u-\int_0^{1-x}\ln u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$f'(x)=\ln(1-x)-\ln x$, 易知 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=f(\frac{1}{2})$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=f(\tfrac{1}{2})=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\ln u\,\mathrm{d}u=1+\ln 2$$

练习 6.40 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数, 它的反函数为 $f^{-1}(x)$, 且 $f(x)$ 满足等式 $\int_2^{f(x)}f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$, 则 $f(x)=$ (　　)

(A) $\sqrt{x}-1$　　(B) $\sqrt{x}+1$　　(C) $2\sqrt{x}-1$　　(D) $2\sqrt{x}+1$

解 令 $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9=0\Longrightarrow x=9$, 又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数

故 $f(9)=2$, 代入选项可知 A 正确

令 $f^{-1}(t)=u\Longrightarrow t=f(u)\Longrightarrow\mathrm{d}t=f'(u)\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int_2^{f(x)}f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t&\xlongequal{f^{-1}(t)=u}\int_9^x uf'(u)\,\mathrm{d}u\\&=uf(u)\Big|_9^x-\int_9^x f(u)\,\mathrm{d}u\\&=xf(x)-9f(9)-\int_9^x f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9\end{aligned}\tag{6.16}$$

对 (6.16) 求导

$$xf'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\Longleftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

对上式积分可得

$$f(x)=\sqrt{x}+C$$

代入 $f(9)=2$ 得 $f(x)=\sqrt{x}-1$

例6.102 (第七届数学类决赛) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$

解 令 $g(x)=f(x)-x$, 则有

$$xg(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

对于 $x>0$, 根据积分平均值定理, 存在 $x_1\in(0,x)$, 使得

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\,\mathrm{d}=g(x_1)\frac{x}{2}.$$

因而 $g(x)=g(x_1)$. 设 $x_0=\inf\{t\in(0,x)|f(x)=f(t)\}$. 则有 $g(x_0)=g(x)$.

若 $x_0>0$, 则重复上面过程, 可知存在 $y_0\in(0,x_0)$ 使得 $g(y_0)=g(x_0)=g(x)$. 这与 x_0 的取法矛盾. 因此, 必有 $x_0=0$. 这说明 $g(x)=g(0)$. 同理, 对 $x<0$, 也可以证明 $g(x)=g(0)$. 总之, $g(x)$ 是常数. 于是 $g(x)=x+C$, C 是常数

例6.103 [14] 求解积分方程

$$f(t)=at-\int_0^t\sin(x-t)f(x)\,\mathrm{d}x\quad(a\neq0)$$

证明 由于 $f(x)*\sin t=\int_0^t f(x)\sin(x-t)\,\mathrm{d}x$, 所以原方程为

$$f(x)=at+f(x)*\sin t\,.$$

记 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, 因为 $\mathscr{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$, $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$, 所以对方程两边取拉氏变换得

$$F(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}F(s)\,,$$

即

$$F(s)=a\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right).$$

取拉氏逆变换得原方程的解为

$$f(t)=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right).$$

例6.104 已知 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且

$$\int_0^x f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=e^{2x}-1\,,\quad x\geqslant0$$

求 $f(x)$.

解 (by ytdwdw) 记 $F(s)$ 为 $f(s)$ 的 Laplace 变换, 则

$$F^2(x)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}=\frac{2}{s(s-2)}\,,\quad s>2\,.$$

因为 f 非负, 从而 F 非负, 所以

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s(s-2)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(s-1)^2-1}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{s-1}\frac{1}{\sqrt{1-(s-1)^{-2}}}=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^{n}\frac{1}{4^n(s-1)^{2n+1}}\,,\quad s>2\end{aligned}$$

从而

$$f(x)=\sqrt{2}e^{x}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}^{n}\frac{x^{2n}}{4^{n}(2n)!}$$
$$=\sqrt{2}e^{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n}(n!)^{2}}=\sqrt{2}e^{x}I_{0}(x)\,,\quad x\geqslant 0$$

其中 $I_0(x)$ 为零阶第一类修正 Bessel 函数

例6.105 设 $f(x)=\int_0^x\frac{2\ln u}{1+u}\,\mathrm{d}u,\ x\in(0,+\infty)$, 则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=$ _____

解 令 $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, 注意到

$$g(1)=2f(1)=\frac{\pi^2}{3}$$

因此

$$g(x)=\int_1^x\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x+g(1)=\ln^2 x+\frac{\pi^2}{4}$$

例6.106 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由题设, 知 $f(0)=0$, $g(0)=0$. 令 $u=xt$, 得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}\quad x\neq0$$

从而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}\quad x\neq0$$

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=A$$

由于

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}$$
$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例6.107 计算

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{2x}|x-t|\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3}$$

解 其中 (注意奇偶性)

$$\int_0^{2x}|x-t|\sin t\,\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_{-x}^{x}|u|\sin(x-u)\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_{-x}^{x}|u|(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,\mathrm{d}u$$
$$=2\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u\cdot\sin x$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{2x}|x-t|\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u}{x^2}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{2x}=1$$

或者

$$\int_0^x u\cos u\,\mathrm{d}u\sim\int_0^x u\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$$

6.2.1 积分上限的函数及其导数

定理 6.12. 变上限积分的求导

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

♡

例6.108 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，$A<a<b<B$. 试证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)\,.$$

解

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=}\lim_{h\to 0}\left[f(b+h)-f(a+h)\right]$$

$$=f(b)-f(a)$$

例6.109 设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $f'(0)$

解 显然 $f(0)=0$，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t=x+h}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

6.2.2 Newton-Leibniz 公式

定理 6.13. 牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

♡

证明 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间，记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ (i = 1,2,\cdots,n)$，$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$

应用拉格朗日中值定理，必存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

例6.110 设 $f \in \mathbb{R}[A,B], a, b \in (A,B)$ 是 f 的两个连续点，证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

解 [[11]]

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\xlongequal{t=x+h} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

错误证法

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &\overset{①}{=\!=} \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{②}{=\!=} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \overset{③}{=\!=} f(b) - f(a)\end{aligned}$$

错误原因分析

① 没有根据就将求极限与求积分运算交换顺序;

② 对差商求极限时忘记了题中 f 只在两点连续，并无可导条件;

③ 即使 f 在 $[a,b]$ 上可导，但导函数也不一定可积，因此不能用 Newton-Leibniz 公式.

6.3 定积分的换元法和分部积分法

例6.111 计算积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin^2 t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,\mathrm{d}t = \pi$$

例6.112 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解 法 1(换元法)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{u=2x} -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\sin u\,\mathrm{d}u\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\overbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin u\,\mathrm{d}u}^{t=u-\frac{\pi}{2}}\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t}_{\frac{\pi}{2}-t=x}\\
&= -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

法 2(换元法)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x &\xlongequal{x=2t} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\mathrm{d}t\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin x + \ln\cos x)\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t}_{u=\frac{\pi}{2}-t}\\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u)\\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

练习 6.41 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\mathrm{d}(-\cot x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[-x^2 \cot x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \,\mathrm{d}x \\
&= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}(\ln \sin x) \\
&= \Big[2x \ln \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= 0 - 2 \times \Big(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \Big) = \pi \ln 2
\end{aligned}
$$

练习 6.42 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

解 (by MSE) 可以证明

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \Longleftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos\theta) \,\mathrm{d}\theta = 0
$$

由欧拉公式, 我们有 $2\cos\theta = e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta}(1 - e^{-2\mathrm{i}\theta})$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Im} \ln(2\cos\theta) \,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Im} \ln(e^{\mathrm{i}\theta}) \,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Im} \ln(1 - e^{-2\mathrm{i}\theta}) \,\mathrm{d}\theta \\
&\overset{\text{Tayor}}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \,\mathrm{d}\theta + \operatorname{Im} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2n\mathrm{i}\theta} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \operatorname{Im} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{i}(1 - e^{-\pi \mathrm{i} n})}{2n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}(1 + (-1)^n)}{2n^2}
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

例6.113 [15] 计算积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \mathrm{d}x$

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \mathrm{d}x &\overset{x=\tan t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) \,\mathrm{d}t \\
&\overset{t=\frac{\pi}{4}-u}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u) \,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} \ln 2
$$

例6.114 证明: $\displaystyle\int_0^{2017} \frac{1}{x}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2017}\right)^{2017}\right] \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017}$

证明

$$
I = \int_0^{2017} \frac{1}{x}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2017}\right)^{2017}\right] \mathrm{d}x
$$

$$\xlongequal{u=\frac{x}{2017}} \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{2017}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-u^{2017}}{1-u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1 \sum_{i=0}^{2016} u^i\,\mathrm{d}u = \sum_{i=0}^{2016} \int_0^1 u^i\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{i=0}^{2016} \frac{1}{i+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2017}$$

例6.115 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

解 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 则

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin nx - \sin(n-1)x][\sin nx + \sin(n-1)x]}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1}$$

因此

$$I_n = \frac{1}{2n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+1$$

例6.116 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 试证明:

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}f(2)$$

解 令 $\frac{2}{1+t} = 1+x$, 得

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\frac{2}{1+t}=1+x} \int_1^0 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\times\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

由题 $f(xy)=f(x)+f(y)$

$$I = \int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}f(2)$$

例6.117 求定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

解

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x(1-\sin x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin x|\cos x|}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\sin x} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t - \int_1^0 \frac{t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(2t+1)-1}{\sqrt{t(1+t)}}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\big(t(1+t)\big)}{\sqrt{t(1+t)}} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[2\sqrt{t(1+t)}\Big]_0^1 - \Big[\ln\Big(x+\frac{1}{2}+\sqrt{t(1+t)}\Big)\Big]_0^1 \\
&= 2\sqrt{2} - \ln(3+2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

例6.118 计算定积分：$\displaystyle\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

解 法 1(利用恒等式). 注意到

$$2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2}, \quad x\in[0,2]$$

故有

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\arcsin(1-x)}{(1-x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u=x-1} \int_{-1}^1 \frac{\frac{\pi}{4}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\arcsin u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u}_{\text{奇偶性}} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

法 2(直接换元).

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal[x=2\sin^2 t]{\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}=t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{(2\sin^2 t-1)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\sin 2t}{\cos^2 2t+1}\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{2t=u} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{\cos^2 u+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} u\,\mathrm{d}(\arctan\cos u) \\
&= -\frac{1}{2}u\arctan\cos u\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\arctan\cos u\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\cos u=x} \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\text{奇偶性}} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

例6.119 求定积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解 注意到

$$2\arcsin\sqrt{x} - \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}, \quad x\in[0,1]$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{2x-1=u} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\arcsin u}{u^2+3}\,\mathrm{d}u + \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+3}}\,\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} \frac{\pi}{4}\ln 3
\end{aligned}
$$

练习 6.43 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi}\,\mathrm{d}x$

解 (西西)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos t\right)}{2x-\pi}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=2x-\pi} \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(t+\pi)\sin t\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{x=\sin\frac{t}{2}} \int_{-1}^{1} x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\Big[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\Big[\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1 = \frac{8}{\pi^2}
\end{aligned}$$

例6.120 求定积分: $I=\int_0^1 \exp\left(4\sqrt{\frac{t-t^2}{8t+1}}\right)\cdot\frac{1-8t+16t^2}{t+7t^2-8t^3}\,\mathrm{d}t.$

解 (by 西西)

$$\begin{aligned}
I &\xlongequal{t=x^2} 2\int_0^1 \exp\left(\frac{4x}{\sqrt{(1-x^2)(8x^2+1)}}\right)\cdot\frac{|1-4x^2|}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 e^{4xy}\frac{|1-4x^2|}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{4xy}\frac{4x^2-1}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{3(1-4y^2)}{(1+8y^2)\sqrt{(1-y^2)(1+8y^2)}}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{1-4x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{3(1-4x^2)}{(1+8x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}\frac{4(1-4x^2)(1+2x^2)}{(1+8x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+8x^2)}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{4xy}(4xy)'_x\,\mathrm{d}x = 2\left[\exp 4x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2(e-1)
\end{aligned}$$

例6.121 求定积分 $I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

解 (by 西西) 设 $x=\tan t$, 则

$$I \xlongequal{x=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ln\left(\frac{1}{\cos t(\sin t+\cos t)}\right)\mathrm{d}t$$

设 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)$, 则有

$$f(\pi/4-x)=f(x)$$

令 $t=\pi/4-u$, 那么有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\ln\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\frac{1}{f(\pi/4-u)}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u-I$$

只要计算

$$f=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos^2 t+\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\cos(x-\pi/4)\right)\mathrm{d}x$$

利用卡特兰数一个熟悉积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{G}{2}-\frac{\pi}{4}\ln 2$$

带入得

$$I=\frac{3\pi^2\ln 2}{64}-\frac{G}{8}$$

例6.122 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]$

解 (by 向禹) 首先有

$$\begin{aligned}I(n)&=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\overset{t=x^n}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\&\overset{\text{裂项}}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\&\overset{t^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln t}}{=\!=\!=}1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1\frac{\ln^k x}{1+x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此不难得到

$$I(n)=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}I^n(n)=e^{n\ln I(n)}&=e^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}\\&=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\end{aligned}$$

因此最后得到

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2$$

练习 6.44 计算积分: $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

解 在 $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ 中做倒代换即有

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

其中利用了恒等式 $\arctan\frac{1}{x}+\arctan x=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

练习 6.45 计算积分: $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$

解 在 $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$ 中做代换 $x=3u$ 有

$$3\int_0^{\infty}\frac{\ln(3u)}{9u^2+9u+9}\mathrm{d}u=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u+\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\mathrm{d}u$$

如果在 $\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\mathrm{d}u$ 做代换 $u=\frac{1}{t}$ 即得

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{t}}{t^2+t+1}\mathrm{d}t\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+u+1}\mathrm{d}u=0$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x&=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u=\frac{\ln 3}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u\\&=\frac{\ln 3}{3}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty}=\frac{2\ln 3}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{2\pi\ln 3}{9\sqrt{3}}\end{aligned}$$

✍ **练习 6.46** 计算积分: $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$

解 在 $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$ 中作代换 $x=\sqrt{2}u$ 得:

$$\sqrt{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln(\sqrt{2}u)}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{2u^2+3\sqrt{2}u+2}\mathrm{d}x$$

其中后者积分为 0, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}u+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{(u^2+\frac{3\sqrt{2}}{4})^2-\frac{1}{8}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\infty}\frac{1}{x^2-\frac{1}{8}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\int_{\frac{3\sqrt{2}}{4}}^{\infty}\frac{1}{x^2-\frac{1}{8}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\left(\sqrt{2}\ln 2\right)=\frac{\ln^2 2}{2}\end{aligned}$$

定理 6.14. 三角函数系的正交性

组成三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{6.17}$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交, 即在三角函数系 (6.17) 中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n)$$

♡

定理 6.15

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

♡

例6.123 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sqrt{\sin 2t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{1+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2-1}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sqrt{u^2-1}} \\
&\xlongequal{x=\sin t} \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}$$

例6.124 求定积分: $\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x.$

解

$$I = \int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{29\pi}{4}} = 3\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} \int_0^{\pi} \frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} &= \int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-t} \int_0^{\pi} \frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2^{\sin x}}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\cos x}}{1+2^{\cos x}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

$$I=\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}}\frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

定理 6.16. 周期性

设 $f(x)$ 是连续的周期性函数, 周期为 T, 则

(1) $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^{a+nT}f(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

♡

例6.125 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$

解

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{u=t-\pi}\int_{-\pi}^{2\pi}\frac{\sin u}{\sin^2 u+1}\,\mathrm{d}u=0$$

注意 $f(x)$ 是连续的周期性函数, 周期为 T, 则

$$\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

定理 6.17. 区间代换

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\mathrm{d}x$$

♡

例6.126 计算积分 $\int_1^2\frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int_1^2\frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\frac{3}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2\left(t+\frac{3}{2}\right)-3}{\sqrt{-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+3\left(t+\frac{3}{2}\right)-2}}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2t}{\sqrt{-t^2+\frac{11}{4}}}\,\mathrm{d}t=0$$

例6.127 求定积分: $I=\int_0^1\frac{1}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x(a>1)$

解 (by 西西)[3]

$$I\xlongequal{x=a\frac{1-y}{a-y}}-a^{-\frac{2}{5}}(a-1)^{-\frac{3}{5}}\int_0^1(1-y)^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}y$$

[3]西西的大学数学竞赛搞笑秘密献给浪哥

$$= \frac{-a^{-\frac{2}{5}}(a-1)^{-\frac{3}{5}}\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}$$

注：解答中的变换是由 $x = \dfrac{\alpha y+\beta}{cy+d}$ 按照 $x=0,1$ 分别变成 $1,0$ 待定出来的.

例6.128 求定积分: $\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{x\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6-x^2)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+\sin(\ln 6-x^2)}\,\mathrm{d}(x^2)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{u=\ln 6-t} \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin(\ln 6-u)}{\sin u+\sin(\ln 6-u)}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin t+\sin(\ln 6-t)}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

练习 6.47 令 $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

解 令

$$f(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)=e^{2x}+\sin x+\cos x+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

则

$$f'(x)=2e^{2x}+\cos x-\sin x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

那么有

$$f(x)-f'(x)=-e^{2x}+2\sin x+\frac{x^n}{n!}$$

故

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{2n!\sin x-n!e^{2x}+x^n}{e^{2x}+\sin x+\cos x+P_n(x)}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1 \mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}(f(x))\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\Big[x\Big]_0^1-\Big[\ln(f(x))\Big]_0^1\right\}\\
&= 1-\ln(e^2+\sin 1+\cos 1+e)
\end{aligned}$$

练习 6.48 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

解 注意到

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

以及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\dfrac{1}{1+\cos x}$, 故

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ln^2\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\ln^2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\frac{\sin x}{1+\cos x}=t}4\int_0^1\ln^2 t\,\mathrm{d}t=8\end{aligned}$$

✍ **练习 6.49** 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot\frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

解

$$\text{原式}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x\cdot\ln(\tan x)}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\sin t\cdot\ln(\tan t)}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot\frac{a+\cos x\cdot\ln(\tan x)}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi}{4}$$

✍ **练习 6.50** 计算积分:

$$\int_0^1\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$$

解 这里需要一些公式

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x=-\csc^2 x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc x=-\cot x\csc x,\csc^2 x=\cot^2 x+1$$

做代换 $x=\sin u$, 有

$$\int_0^1\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\frac{\cos u}{\sin^3 u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\cot u\csc^2 u\,\mathrm{d}u$$

利用分布积分

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\cot u d(\cot u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3u^2\cot u-u^3\csc^2 u)\cot u\,\mathrm{d}u$$

其中利用了 $\cot\dfrac{\pi}{2}=0$ 这个值所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\cot u\csc^2u\,\mathrm{d}u=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2\cot^2u\,\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\cot u\csc^2u\,\mathrm{d}u$$

移项:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^3\cot u\csc^2u\,\mathrm{d}u&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2\cot^2u\,\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2(\csc^2u-1)\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2d(\cot u)-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2\,\mathrm{d}u=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cot u\,\mathrm{d}u-\frac{\pi^3}{16}\end{aligned}$$

留意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cot u\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ud(\ln(\sin u))=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

做代换 $x=\dfrac{\pi}{2}-u$ 有 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ 所以

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{\sin 2x}{2})\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2\\\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x&=-\frac{\pi}{2}\ln 2\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cot u\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

最后就有

$$\int_0^1\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi^3}{16}$$

✍ 练习 **6.51** 计算积分:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{[(2x+1)^2(x^2-x+1)-(2x-1)^2(x^2+x+1)]\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}]}{6x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{d(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\\=&\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2-x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\=&\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

✍ **练习 6.52** 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{x}{\{(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}+(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\}\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

解

$$a(x)=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},\Rightarrow a'(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{a(x)}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{[(x-\frac{1}{2})a(x)+(x+\frac{1}{2})a(-x)]a(x)a(-x)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{a^2(x)(a^2-x)[a'(x)-a'(-x)]}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{a^2(x)a^2(-x)\{[a'(x)]^2-[a'(-x)]^2\}}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2a^2(-x)^2-(x-\frac{1}{2})^2a^2(x)}=\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x[a'(x)+a'(-x)]\,\mathrm{d}x}{2x}\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1 [a'(x)+a'(-x)]=\frac{a(1)-a(-1)}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}
\end{aligned}$$

✍ **练习 6.53** 计算积分:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}$$

解 先计算积分

$$I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}$$

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^\infty \frac{(-1)^n x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1-(-x)^{n+1}}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]\sum\limits_{k=0}^{n}(-x)^k}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}[x^2+ax+1]}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty \frac{1+x^2}{x^4+ax^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2+a}d(x-\frac{1}{x})\\
&=\frac{1}{\sqrt{2+a}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+a}}\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}[x^2+(1+2\sqrt{2})x+1][1-x+x^2+\cdots+x^{50}]}=\frac{\pi}{\sqrt{2+a}}$$

✍ **练习 6.54** 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 存在，并求极限

解 因为

$$\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+o(1)$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{u}\,\mathrm{d}x + o(1)$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x &= n^2 \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= n^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x + n^2 \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{2}\int_0^{\infty} \sin^4 t \left(\int_0^{\infty} x^2 e^{-tx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t + o(1) \\
&= 12n^2 \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)(x^2+16)}\,\mathrm{d}x + o(1) \\
&= n^2 \ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln n + o(1)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln 2 + \frac{1}{4}\ln n}{n^2} = \ln 2$$

定理 6.18. 华里士公式

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases}
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\ I_0 = \dfrac{\pi}{2} \\
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数},\ I_1 = 1
\end{cases}
\end{aligned}$$

♡

证明 首先, 作代换 $x = t + \frac{\pi}{2}$, 由换元积分法得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

其次,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) \\
&= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

从而得递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

注意到

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1,$$

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

而当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},\end{aligned}$$

结论获证.

例6.129 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi}{2}$

证明 [2] 由 $\sin x$ 的单调性可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,\mathrm{d}x.$$

即

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

由此得到

$$A_n=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}=B_n.$$

因为

$$\begin{aligned}0<B_n-A_n&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n(2n+1)}<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\to0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

故由夹逼定理立即有

$$\lim_{n\to\infty}(B_n-A_n)=0.$$

再由 $0<\dfrac{\pi}{2}-A_n<B_n-A_n\to0\ (n\to\infty)$ 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-A_n\right)=0$. 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}&=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-A_n\right)\right]\\&=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

例6.130

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\in\infty,\ f\in C^{(2)}([0,1]))$$

证明 由分部积分法，我们有 ($0<\xi<1$, 参阅积分中值定理)

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\\=&\frac{f(1)}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x^{n+2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)}{n(n+1)}-\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)}{n(n+1)}-\frac{f'(1)}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+2}\right)+\frac{f''(\xi)}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{n+3}\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n(n+1)}+\frac{2f'(1)}{n(n+1)(n+2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+\frac{f(1)f'(1)}{n^2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

注意

$$
\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\,\mathrm{d}x\sim\frac{f(1)}{n+1}-\frac{f'(1)}{(n+1)^2}
$$

例6.131 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x$ (n 为自然数)

解

$$
\begin{aligned}
I_n&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\big[\sin(n-1)x+\sin(n+1)x\big]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}I_{n-1}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\big(\sin nx\cos x+\cos nx\sin x\big)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}(I_{n-1}+I_n)-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,\mathrm{d}(\cos^n x)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}I_{n-1}\quad(\text{分部积分})\\
&=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2}I_{n-2}\right)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^2(n-1)}+\frac{1}{2^3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{1}{2^{n-1}}I_1\\
&=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^2(n-1)}+\frac{1}{2^3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{1}{2^n}\left(I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

练习 6.55 计算积分:

$$
\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x
$$

解 利用分布积分，我们有

$$
\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{n}{a}e^{-ax}\sin^n(x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}\sin^{n-1}(x)\cos(x)e^{-ax}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n&=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n&=\frac{n}{a}\left[\frac{-1}{a}e^{-ax}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{a}\left((n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)-\sin^n(x)\right)\mathrm{d}x\right]\\
\Rightarrow I_n&=\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x-\frac{n^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow I_n&=\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{a^2}I_n
\end{aligned}
$$

解出 I_n

$$
I_n\left(1+\frac{n^2}{a^2}\right)=\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}\Rightarrow I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}I_{n-2}
$$

所以, 当 n 为偶数时

$$I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)^2+a^2}\cdots\frac{2\cdot1}{2^2+a^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{a}}_{I_0}$$

当 n 为奇数时

$$I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)^2+a^2}\cdots\frac{3\cdot2}{a^2+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{a^2+1}}_{I_1}$$

综上我们有

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(2m)!}{a\cdot\prod\limits_{k=1}^{m}(4k^2+a^2)}=\dfrac{\pi\cdot\operatorname{csch}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot(2m)!}{2^{2m+1}\Gamma\left(m-\frac{ai}{2}+1\right)\Gamma\left(m+\frac{ai}{2}+1\right)}\\[2ex]\dfrac{(2m+1)!}{\cdot\prod\limits_{k=1}^{m}\left((2k+1)^2+a^2\right)}=\dfrac{\pi\cdot\operatorname{sech}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot(2m+1)!}{4^{m+1}\Gamma\left(m-\frac{ai}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{ai}{2}+\frac{3}{2}\right)}\end{cases}$$

6.3.1 留数在定积分计算中的应用

例6.132 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x.\ (a>0)$

证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$. 它的极点为 $a_k=a\cdot e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}}\ (k=0,1,2,3)$. 上半平面内只有 $z=a_0, z=a_1$

$$\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=a_k}=\frac{1}{4a_k^3}=-\frac{a_k}{4a^4}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{a_0}{4a^4}-\frac{a_1}{4a^4}\right)\\&=-\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^3}\left(e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}+e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)=-\pi\mathrm{i}\frac{1}{4a^3}\left(e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}-e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\\&=\frac{\pi}{2a^3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}\end{aligned}$$

例6.133 求定积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

证明 首先有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{t=x+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2t-1)}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t\\&=\cos 1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x-\sin 1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

容易验证，函数 $f(z)=\dfrac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}$ 满足若尔当引理的条件，其中，$g(z)=\dfrac{1}{z^2+\frac{3}{4}}$ 函数 $f(z)$ 在上半平面内只

有一个简单极点 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ ($z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 在下半平面).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right]$$
$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\frac{e^{2\mathrm{i}z}}{z^2+\frac{3}{4}}=2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}}$$

比较实部虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi}{\sqrt{3}},\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=0$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{2e^{-\sqrt{3}}\pi\sin 1}{\sqrt{3}}$$

例6.134 计算积分: $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x^x(1-x)^{1-x}}\,\mathrm{d}x$

解 (by pisco125)

$$I=\int_0^1\frac{\exp[\mathrm{i}\pi x-x\ln x+x\ln(1+x)]}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{u=\ln(1-x)-\ln x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi+u}{1+e^u}\right)}{1+e^u}\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty+\mathrm{i}\pi}^{+\infty+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{+\infty-\mathrm{i}\pi}^{-\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{-x}{1-e^{-x}}\right)}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty-\mathrm{i}\pi}^{+\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$

考虑由 $R-\mathrm{i}\pi, R+\mathrm{i}\pi, -R+\mathrm{i}\pi, -R-\mathrm{i}\pi$ 组成的长方形围道

$$\left(\int_{-R+\mathrm{i}\pi}^{R+\mathrm{i}\pi}+\int_{R+\mathrm{i}\pi}^{R-\mathrm{i}\pi}+\int_{R-\mathrm{i}\pi}^{-R-\mathrm{i}\pi}+\int_{-R-\mathrm{i}\pi}^{-R+\mathrm{i}\pi}\right)\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x},0\right]=\frac{2\pi}{e}\mathrm{i}$$

而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R-\mathrm{i}\pi}^{-R+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{R+\mathrm{i}\pi}^{R-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}\pi}^{+\infty+\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty-\mathrm{i}\pi}^{+\infty-\mathrm{i}\pi}\frac{\exp\left(\frac{x}{1-e^x}\right)}{1-e^x}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{e}\mathrm{i}$$

故 $I-(-I)=\frac{2\pi}{e}\mathrm{i}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{e}\mathrm{i}$, 因此

$$\mathrm{Im}\,I=\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x^x(1-x)^{1-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e}$$

6.4 定积分的应用

注意定积分的几何意义

6.4.1 求平面图形的面积

定理 6.19. 旋转曲面

曲线 l 绕直线 $ax+by+c=0$ 旋转而成的旋转曲面面积为

$$S=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_L |ax+by+c|\,\mathrm{d}s$$

♡

例6.135 曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积

解 在曲线 L_1 上取点 $P(x,y)$, 该点到旋转轴 L_2 的距离为

$$d=\frac{1}{5}(x^3+2x)$$

弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积微元

$$\mathrm{d}A=2\pi d\,\mathrm{d}s=\frac{2}{5}\pi\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积为

$$A=\int_0^1 \mathrm{d}A=\frac{2}{5}\pi\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x^2+2=t}\frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{15}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$

例6.136 曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积

解 在曲线 L_1 上取点 $P(x,y)$, 该点到旋转轴 L_2 的距离为

$$d=\frac{1}{5}(x^3+2x)$$

弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积微元

$$\mathrm{d}A=2\pi d\,\mathrm{d}s=\frac{2}{5}\pi\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

旋转曲面的面积为

$$A=\int_0^1 \mathrm{d}A=\frac{2}{5}\pi\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x^2+2=t}\frac{\pi}{5}\int_2^3 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{15}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$

定理 6.20. 极坐标类型

设平面图形由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围成，求其面积 S。

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

♡

例6.137 计算由方程 $x^2+\left(y-\sqrt[3]{x^2}\right)^2=1$ 围成的面积

解 令 $y-\sqrt[3]{x^2}=\sin t$，那么 $x=\cos t$，即 $y=\sin t+(\cos t)^{\frac{3}{2}}$

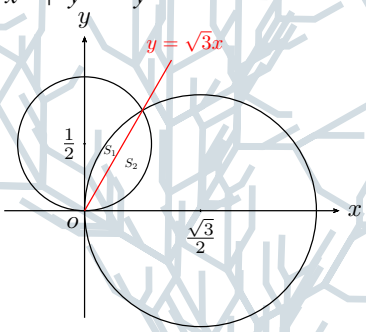
计算 t 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的定积分即为面积的一半

$$S_1=\int_{D_1}y\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+(\cos t)^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}\cos t=\frac{\pi}{2}$$

所以整个图形的面积为 π

例6.138 计算 $x^2+y^2\leqslant\sqrt{3}x$ 与 $x^2+y^2\leqslant y$ 相交部分的面积

解 联立 $\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{3}x\\x^2+y^2=y\end{cases}$ 解得 $y=\sqrt{3}x$.



$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{16}(3\sqrt{3}-2\pi)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{48}(3\sqrt{3}+8\pi)$$

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{24}(6\sqrt{3}+\pi)$$

例6.139 求三叶玫瑰线 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\,(a>0)$ 所围图形 D 的面积

解 [4] 首先要搞清楚区域 D 是由怎样的不等式确定的. 这关键是确定不等号的方向，一般地，可以通过验证无穷远处对应的是大于号还是小于号来确定:

$$D:(x^2+y^2)^2\leqslant a(x^3-3xy^2)$$

上式左端是 4 次方，右端是 3 次方，可以看到无穷远处确实在上述不等式确定的区域外. 令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

则新区域为

$$\begin{cases}r^4\leqslant ar^3(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)\\r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r\leqslant a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\\r\geqslant 0,\quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$$

注意到

$$\cos\theta(4\cos^2\theta-3)=\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})$$

上式非负，当且仅当

$$\cos\theta\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$$

因而新的区域是

$$\begin{cases}\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right]\\0\leqslant r\leqslant a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\end{cases}$$

其中，我们又将 θ 在某一部分的值变化了 2π，于是

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\cup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)} r\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\cup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\,\mathrm{d}\theta.$$

由于

$$\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2=\frac{1}{2}(\cos 6\theta+1),$$

可得

$$S=\frac{a^2}{2}\times 3\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{4}$$

注意 应该自然地看到 $\cos 6\theta$ 在长为 $\frac{\pi}{3}$ 的区间上积分为零，而不是具体计算出来才看到这一点

6.4.2 求旋转体的体积

定理 6.21. 切片法

设立体 Ω 介于平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间，$\forall x\in(a,b)$，过点 x 且与 x 轴垂直的平面截立体 Ω 的截面面积为连续函数 $A(x)$，则立体的体积为

$$V_\Omega=\int_a^b \mathrm{d}V_\Omega=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

例6.140 底面由圆 $x^2+y^2=4$ 围成，且垂直与 x 轴的所有截面都是正方形的立体体积为 _____

解 $x>0$ 时，对于任一 x 的取值

正方形边长 $=2\sqrt{4-x^2}$，正方形面积 $=\left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2$

所求体积

$$V=2\int_0^2\left(2\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=42\frac{2}{3}$$

例6.141 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解 因抛物线过原点，故 $c=1$ 由题设有

$$\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}\Longrightarrow b=\frac{2}{3}(1-a)$$

旋转体的体积 V

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right]$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0,$$

得 $a=-\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geqslant 0$，又因

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}^2a}\Big|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right]=\frac{4}{135}\pi>0$$

及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}, b=\frac{2}{3}, c=1$ 时，体积最小

定理 6.22. 柱壳法

将由 x 轴，直线 $x=a, x=b\ (a<b)$，及连续曲线 $y=f(x)\,(f(x)\geqslant 0)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

♡

例6.142 求 $y=\sin x$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴所得的旋转体的体积

解

$$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi^2$$

$$V_y=\pi\int_0^1\left((\pi-\arcsin y)^2-\arcsin^2 y\right)\mathrm{d}y=2\pi^2$$

定理 6.23. 任意直线的旋转体体积

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数其绕直线 $l:\ y=kx+b\,,(k\neq 0)$ 旋转所成的立体的体积为

$$V_l=\frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b\left[f(x)-kx-b\right]^2\left|1+kf'(x)\right|\mathrm{d}x$$

♡

证明 [4] 记曲线 $f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 为 P，它到直线 $y=kx+b$ 上的距离为 $\overline{PQ}=h, Q\in l$，则

$$h=\frac{|kx+b-f(x)|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

此外，记点 P 处曲线小段弧微分为 $\mathrm{d}s$，相应地在 $y=kx+b$ 上点 Q 处记为 $\mathrm{d}\xi$，Ox 轴上点 $(x,0)$ 处的小段弧微分记为 $\mathrm{d}x$. 又记 l 与 Ox 轴的夹角为 α，点 P 处曲线 $f(x)$ 的切线与 Ox 轴之交角为 β，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi&=\mathrm{d}s\cdot\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cdot\cos\alpha(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x\\&=\frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+f'(x)^2}}\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1+kf'(x)}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从而我们有（ξ_1,ξ_2 是相应于 Ox 轴上 a,b 的 l 上的位置）

$$V_l=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\pi h^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b\left[f(x)-kx-b\right]^2\left|1+kf'(x)\right|\mathrm{d}x$$

例6.143 求曲线 $C:\ y=x^2$ 与直线 $L:\ y=x$ 所围成图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

解 在曲线上取点 $P(x,y)$，该点到旋转轴的距离为 $d=\frac{|x^2-x|}{\sqrt{2}}$

过该点垂直于旋转轴的截面面积为 πd^2，沿旋转轴个截面的一个厚度 $\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}l$ 在 x 轴上的投影为 $\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}l=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$，于是体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi d^2\,\mathrm{d}l=\frac{\sqrt{2}\pi(x^2-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

[4] 周明强《数学分析习题演练》

于是

$$V=\int_0^1 \mathrm{d}V=\int_0^1 \frac{\sqrt{2}\pi(x^2-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30\sqrt{2}}$$

例6.144 求由 $y=2x$ 与 $y=4x-x^4$ 所围区域绕 $y=2x$ 旋转所得旋转体体积.

解 曲线与直线的交点坐标为 $A(2,4)$, 曲线上任一点 $P(x,4x-x^2)$ 到直线 $y=2x$ 的距离为

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{5}}|x^2-2x|$$

以 $y=2x$ 为数轴 u (如图), 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=\pi\rho^2\,\mathrm{d}u\quad \mathrm{d}u=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\cdot\sqrt{5}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故所求旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^2\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}x=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$

$$V=\iint_D 2\pi\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2x}(2x-y)\,\mathrm{d}y=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$

定理 6.24. 任意直线的旋转体体积

区域 D 绕直线 $ax+by+c=0$(D 在直线的一侧) 旋转所成的立体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_D|ax+by+c|\,\mathrm{d}\sigma$$

♡

例6.145 求由 $y=0, y=\ln x$ 和 $x=e$ 所围成区域 D 绕直线 $y=-x$ 旋转的旋转体体积 V.

解

$$V=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\iint_D(y+x)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}(x+y)\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi\left(\frac{e^2}{4}+\frac{e}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

6.4.3 求平面曲线的弧长

例6.146 求抛物线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 对应于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一段的弧长.

证明

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}s&=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

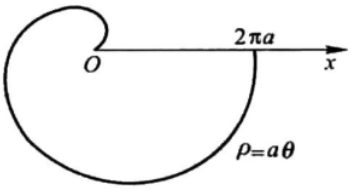
例6.147 求阿基米德螺线 $\rho=a\theta$ $(a>0)$ 相应与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的一段的弧长

证明 弧长元素

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,\mathrm{d}\theta=a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

于是所求弧长为

$$s=\int_0^{\pi}\mathrm{d}s=a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$



$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

命题 6.1. 参数方程的弧长元素

设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$，其中 $a \leqslant t \leqslant b$, 则弧长元素

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例6.148 求摆线的一拱

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的弧长, 其中 $a > 0$.

证明

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1-\cos t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\sin t,$$

故

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$$
$$= 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t,$$

于是

$$s = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

例6.149 设有曲线 C_n：$x^{2n} + y^{2n} = 1$ (n 正整数), L_n 为 C_n 的长.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 8$.

证明 设曲线 C_n 与 x 轴的交点为 A, C_n 与直线 $y = x$ 的交点为 P_n, 则点 P_n 的坐标为

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right).$$

曲线 C_n 在点 A 到点 P_n 间的曲线段的弧长记为 l_n. 由对称性, 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1$.

在开区间 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}, 1\right)$ 内, 求方程 $x^{2n} + y^{2n} = 1$ 所确定的隐函数的导数, 得

$$y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}} < 0.$$

由弧长计算公式

$$l_n = \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x < \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 (1+|y'|)\,\mathrm{d}x = \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 (1-y')\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[x - y(x)\right]_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = 1.$$

另一方面, 又有

$$l_n = \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x > \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 |y'|\,\mathrm{d}x = \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 (-y')\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-y(x)\right]_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2n}}}^1 = -\left(0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \to 1,\ n\to\infty$$

于是由极限夹逼准则, $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty}(8l_n) = 8$.

6.4.4 在经济学中的应用

例6.150 已知某商品边际收益为 $R'(q) = -0.08q + 25$(万元/t)，边际成本为 $= 5$(万元/t)，求产量从 250t 增加到 300t 时的销售收益 $R(q)$、总成本 $C(q)$、利润 $L(q)$ 的改变量 (增量).

解 边际利润

$$L'(q) = R'(q) - C'(q) = -0.08q + 20,$$

$$R(300) - R(250) = \int_{250}^{300} (-0.08q + 25)\mathrm{d}q = 150(\text{万元}),$$

$$C(300) - C(250) = \int_{250}^{300} 5\mathrm{d}q = 250(\text{万元}),$$

$$L(300) - L(250) = \int_{250}^{300} (-0.08q + 20)\mathrm{d}q = -100(\text{万元}).$$

6.5 反常积分的审敛法　Γ 函数

6.5.1 无穷限反常积分的审敛法

定理 6.25. 比较审敛原理

设 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $(a \leqslant x < \infty)$. 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散

♡

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p \leqslant 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

定理 6.26. 比较审敛法 1– 与 p– 积分进行比较 (不等式形式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上连续, 且 $f(x) \geqslant 0$.

(1) $\exists M > 0, p > 1,$ s.t $f(x) \leqslant \dfrac{M}{x^p} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\exists N > 0,$ s.t $f(x) \geqslant \dfrac{N}{x} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

♡

定理 6.27. 极限审敛法 1

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \underbrace{f(x)}_{f(x)\geqslant 0} = l \neq 0 \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leqslant 1 \end{cases}$$

♡

练习 6.56 证明反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,\mathrm{d}x$$

当 $p \leq \dfrac{1}{2}$ 时发散，$\dfrac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛，$p > 1$ 时绝对收敛.

证明 若 $p>0$, 则当 $x\to+\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}&=\frac{\sin x}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\\&=-\frac{1}{2x^{2p}}+\frac{\sin x}{x^p}+\frac{\cos 2x}{2x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).\end{aligned}$$

故

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p+\sin x}\text{收敛}\iff\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}\text{收敛}\iff p>\frac{1}{2}.$$

若 $p>0$, 则当 $x\to+\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|&=\frac{|\sin x|}{x^p}-\frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\\&=\frac{2}{\pi x^p}+\frac{|\sin x|-2/\pi}{x^p}-\frac{|\sin x|\sin x}{x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).\end{aligned}$$

故

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\mathrm{d}x\text{收敛}\iff\int_1^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}x}{\pi x^p}\text{收敛}\iff p>1.$$

即

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^p+\sin x}\text{绝对收敛}\iff p>1.$$

定理 6.28. 无穷积分的 Abel 判别法

若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ♡

定理 6.29. 无穷积分的 Dirichlet 判别法

若 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$; $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ♡

6.5.2 无界函数的反常积分的审敛法

$$\int_0^1\frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q} & 0<q<1\\ +\infty & q\geqslant 1\end{cases}\Longrightarrow\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & 0<q<1\\ +\infty & q\geqslant 1\end{cases}$$

定理 6.30. 比较审敛法 2– 与 p– 积分进行比较 (不等式形式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, $x=a$ 为瑕点.

(1) $\exists M>0, q<1$, s.t $f(x)\leqslant\dfrac{M}{(x-a)^p}\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\exists N>0$, s.t $f(x)\geqslant\dfrac{N}{x-a}\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散; ♡

定理 6.31. 极限审敛法 2

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, $x=a$ 为瑕点.

(1) $\exists 0<q<1$, s.t $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=l \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0\ (d=+\infty)\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

♡

例6.151 判断反常积分 $\int_1^3 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性

证明 这里 $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0$$

根据极限审敛法 2, 知所给反常积分发散

例6.152 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性. 其中 $\alpha>0$.

解 1) 当 $\alpha<1$ 时, 取正数 ε 充分小, 使得 $a+\varepsilon<1$, 由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}x^\varepsilon\ln x=0$$

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大, 于是 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

2) 当 $\alpha\geqslant 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\frac{\ln x}{x^\alpha}=\infty$,

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{1}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 低阶的无穷大量, 于是 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 发散.

例6.153 判断反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 m,n 是正整数

证明 (by 蓝兔兔) 这里 $x=0, x=1$ 是被积函数的瑕点. 分开考虑

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$$

对于 $\int_0^{\frac12} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\frac{\sqrt[m]{x^2}}{\sqrt[n]{x}}=\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}},\ x\to 0$$

由于 $n\geqslant 1\Longrightarrow \frac1n\in(0,1]$, 而 $\frac2m>0$, 所以 $\frac1n-\frac2m<1$, 即 $p<1$,

于是可知 $\int_0^{\frac12} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

对于 $\int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$, 因为

$$\int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x\xlongequal{1-x=e^t}\int_{-\infty}^{-\ln 2}\frac{\sqrt[m]{t^2}e^t}{\sqrt[n]{1-e^t}}\,\mathrm{d}t=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}}\,\mathrm{d}t$$

注意到

$$\frac{\sqrt[m]{t^2}e^{-t}}{\sqrt[n]{1-e^{-t}}}\sim t^{\frac2m}e^{-t},\ x\to+\infty$$

而 $\int_{\ln 2}^{+\infty} t^{\frac{2}{m}} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 收敛 $\Longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$收敛

综上得 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例6.154 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin^2\pi(x+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明 对充分大的正整数 n, 当 $x\in[2n+\frac{1}{6},2n+\frac{1}{3}]$ 时, 必有

$$2\pi n+\frac{\pi}{6}<\pi\left(2n+\frac{1}{6}+\frac{1}{2n+\frac{1}{6}}\right)\leqslant\pi(x+\tfrac{1}{x})\leqslant\pi\left(2n+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+\frac{1}{3}}\right)<2\pi n+\frac{\pi}{2}.$$

从而

$$\frac{1}{4}<\sin^2\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)<1,\quad \forall x\in[2n+\tfrac{1}{6},2n+\tfrac{1}{3}].$$

所以, 对充分大的正整数 n,

$$\int_{2n+\frac{1}{6}}^{2n+\frac{1}{3}} \sin^2\pi(x+\tfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x>\frac{1}{24}$$

从而根据 Cauchy 收敛准则, 反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin^2\pi(x+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ 发散

例6.155 设 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x$, 其中 p 为正的常数

判定反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x$ 是否收敛

解 由于 $\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}>0$, 只需考察无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 设

当 $(n-1)\pi\leqslant x\leqslant n\pi$ 时,

$$\frac{(n-1)\pi}{\cos^2x+(n\pi)^p\sin^2x}\leqslant\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}\leqslant\frac{n\pi}{\cos^2x+(n\pi-\pi)^p\sin^2x}$$

$$\begin{aligned}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{(n-1)\pi}{\cos^2x+(n\pi)^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2x}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n-1)\pi}{1+\left[(n\pi)^p-1\right]\sin^2x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2(n-1)\pi}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}+}\\&=\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\end{aligned}$$

同理

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{n\pi}{\cos^2x+((n-1)\pi)^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\leqslant\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2x+x^p\sin^2x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

当 $n\to+\infty$,

$$\frac{(n-1)\pi^2}{\sqrt{(n\pi)^p-1}}\sim\frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}}\sim\frac{n\pi^2}{\sqrt{((n-1)\pi)^p-1}}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^p\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\sim\frac{\pi^{2-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}-1}}$$

当 $\frac{p}{2}-1\leqslant 1$ 时, 即 $p\leqslant 4$ 原积分发散; 当 $\frac{p}{2}-1>1$ 时, 即 $p>4$ 原积分收敛.

定理 6.32. 有界瑕积分的 A–D 判别法

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个奇点 b

1. (Abel 判别法) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,
   则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛
2. (Dirichlet 判别法) 若 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 且 $\lim\limits_{x\to b^-}g(x)=0$;
   $F(\eta)=\int_a^{b-\eta}f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,b-a)$ 上有界, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ♡

练习 6.57 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 1, & x=0\end{cases}$, 因为 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1$ 故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,
所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

即 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在. 下面往证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛
$f(x)=\sin x$ 在 $[1,+\infty)$ 连续, 且对 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有

$$F(u)=\int_1^u\sin x\,\mathrm{d}x=\cos 1-\cos u$$
$$|F(u)|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$$

而 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减并趋向于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛
再证无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ 发散
已知 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有 $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$, 从而

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

同理可证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散
由于 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法可知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ 发散
综上所述, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛

例6.156 求反常积分: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

解 对于 $x>0$ 有展开式

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=e^{-x}\left(1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{分部积分}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{e^{-nx}(n\sin x+\cos x)}{n^2+1}\right]_0^{+\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\\&\xlongequal[15.14]{\text{傅里叶}}\frac{1}{2}(\pi\coth(\pi)-1)\approx 1.0766774....\end{aligned}$$

例6.157 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

解[5] 利用等式 $\sin(2n-1)x-\sin(2n-3)x=2\sin x\cos 2(n-1)x$ 易得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad\forall n\geqslant 1.$$

再利用等式 $\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x=\sin(2n-1)x\sin x$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}n,\quad\forall n\geqslant 1$$

在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上, 利用不等式 $x-\frac{x^3}{3!}\leqslant\sin x\leqslant x$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}&=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-1}\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)^{-1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

作变量代换 $x=\dfrac{t}{n}$, 并令 $n\to+\infty$ 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

再令 $\delta\to 0^+$ 即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

定理 6.33. Froullani 积分公式

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,$a>0,b>0$, 有

1. 若 $f(0),f(+\infty)$ 存在，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$;
2. 若 $f(0)$ 存在，且 $\forall A>0,\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$
3. 若 $f(+\infty)$ 存在，且 $\forall A>0,\displaystyle\int_0^{A}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

♡

[5]梅加强《数学分析讲义》P275

证明 (1) $\forall[\alpha,\beta]\cap(0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \overbrace{\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x}^{ax=t} - \overbrace{\int_\alpha^\beta \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x}^{bx=t}\\ &= \int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}+\int_{b\alpha}^{a\beta}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}-\int_{a\beta}^{b\alpha}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由第一积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t}+f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= [f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a},\end{aligned}$$

其中, ξ 在 $a\alpha$ 与 $b\alpha$ 之间, η 在 $a\beta$ 与 $b\beta$ 之间. 上式令 $\alpha\to0^+$, $\beta\to+\infty$ 可得结论.

(2) 由无穷积分收敛的柯西准则知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 R 充分大时, $\left|\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

(3) 由暇积分收敛的充要条件知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 r 充分小时, 即 $\left|\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{r\to0^+}\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$$

例6.158 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-x}(1-e^{-2x})}{x(1-e^{-10x})}\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-6x})e^{-(10n+1)x}(1-e^{-2x})}{x}\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{-(10n+1)x}-e^{-(10n+7)x}\right)-\left(e^{-(10n+3)x}-e^{-(10n+9)x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{(10n+7)(10n+3)}{(10n+1)(10n+9)}=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{(\frac{7}{10}+n)(\frac{3}{10}+n)}{(\frac{1}{10}+n)(\frac{9}{10}+n)}\\ \overset{(6.18)}{=\!=}&\ln\frac{\Gamma(\frac{1}{10})\Gamma(\frac{9}{10})}{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{7}{10})}=\ln\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}=\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\end{aligned}$$

例6.159 证明 $\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}x=-\gamma$

证明

$$\begin{aligned}\Gamma'(1)&=\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\\&=-1-\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\\&=-1+\int_0^{+\infty}\ln\frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}e^{-x}\\&=-1+e^{-x}\ln\frac{1-e^{-x}}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-1+\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}-e^{-(n+1)x}}{x}-e^{-(n+1)x}\right)\mathrm{d}x\\&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-nx}-e^{-(n+1)x}}{x}-e^{-(n+1)x}\right)\mathrm{d}x\\&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\&=-\gamma\end{aligned}$$

定理 6.34. 罗巴切夫斯基公式

若连续偶函数 $f(x)$ 以 π 为周期, 则

$$\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

在主值积分意义下

$$P.V.\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

♡

证明 [6]

$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{v=0}^{\infty}\int_{\frac{v\pi}{2}}^{(v+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $v=2n$ 或 $v=2n-1$, 相应地变量 x 变为 $x=n\pi+t$ 或 $x=n\pi-t$ 这样, 就有

$$\int_{2n\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi+t)\frac{\sin t}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2n\cdot\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(n\pi-t)\frac{\sin t}{n\pi-t}\,\mathrm{d}t$$

由于 $f(\pi+t)=f(\pi-t)=f(t)$, 可知

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^nf(t)\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

[6]金玉明《积分的方法与技巧》P166

公式右端方括弧中表达式就是 $\dfrac{1}{\sin t}$ 的无穷级数展开式, 因此

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{v=0}^{\infty}\int_{\frac{v\pi}{2}}^{(v+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

令 $v=2n$ 或 $v=2n-1$, 相应地变量 x 变为 $x=n\pi+t$ 或 $x=n\pi-t$ 这样, 就有

$$\int_{2n\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(n\pi+t)\frac{\sin^2 t}{(n\pi+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2n\cdot\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(n\pi-t)\frac{\sin^2 t}{(n\pi-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

由于 $f(\pi+t)=f(\pi-t)=f(t)$, 可知

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n f(t)\left(\frac{1}{(t+n\pi)^2}+\frac{1}{(t-n\pi)^2}\right)\sin^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin^2 t\left\{\frac{1}{t^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(t+n\pi)^2}+\frac{1}{(t-n\pi)^2}\right]\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

公式右端方括弧中表达式就是 $\dfrac{1}{\sin^2 t}$ 的无穷级数展开式, 因此

$$I=\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.5.3 Γ 函数

定义 6.3. Γ 函数

Γ 函数的定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\,z>0)$$

一般地, 对于任何正整数 n 有 $\Gamma(n+1)=n!$;

特殊值: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ♣

定理 6.35. Bohr-Mollerup 命题

如果定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

(1) $f(x)>0$, 且 $f(1)=1$,

(2) $f(x+1)=xf(x)$,

(3) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的下凹函数

则 $f(x)\equiv\Gamma(x), x\in(0,+\infty)$ ♡

证明 [[13]] 由条件 (1) 与条件 (2) 知, $f(n)=(n-1)f(n-2)=\cdots=(n-1)!f(1)=(n-1)!$. 设 $x\in(0,1)$, 由条件 (3), $\ln f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 故

$$\frac{\ln(n)-\ln(n-1)}{n-(n-1)}\leqslant\frac{\ln(n+x)-\ln(n)}{(n+x)-n}\leqslant\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)-n},n=2,3,\cdots.$$

于是

$$\ln(n-1)!-\ln(n-2)!\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln(n-1)!}{x}\leqslant\ln n!-\ln(n-1)!,$$

即

$$x\ln(n-1)\leqslant\ln f(n+x)-\ln(n-1)!\leqslant x\ln n,$$

$$x\ln(n-1)+\ln(n-1)!\leqslant\ln f(n+x)\leqslant x\ln n+\ln(n-1)!,$$

$$\ln(n-1)^x(n-1)!\leqslant\ln f(n+x)\leqslant\ln n^x(n-1)!,$$

$$(n-1)^x(n-1)!\leqslant f(n+x)\overset{\text{由条件 (2)}}{=\!=}(n-1+x)\cdots(1+x)xf(x)\leqslant n^x(n-1)!,$$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

将左边不等式中的 $n-1$ 换成 n 不等式仍然成立. 则有

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}$$

$$\frac{n}{x+n}f(x)\leqslant\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant f(x)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x+n}f(x)=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)$ 及夹逼准则得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=f(x)$$

这就证明了 $f(x)$ $(x\in(0,1))$ 被左边的极限所唯一确定. 再由条件 (2) 推得 $f(x)$ $(x\in(0,+\infty))$ 由条件 (1)、(2)、(3) 所唯一确定, 即 $f(x)\equiv\Gamma(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

定理 6.36. Euler-Gauss 公式

$\forall\, z>0$, 有

$$\Gamma(z)=\lim_{m\to+\infty}\frac{m^zm!}{z(z+1)\cdots(z+m)}\quad(\operatorname{Re}z>0)$$

♡

例6.160 f $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ then

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)}=\prod_{k\geqslant0}\frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)}\tag{6.18}$$

证明 according to Euler's definition for the gamma function

$$\Gamma(z)=\frac{m^zm!}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+m)}$$

therefore we have

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\beta_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_n)}&=\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)}=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\frac{m^{\beta_j}m!}{\beta_j(\beta_j+1)\cdots(\beta_j+m)}}{\frac{m^{\alpha_j}m!}{\alpha_j(\alpha_j+1)\cdots(\alpha_j+m)}}\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}m^{\beta_j-\alpha_j}\prod_{k=0}^{m}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j+k}{\beta_j+k}\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\frac{(k+\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(k+\alpha_n)}{(k+\beta_1)\cdot\cdots\cdot(k+\beta_n)}\end{aligned}$$

性质

(1) 递推公式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $(x>0)$

(2) $\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$

(3) $\Gamma(x)\Gamma(-x)=-\dfrac{\pi}{x\sin\pi x}$ (x 为非整数)

(4) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=-\dfrac{\pi}{\cos\pi x}$

(5) $\dfrac{1}{x^p}=\dfrac{1}{\Gamma(p)}\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t$

定理 6.37. 余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad x\text{ 为非整数}$$

♡

定理 6.38. Legendre 加倍公式

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),s>0$$

其中 Γ 是 Gamma 函数.

♡

证明 记 $I(s)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}$. 令 $x=\tan^{2s}t$, 则

$$\begin{aligned}I(s)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=2s\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t\cos t)^{2s-1}\mathrm{d}t\\&=s2^{1-2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-1}u\mathrm{d}u=2^{-2s}sB(\frac{1}{2},s)\\&=2^{-2s}s\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}=2^{-2s}\sqrt{\pi}s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}.\end{aligned}$$

另一方面

$$I(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}},$$

从而

$$I(s)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^{\frac{1}{s}})^{2s}}=s\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{2s-1}\mathrm{d}t=\frac{sB(s,s)}{2}=\frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

因此

$$2^{-2s}\sqrt{\pi}s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}=\frac{s\Gamma^2(s)}{2\Gamma(2s)}.$$

从而

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),s>0.$$

定理 6.39. 斯特林 (stirling) 公式

1. $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, $n\to+\infty$
2. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0<\theta_n<1$
3. $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{12n}+\dfrac{1}{288n^2}-\dfrac{139}{51840n^3}-\dfrac{571}{2488320n^4}+o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)\right)$

♡

例6.161 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$

证明 令 $a_n=\dfrac{n!}{n^{n+\frac12}e^{-n}}$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^{n+\frac32}}{n^{n+\frac12}(n+1)e}=\frac{(n+1)^{n+\frac12}}{n^{n+\frac12}e}=\left(1+\frac1n\right)^n\left(1+\frac1n\right)^{\frac12}\frac1e>1$$

即 $a_n>a_{n+1}$, 即 $\{a_n\}$ 单调递减. 由积分放缩法有

$$\ln n!>\left(n+\frac12\right)\ln n-n\Longrightarrow n!>n^{n+\frac12}e^{-n}$$

故 $a_n>1$. 由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 极限存在. 设

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac12}e^{-n}}$$

利用 Wallis 公式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!}\right]^2}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left[\frac{(An^{n+\frac12}e^{-n})^2}{A(2n)^{2n+\frac12}e^{-2n}}\right]^2}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\left(2^{-2n-\frac12}A\sqrt{n}\right)^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}A^2 2^{-4n-1}n}{2n+1}=\frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

所以 $A=\sqrt{2\pi}$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac12}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac ne\right)^n}=1$$

例6.162 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{1-\frac1i}}{\left(1+\frac1i\right)^i}$

证明 利用斯特林 (Stiring) 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac ne\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\ \text{其中}0<\theta_n<1$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{1-\frac1i}}{\left(1+\frac1i\right)^i}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\exp\left[n-\left(1+\frac12+\frac13\cdots+\frac1n\right)\right]}{\left(\frac21\right)\left(\frac32\right)^2\left(\frac43\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n!\exp\left[n-\left(1+\frac12+\frac13\cdots+\frac1n\right)\right]}{(n+1)^n}\\&\overset{\text{Stiring}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\left(1+\frac1n\right)^n e^{1+\frac12+\frac13\cdots+\frac1n}}\lim_{n\to\infty}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\left(1+\frac1n\right)^n}\frac{e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{e^{1+\frac12+\frac13\cdots+\frac1n-\ln n}}\\&=\sqrt{2\pi}e^{-(1+\gamma)}\end{aligned}$$

其中 γ 为欧拉常数

例6.163 (Euler-Poisson 积分) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\overset{\substack{x^2=t\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t}}{=\!=\!=}\frac12\int_0^{+\infty}t^{-\frac12}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac12\Gamma\left(\frac12\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例6.164 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\int_0^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}
\end{aligned}$$

✍ 练习 6.58 求定积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}e^{\beta i x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2+\beta i x}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\left[\left(x^2-\frac{\beta i}{\alpha}x+\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right)-\left(\frac{\beta i}{2\alpha}\right)^2\right]}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\,e^{-\frac{\beta i^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{\beta i}{2\alpha}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\,e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}
\end{aligned}$$

✍ 练习 6.59 计算 $\int_0^{\infty}\sin\left(x^n\right)\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\sin\left(x^n\right)\mathrm{d}x &\xlongequal{x^n\mapsto x} \frac{1}{n}\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{n}-1}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{n}}e^{-xu}\,\mathrm{d}u\right)\sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{n}}\left(\int_0^{\infty} e^{-xu}\sin(x)\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\infty}\frac{u^{-\frac{1}{n}}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{-\frac{1}{n}}(\theta)d\theta \quad (u=\tan\theta) \\
&= \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{n}}(\theta)\cos^{\frac{1}{n}}(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{1-n}{2},\frac{1+n}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)\\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

✍ **练习 6.60** 求极限:

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

解 由于

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{u=t\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\\
&\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

✍ **练习 6.61** 计算积分:

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$$

解 本题需用到的公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},\ x\in(0,1) \qquad \text{——余元公式}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x\\
2I &= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(\ln\Gamma(x)+\ln\Gamma(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\pi x=t} \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t\\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t}_{=-\frac{\pi}{2}\ln 2} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t}_{u=\pi-t}\\
&= \ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\sin u\,\mathrm{d}u\\
&= \ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,\mathrm{d}u\\
&= \ln(2\pi)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

练习 6.62 计算积分:

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\log\Gamma(x)\mathrm{d}x$$

解

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(1+\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sin(\pi x)\log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=1-x} -\int_1^0 \sin(t\pi)\log\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sin(t\pi)\log\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t \\ I &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin(\pi x)\log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin(x\pi)\log\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi x)\log\left(\Gamma(x)+\Gamma(1-x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi x)\log\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

注意

$$\frac{1}{\binom{m+n}{m}} = m\int_0^1 (1-x)^n x^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

注意

$$\frac{1}{(1+x)^y} = \frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-xt-t}\,\mathrm{d}t$$

定义 6.4. digamma 函数

$$\psi(x) = \frac{d}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

♣

例6.165 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\dfrac{1}{x}+\gamma\right)$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}+\gamma\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)-1+\gamma x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi(x+1)+\gamma}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)\psi^2(x+1)+\psi'(x+1)\Gamma(x+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right) \end{aligned}$$

例6.166 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\right)=\gamma$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\Gamma(x)-2\Gamma(2x)\right) &= \lim_{x\to 0}\Gamma\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{4^x\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right) \end{aligned}$$

$$= \cdots = \gamma$$

练习 6.63 求极限 $\lim\limits_{n\to 0} \sqrt[n]{n!}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0} \sqrt[n]{n!} &= \lim_{n\to 0} \exp\left\{\frac{\ln(n!)}{n}\right\} = \exp\left\{\lim_{n\to 0} \frac{\ln \Gamma(n+1)}{n}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \Gamma(x+1)}{x}\right\} \\ &\overset{\text{洛必达}}{=\!=} \exp\left\{\lim_{x\to 0^+} \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right\} = e^{\psi(1)} = e^{-\gamma}\end{aligned}$$

定义 6.5. digamma 函数

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right)$$

♣

证明 根据 Weierstrass 定义的 $\Gamma(x)$ 函数

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}$$

我们有

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{d}{dx}\ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln x - \gamma x + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k\geqslant 1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) \\ &= -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right)\end{aligned}$$

性质 $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$

例6.167 证明 $\Gamma''(1) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\log^2 x dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$

解

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \Longrightarrow \psi'(x) \overset{\text{对 } \psi(x) \text{ 求导}}{=\!=\!=} \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - (\psi(x))^2$$

故可得

$$\Gamma''(x) = \left(\psi'(x) + (\psi(x))^2\right)\Gamma(x)$$

由 digamma 的级数定义

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right) \Longrightarrow \psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

其中 $\Gamma(1) = 1, \psi(1) = -\gamma, \psi'(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$, 于是

$$\Gamma''(1) = \left(\psi'(1) + (\psi(1))^2\right)\Gamma(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

例6.168 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 的和

证明 易得

$$\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=-\frac{8}{2n+1}+\frac{4}{(2n+1)^2}+\frac{4}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)=8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-8\ln 2$$

或者注意到

$$\psi(x)=-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+x}\right)$$

以及 $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$，故

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{4}{n+\frac{1}{2}}\right)\\&=4\psi\left(\frac{1}{2}\right)-4\psi(1)=-8\ln 2\end{aligned}$$

由傅里叶级数易得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=-8\ln 2+\frac{2\pi^2}{3}$$

注意 (by 向禹) 本题的易错点 – 条件收敛级数的重排

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{n+1}-\frac{8}{2n+1}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(4x^n-8x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(4x^n-8x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{4}{1-x}-\frac{8}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=-4\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\&=-4\ln 2\times??\\\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x-1}{1-x^2}=-\ln 2\times??\end{aligned}$$

上面的解答为什么是错误的呢??? 这个问题涉及到条件收敛级数的重排问题, 这么直接交换求和与积分次序的时候，实际上改变了无穷项的求和次序，条件收敛的级数重排后结果会发生变化的.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$ 如果写成 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{2n+1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x$ 再交换次序, 就把本来在 $2n+2$ 位置的数调到了 $n+1$ 的位置上, 这样和就变了

例6.169 证明: $\displaystyle\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right)=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

解 注意到

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}x-\Gamma(s-1)\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \left(\frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) \mathrm{d}t$$

由 digamma 函数的定义

$$\psi(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) \mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

令 $s \to 1^+$, 得到

$$\lim_{s \to 1^+} \left[\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1} \right] = \frac{-\psi(a)}{\Gamma(1)} = -\psi(a)$$

特别的, 令 $a = 1$ 得

$$\lim_{s \to 1^+} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] = \gamma$$

6.5.3.1 Beta 函数

定义 6.6. Beta 函数

B 函数 (Beta function) 的定义为

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

上式的右边称为第一类欧拉 (Euler) 积分

其它形式

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \mathrm{d}\theta \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} \mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

♣

定理 6.40. Γ 函数与 B 函数的关联公式

$\forall p > 0, q > 0$, 有 $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$。

♡

证明

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

做变量替换, 令 $x = uv, y = u(1-v)$ 则其雅可比行列式 J 为

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

$D \to D'$ 即:

$$\begin{cases} x = 0 \ \to \ u = 0, v = 0 \\ y = 0 \ \to \ u = 0, v = 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{p-1}[u(1-v)]^{q-1}e^{-u}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$= \Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$$

例6.170 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x$

解 由 Beta 函数定义

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5x^4(1+x^{10075})}{(1+x^5)^{2017}}\mathrm{d}x &\xlongequal{x^5=t} \int_0^1 \frac{1+t^{2015}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{x^{1-1}+t^{2016-1}}{(1+t)^{2017}}\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{B}(1,2016) = \frac{0!2015!}{2016!} = \frac{1}{2016}\end{aligned}$$

例6.171 计算积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$

解 我们有

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x \xlongequal{x^4=t} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

对积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$ 做变量替换, 令 $t=\frac{1}{x}$, 可得

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$

由此知

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = 2I$$

所以

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x = \frac{J}{2} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{8\sqrt{\pi}}$$

推论 6.1. 二项式系数与 Beta 函数

$$\frac{1}{C_k^n} = (n+1)B(k+1,n-k+1) \Longleftrightarrow C_k^n = \frac{1}{(n+1)B(k+1,n-k+1)}$$

解 (by fin3574) 易得

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{\frac{k!(n-k)!}{n!}} = \frac{1}{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}}$$

由 Beta 函数的定义有

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $\begin{cases}k+1=a\\ n-k+1=b\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}k=a-1\\ n=a+b-2\end{cases}$, 于是

$$\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{[(k+1)-1]![(n-k+1)-1]!}{[(k+1)+(n-k+1)-1]!}\frac{(n+1)!}{n!} = (n+1)B(k+1,n-k+1)$$

于是有

$$C_k^n = \frac{1}{(n+1)B(k+1,n-k+1)}$$

例6.172 求: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}$

解 注意到

$$\frac{1}{\binom{m+n}{m}}=m\int_0^1(1-x)^nx^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

那么有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}=m\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^nx^{m-1}\,\mathrm{d}x=m\int_0^1x^{m-2}\,\mathrm{d}x=\frac{m}{m-1}$$

练习 6.64 计算积分:

$$\int_0^1\frac{x^2-1}{(x^2+1)\ln x}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2-1}{(x^2+1)\ln x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}\int_0^1x^t\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x^{t+1}+x^t}{x^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}\right)-\left(\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}\right)+\cdots\\&=\ln\frac{3}{1}-\ln\frac{5}{3}+\ln\frac{7}{5}-\ln\frac{9}{7}+\ln\frac{11}{9}-\cdots\\&=\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{9}\cdots\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{4n+3}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{4n+5}{4}\right)}(4n+3)\right\}\\&=2\ln\left\{\frac{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right\}\end{aligned}$$

最后用了 Gautschi's inequality.

练习 6.65 计算积分:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x&\xlongequal{t=\ln(\tan x)}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\ln t}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^ke^{-2kt}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^{+\infty}e^{-(2k+1)t}\ln t\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{\pi}{4}\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\gamma + \left[\frac{\pi}{4}\gamma + \frac{\pi}{4}\ln\frac{\Gamma^4(\frac{3}{4})}{\pi}\right] = \frac{\pi}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}\right]$$

第 7 章 微分方程

关于绝对值：绝对值必须加，否则，可能将函数的定义域丢失一半。先加绝对值，再化简去掉绝对值 (如果可能的话)。

7.1 微分方程的基本概念

7.2 可分离变量的微分方程

✍ **练习 7.1** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任何 x, y 恒有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$, 求 $f(x)$ 的表达式

解 首先在等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=0$. 对固定的 x 以及任意的 $y\neq 0$ 都有

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

即

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x$$

令 $y\to 0$, 由 $f'(0)=1$ 则得到 $f'(x)=2x+1$ 解这个微分方程并注意到 $f'(0)=1$, 就有 $f(x)=x^2+x$

✍ **练习 7.2** 设 f 是二次可微函数, 对于任何实数 x, y 都满足函数方程

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$$

试求 f 的表达式

解 首先在等式

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$$

令 $x=y=0$ 得到 $f(0)=0$.

又对其两边关于 x, y 先后求两次偏导数得

$$2f(x)f'(x)=f'(x+y)f(x-y)+f(x+y)f'(x-y)$$

$$0=f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)$$

作变量代换 $x+y=u, x-y=v$ 则对于任何实数 u, v 都有

$$f''(u)f(v)=f(u)f''(v)$$

如果 $f(v)\equiv 0$, 则该函数方程的解为 $f(x)\equiv 0$.

若 $f(v)\not\equiv 0$, 存在一点 v_0 使得 $f(v_0)\neq 0$, 则可令 $c=\dfrac{f''(v_0)}{f(v_0)}$, 即化为 $f''(u)=cf(u)$. 根据初

始条件 $f(0)=0$ 即可求得解为

$$f(u)=\begin{cases}A\sinh\sqrt{c}x, & c>0\\ Au, & c=0,\ \text{其中}A\text{是任意常数}\\ A\sin\sqrt{-c}x, & c<0\end{cases}$$

✍ **练习 7.3** 在某池塘内养鱼，由于条件限制最多只能养 1000 条．在时刻 t 的鱼数 y 是时间 t 的函数 $y=y(t)$，其变化率与鱼数 y 和 $1\,000-y$ 的乘积成正比．现已知池塘内放养鱼 100 条，3 个月后池塘内有鱼 250 条，求 t 月后池塘内鱼数 $y(t)$ 的公式．问 6 个月后池塘中有鱼多少？

解 由已知

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y(1\,000-y)\\ y(0)=100\\ y(3)=250\end{cases},$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1\,000-y)}=\lambda\mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y(1\,000-y)}=\lambda\int\mathrm{d}t,$$

得

$$\frac{y}{1\,000-y}=C\mathrm{e}^{1\,000\lambda t},$$

将 $y(0)=100$，$y(3)=250$ 代入得

$$\begin{cases}\dfrac{100}{1\,000-100}=C\\ \dfrac{250}{1\,000-250}=C\mathrm{e}^{3\,000\lambda}\end{cases},$$

解得 $C=\dfrac{1}{9}$，$\lambda=\dfrac{\ln 3}{3\,000}$，即 t 个月后鱼与时间 t 的关系为

$$\frac{y}{1\,000-y}=\frac{1}{9}\times 3^{\frac{t}{3}},$$

即

$$y=\frac{1\,000\times 3^{\frac{t}{3}}}{9+3^{\frac{t}{3}}}.$$

当放养 6 个月后，鱼塘中鱼的数量为

$$y=\frac{1\,000\times 3^2}{9+3^2}=500(\text{条}).$$

✍ **练习 7.4** 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$$

则 $f(x,y)=$ _____

解 利用偏导数的定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,\,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(0,\,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right)^n$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0,\ y+\frac{1}{n}) - f(0,y)}{\frac{1}{n} f(0,y)}} = \mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}}$$

所给等式化为

$$\mathrm{e}^{\frac{f_y(0,y)}{f(0,y)}} = \mathrm{e}^{\cot y}, \text{ 即 } \frac{f_y(0,y)}{f(0,y)} = \cot y$$

对 y 积分得

$$\ln f(0,y) = \ln \sin y + \ln C, \text{ 即 } f(0,y) = C \sin y$$

又已知 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$, 解得

$$f(x,y) = \varphi \mathrm{e}^{-x} \ (\varphi(y) \text{ 为待定函数})$$

由 $f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, 得 $\varphi(y) = \sin y$, 故 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x} \sin y$

例7.1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2xy}{x^2+y}$ 的通解

解 (by 曾熊) 注意到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{2x\,\mathrm{d}x} = \frac{y}{x^2+y}$$

令 $u = \dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xu + x^2 \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2+y} \Rightarrow 2xu + x^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2xu}{u+1}$$

整理可得

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \mathrm{d}u = -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分

$$\ln|y| = \frac{x^2}{y} + C$$

7.3 齐次方程

7.4 一阶线性微分方程

定义 7.1. 伯努利 (Bernoulli) 方程

伯努利 (Bernoulli) 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

两边同除以 y^n, 并令 $z = y^{1-n}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

♣

例7.2 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = a(\ln x)y^2$ 的通解

解 两端同除以 y^2, 得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y^{-1} = a \ln x$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$$

令 $z=y^{-1}$, 则上述方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-a\ln x$$

由常数变易法可得

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

以 y^{-1} 代 z, 得所求方程的通解

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1.$$

例7.3 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+1}{2xy}\cos^2(xy^2)-\dfrac{y}{2x}$ 的通解

解 法 1 两边同乘 $2xy$ 得

$$2xyy'=(2x+1)\cos^2(xy^2)-y^2$$

移项

$$2xyy'+y^2=(2x+1)\cos^2(xy^2)$$

注意到 $(xy^2)'=2xyy'+y^2$, 故

$$(xy^2)'\sec^2(xy^2)=2x+1$$

即

$$\left[\tan(x^2y)\right]'=2x+1$$

上式两边对 x 积分可得

$$\tan(x^2y)=x^2+x+C$$

法 2 令 $xy^2=u$, 则 $2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

注意

$$\text{分离变量}=\begin{cases}1 & \text{能分}\longrightarrow\text{分}\\ 2 & \text{不能分}\longrightarrow\text{代}\end{cases}$$

例7.4 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\tan(x+y)=0$ 的通解

解

$$x+y=u\Longrightarrow 1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入原方程

$$x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right)+x+\tan u=0$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

积分可得

$$\ln|\sin u|=-\ln|x|+C_1\Rightarrow|x\sin u|=e^{C_1}\Rightarrow x\sin u=\pm e^{C_1}$$

令 $C=\pm e^{C_1}$, 并将 $x+y=u$ 代入得原方程解为

$$x\sin(x+y)=C\Longleftrightarrow y=\arcsin\frac{C}{x}-x$$

例7.5 求微分方程 $(x-e^y)y'=1$ 的通解

解

$$(x-e^y)y'=1 \Longrightarrow \frac{1}{x-e^y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x-e^y$$

故

$$x=e^{\int \mathrm{d}y}\left[-\int e^y\cdot e^{-\int \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]=e^y(c-y)$$

例7.6 求微分方程的通解

$$y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x+(1-3xy^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解 由题易得

$$y^2(3y-x)+(3xy^2-1)y'=0$$

两边同除以 y^2

$$3y-x+3xy'-\frac{y'}{y^2}=0$$

移项

$$3(xy'+y)=x+\frac{y'}{y^2}$$

两边同时积分

$$3xy+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{y}$$

例7.7 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-a^2}$ 的通解

解 方程可化为

$$2xy\,\mathrm{d}x-(x^2-y^2-a^2)\,\mathrm{d}y=0$$

$$2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y+(y^2+a^2)\,\mathrm{d}y=0$$

两边同除以 y^2

$$\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{y^2}+\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right)+\mathrm{d}\left(y-\frac{a^2}{y}\right)=0$$

两边同时积分, 可得

$$\frac{x^2}{y}+y-\frac{a^2}{y}=C \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2-a^2}{y}=C$$

例7.8 设曲线 $L:|x|=1,|y|=1$, $f(x)$ 为正值函数, 求 $\oint_L \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s$

解 因为积分区域关于 $y=x$ 对称, 故

$$\oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s \xlongequal{\text{轮换对称性}} \oint_L \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\oint_L (a+b)\mathrm{d}s=4(a+b)$$

例7.9 求微分方程

$$x\ln x\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos y(1-x\cos y)=0$$

解 (by 西西)

$$x\ln x\tan y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cos y-1$$

即

$$x\ln x\tan y\cdot\sec x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-\sec y$$

即

$$x\ln x\frac{\mathrm{d}(\sec y)}{\mathrm{d}x}+\sec y=x$$

设 $\sec y=u$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{u}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}$$

代入公式得

$$u=\sec y=\frac{x+C}{\ln x}$$

例7.10 求微分方程的全部解

$$y'=\frac{1}{1-y^3+2xy^2-x^2y}.$$

解 首先有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}=1-y^3+2xy^2-x^2y=-y\,(x-y)^2+1.$$

令 $z\,(y)=x\,(y)-y$, 我们得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dz}{dy}+1=-yz^2+1,\quad \frac{dz}{dy}=-yz^2,$$

从而

$$\frac{dz}{z^2}=-ydy\Rightarrow\frac{-1}{z}=-\frac{1}{2}y^2+C\Rightarrow\frac{-1}{x-y}=-\frac{1}{2}y^2+C,$$

即

$$x=y+\frac{2}{y^2-2C}.$$

显然 $y=x$ 也满足题意.

例7.11 (18 数学 1) 已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

1. 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.
2. 当 $f(x)$ 周期为 T 的函数时, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期解.

解 (by 向禹) 1. 方程两边乘以 e^x 得

$$(e^xy)'=e^x(y'+y)=xe^x,$$

因此 $e^xy=(x-1)e^x+C$, 因此通解为

$$y=Ce^{-x}+x-1$$

2. 等式两边乘以 e^x 可得 $(e^xy)'=e^xf(x)$, 通解可表示为

$$y(x)=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)$$

现在 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$\begin{aligned}y(x+T)&=e^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)\\&=e^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)e^t\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)e^t\,\mathrm{d}t+C\right)\end{aligned}$$

$$= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u+T)e^{u+T}\,\mathrm{d}u + C\right)$$
$$= e^{-x-T}\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u)e^{u+T}\,\mathrm{d}u + C\right)$$
$$= e^{-x}\left(\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + C\right)e^{-T} + \int_0^x f(u)e^u\,\mathrm{d}u\right)$$

要使得这个解是周期函数, 则 $y(x+T)=y(x)$, 即满足 $\left(\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t + C\right)e^{-T} = C$

由此解得 $C = \dfrac{\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t}{e^T-1}$, 因此 $y = e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}u + \dfrac{\int_0^T f(t)e^t\,\mathrm{d}t}{e^T-1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

7.5 恰当方程与积分因子

7.5.1 恰当方程

定义 7.2. 恰当方程

假设 $M(x,y), N(x,y)$ 在某矩形内是 x, y 的连续函数, 且具有连续的一阶偏导数, 有

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.1}$$

如果方程 (7.1) 的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}u(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

称 (7.1) 为恰当方程.

容易验证 (7.1) 的通解为

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = C$$

这里 C 为任意常数 ♣

定理 7.1

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 是 (7.1) 为恰当方程的充分必要条件 ♡

注意 一些简单二元函数的全微分, 如

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy)$$
$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$
$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

✍ **练习 7.5** 求微分方程: $(3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解

解 这里 $M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

因此方程是恰当方程

现在求 $u(x,y)$ 使它同时满足如下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3 \tag{7.3}$$

由 (7.2) 对 x 积分, 得到

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y) \tag{7.4}$$

为了确定 $\varphi(y)$, 将 (7.4) 对 y 求导数, 并使它满足 (7.5.1), 即得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=6x^2y+4y^3$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=4y^3$$

积分后可得

$$\varphi(y)=y^4$$

将 $\varphi(y)$ 代入 (7.4) 得到

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$$

因此, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

这里 C 为任意常数

解 2 这里 $P(x,y)=3x^2+6xy^2, Q(x,y)=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

因此方程是恰当方程

并由题得

$$3x^2\mathrm{d}x+4y^3\mathrm{d}y+6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y=0$$

即

$$\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2\mathrm{d}y^2=0$$

或者写成

$$\mathrm{d}(x^3+y^4+3x^2y^2)=0$$

于是, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

这里 C 为任意常数

解 3 这里 $M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$, 这时

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy$$

因此方程是全微分方程

取 $x_0=0, y_0=0$, 有

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= \underbrace{\int_0^x (3x^2)\,\mathrm{d}x}_{(0,0)\to(x,0)} + \underbrace{\int_0^y (6x^2y+4y^3)\,\mathrm{d}y}_{(x,0)\to(x,y)} \\ &= x^3+3x^2y^2+y^4 \end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

例7.12 求微分方程 $(6y+x^2y^2)\,\mathrm{d}x+(8x+x^3y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解

解

$$f(x)(6y+x^2y^2)\,\mathrm{d}x+f(x)(8x+x^3y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=0$$

故有

$$f(x)(8x+x^3y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Rightarrow u(x,y)=f(x)\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)$$

$u(x,y)$ 对 x 求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= f'(x)\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)+f(x)\left(2y^4+\frac{3}{5}x^2y^5\right) \\ &= f(x)(6y+x^2y^2) \end{aligned}$$

可得 $f(x)$ 的微分方程

$$f'(x)\left(2x+\frac{1}{5}x^3y\right)=f(x)\left(4+\frac{2}{5}x^2y\right) \Longrightarrow f(x)=C_1x^2$$

于是

$$u(x,y)=C_1x^2\left(2xy^4+\frac{1}{5}x^3y^5\right)=C_2$$

因此, 通解为

$$2x^3y^4+\frac{1}{5}x^5y^5+C=0$$

例7.13 设 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, 求 $u(x,y,z)$

解 [16]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy} \\ &= \frac{(x+y)\,\mathrm{d}(x+y)+z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)+(x+y)\,\mathrm{d}z}{(x+y)^2+z^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}\left((x+y)^2+z^2\right)}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2\left(1+\frac{z^2}{(x+y)^2}\right)} \\ &= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right)+\frac{\frac{(x+y)\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right)+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{x+y}\right)}{1+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2} + \arctan\frac{z}{x+y}\right)$$

所以

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln\left((x+y)^2+z^2\right) + \arctan\frac{z}{x+y}$$

7.5.2 积分因子法

练习 7.6 求微分方程: $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解

解 两边同乘 $u(x)$, 原方程变为

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = u(x)Q(x)$$

使得

$$[u(x)y]' = u(x)y' + u'(x)y = u(x)y' + u(x)P(x)y$$

于是

$$u'(x) = u(x)P(x) \Longrightarrow u(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

于是, 我们得到如下积分因子法

方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 两端同乘以积分因子 $u(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$, 得

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y' + P(x)ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$
$$\Longrightarrow \left(ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

上式两端同时积分可得

$$ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

即

$$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

7.6 可降阶的高阶微分方程

例7.14 求通解: $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

解 令 $u(x) = y' + ay, u'(x) + bu(x) = y'' + y' - 2y$. 则

$$u'(x) + bu(x) = y'' + (a+b)y' + aby,$$

比较系数, 可得

$$\begin{cases} a+b=1, \\ ab=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

取 $a=-1, b=2$, 原方程等价于

$$u'(x) + 2u(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

由常数变易法可求得通解为

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1) - \frac{1}{3}e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{6}$$

7.7 高阶线性微分方程

定理 7.2. 刘维尔公式

若 $y_1(x)$ 是二阶线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个解，则该方程与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解为

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

♡

例7.15 求方程 $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解。

解 因为

$$1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0$$

对应齐次方程一特解为 $y_1=e^x$，由刘维尔公式

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1x+C_2e^x$

例7.16 已知方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的一个特解为 $y=x$, 于是方程的通解为

解 化简可得

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

于是求出通解为

$$y=C_1x+\underbrace{C_2\Big(-\frac{1}{2x}\Big)}_{C_2\times(-\frac{1}{2})\text{仍是常数}}=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

例7.17 方程 $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=0$ 的通解为

解 易知其中一个特解为 $y_1(x)=e^x$, 化简可得

$$y''-\frac{x^2-2}{x^2-2x}y'+\frac{2x-2}{x^2-2x}=0$$

由刘维尔公式，另一个特解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{2-x^2}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x^2\end{aligned}$$

于是求出通解为

$$y=C_1e^x+C_2x^2$$

练习 7.7 求微分方程: $y''-(y')^2+y'=0$ 的通解

解 变形得:

$$y''-(y')^2+y'=0\Longleftrightarrow\frac{y''-(y')^2}{y^2}=-\frac{y'}{y^2}$$

对上式积分得:

$$\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{y} + C_1 \Longrightarrow y' - C_1 y = 1$$

左右同乘 $e^{-C_1 x}$

$$\Longleftrightarrow e^{-C_1 x} y' - C_1 e^{-C_1 x} y = e^{-C_1 x}$$

对上式积分得:

$$e^{-C_1 x} y = -\frac{1}{C_1} e^{-C_1 x} + C_2$$

通解为:

$$y = C_2 e^{C_1 x} - \frac{1}{C}$$

练习 7.8 求微分方程: $y'' = 1 + y'^2$ 的通解

解 移项得

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = 1$$

对上式积分得

$$\arctan y' = x + c_1$$

所以

$$y' = \tan(x + c_1)$$

对上式积分得

$$y = -\ln|\cos(x + c_1)| + c_2$$

7.8 常系数齐次线性微分方程

例7.18 求方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解。

解 特征方程: $\lambda^5 - \lambda^4 = 0$. 特征根:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_5 = 1$$

原方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^x$$

例7.19 求方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解。

解 特征方程: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. 即 $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

特征根:

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm \mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y = (C_1 + C_3 x)\cos x + (C_2 + C_4 x)\sin x$$

例7.20 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解。

解 特征方程:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0.$$

特征根:

$$\lambda_{1,2}=0\,,\quad \lambda_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}$$

原方程通解:

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

例7.21 求微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ 的通解

解 因为 $y\neq 0$, 故题设方程可化为

$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=\ln y,\text{即}\left(\frac{y'}{y}\right)'=\ln y$$

注意到 $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, 上述方程化为

$$(\ln y)''=\ln y.$$

令 $\ln y=z$, 则原方程化为 $z''-z=0$. 利用特征根易得通解为

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

从而所求通解为

$$\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

7.9 常系数非齐次线性微分方程

7.9.1 非齐次线性微分方程的解的叠加原理

定义 7.3. 解的叠加原理

设 y_1^* 和 y_2^* 分别是非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x) \tag{7.5}$$

和

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_2(x) \tag{7.6}$$

的特解, 则 $y_1^*+y_2^*$ 是非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x) \tag{7.7}$$

的特解 ♣

定义 7.4. 复数解的叠加原理

设线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)+ig(x) \tag{7.8}$$

(其中 $a_i(x)$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为实函数) 有复数解 $y=u^*+iv^*$, 则这个解的实部 u^* 和虚部 v^* 分别是线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x) \tag{7.9}$$

和

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x) \tag{7.10}$$

的解 ♣

例7.22 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^x - e - x$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：

e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.

因此可以用下述两种解法

解法一： 故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$，将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x \\ &= e^x - 2xe^x \end{aligned}$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

解法二： 故 $y = xe^x + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$，是所求方程的通解，由

$$\begin{cases} y' = e^x + xe^x - 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x} \\ y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \end{cases},$$

消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

7.9.2 $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_m(x)$ 的特解形式为：

$$y^* = x^k P_m(x)e^{\lambda x}$$

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ P_m(x)\text{为}x\text{的}m\text{次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0 & \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征单根} \\ 2 & \text{当 } \lambda \text{ 是特征重根} \end{cases} \end{cases}$$

例7.23 求方程 $y'' + y' + y = e^x \sin x$ 的通解.

解 特征方程: $r^2 + r + 1 = 0$ 解得: $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

利用欧拉公式

$$y'' + y' + y = e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x} \tag{7.11}$$

由于 $\lambda = 1 + i$ 不是特征根, 故可设特价解为 $y^* = Ae^{(1+i)x}$. 而

$$y^{*\prime} = A(1+i)e^{(1+i)x}$$

$$y^{*\prime\prime} = A(1+i)^2e^{(1+i)x}$$

带入式(7.11), 可解得

$$A = \frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$$

故特解为

$$y^* = \operatorname{Im} Ae^{(1+i)x} = \frac{2}{13}\sin x - \frac{3}{13}\cos x$$

所求通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{2}{13}\sin x - \frac{3}{13}\cos x$$

7.9.3 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 特解的设法：

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[P_m(x)\cos\omega x+Q_m(x)\sin\omega x]$$

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ m=\max\{l,n\},\ P_m(x)\text{和}Q_m\text{分别为}x\text{的两个不同的}m\text{次一般多项式} \\ k=\begin{cases}0, & \text{当 } \lambda+\omega i \text{ 不是特征根},\\ 1, & \text{当 } \lambda+\omega i \text{ 是特征根}.\end{cases} \end{cases}$$

例7.24 求通解 $y''+y=x\cos 2x$

解 特征方程

$$r^2+1=0\Longrightarrow r=\pm i$$

对应齐次方程的通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$l=1,n=0,m=\max\{1,0\}=1,\lambda=0,\omega=2,\lambda+\omega i=2i$$

$\lambda+\omega i=2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

求导为：

$$\begin{aligned} y^{*\prime}&=a\cos 2x-2(ax+b)\sin 2x+c\sin 2x+2(cx+d)\cos 2x\\ &=(a+2cx+2d)\cos 2x+(c-2ax-2b)\sin 2x \end{aligned}$$

再次求导

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime}&=2c\cos 2x-2(a+2cx+2d)\sin 2x-2a\sin 2x+2(c-2ax-2b)\cos 2x\\ &=4(c-ax-b)\cos 2x-4(a+cx+d)\sin 2x \end{aligned}$$

带入原方程，得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较 $\cos 2x$, $\sin 2x$ 的系数，得

$$-3ax-3b+4c=x,-(3cx+3d+4a)=0$$

$$-3a=1,-3b+4c=0,c=0,3d+4a=0$$

解得

$$a=-\frac{1}{3},b=c=0,d=\frac{4}{9}$$

特解为

$$\begin{aligned} y^*&=(ax+b)\cos 2x+(cx+)\sin 2x\\ &=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x \end{aligned}$$

故所求通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

练习 7.9 求通解 $y''+2y'+5y=\sin 2x$

解 特征方程

$$r^2+2r+5=0 \Longrightarrow r=-1\pm 2i$$

对应齐次方程的通解

$$Y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

$$l=0,n=0,m=\max\{0,0\}=0,\lambda=0,\omega=2,\lambda+\omega i=2i$$

$\lambda+\omega i=2i$ 不是特征根，故设特解为

$$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$$

求导为：

$$y^{*\prime}=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$$

再次求导

$$y^{*\prime\prime}=-4a\cos 2x-4b\sin 2x$$

带入原方程，得

$$(-4a+4b+5a)\cos 2x+(-4b-4a+5b)\sin 2x=\sin 2x$$

比较 $\cos 2x$, $\sin 2x$ 的系数，得

$$a+4b=0,b-4a=1$$

解得

$$b=\frac{1}{17},a=-\frac{4}{17}$$

特解为

$$\begin{aligned}y^*&=a\cos 2x+b\sin 2x\\&=-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x\end{aligned}$$

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$$

✍ **练习 7.10** 求通解 $y''+2y'+10y=xe^{-x}\cos 3x$

解 特征方程

$$r^2+2r+10=0$$

特征根

$$r_1=-1-3i,r_2=-1+3i$$

对应齐次方程的通解

$$Y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

$$l=1,n=0,m=\max\{1,0\}=1,\lambda=-1,\omega=3,\lambda+\omega i=-1+3i$$

$\lambda+\omega i=-1+3i$ 是特征根，故设特解为

$$y^*=xe^{-x}((ax+b)\cos 3x+(cx+d)\sin 3x)$$

求导为：

$$y^{*\prime}=e^{-x}\Big(((-a+3c)x^2+(3d+2a-b)x+b\Big)\cos 3x$$

$$+\big(-(3a+c)x^2+(2c-3b-d)x+d\big)\sin 3x\Big)$$

再次求导

$$y^{*\prime\prime}=e^{-x}\Big(\big((-8a-6c)x^2+(-4a-8b+12c-6d)x+(2a-2b+6d)\big)\cos 3x$$
$$+\big((6a-8c)x^2+(-12a+6b-4c-8d)x+(-6b+2c-2d)\big)\sin 3x\Big)$$

带入原方程, 得

$$\big(12cx+(2a+6d)\big)\cos 3x+\big(-6b+2c\big)\sin 3x=x\cos 3x$$

比较 $\cos 3x$, $\sin 3x$ 的系数, 得

$$\begin{cases}12c=1\\2a+6d=0\\-6b+2c=0\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a=-3d\\b=\dfrac{1}{36}\\c=\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

特解为

$$y^*=xe^{-x}((ax+b)\cos 3x+(cx+d)\sin 3x)$$
$$=xe^{-x}\left(\frac{1}{36}\cos 3x+\frac{1}{12}x\sin 3x\right)$$

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+xe^{-x}\left(\frac{1}{36}\cos 3x+\frac{1}{12}x\sin 3x\right)$$

7.9.4 朗斯基 Wronskian 行列式

定理 7.3. Wronskian[1]

微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$, 设 $\bar{Y}=C_1A(x)+C_2B(x)$,
那么对于方程的两个独立解: $A(x), B(x)$

$$\text{Wronskian } W(x)=\begin{vmatrix}A(x) & B(x)\\A'(x) & B'(x)\end{vmatrix}=A(x)B'(x)-A'(x)B(x)$$

设

$$v_1(x)=-\int\frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x\qquad v_2(x)=\int\frac{f(x)A(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x$$

方程的特解由下面式子给出:

$$y^*=v_1A(x)+v_2B(x)$$

方程的通解为

$$y=\bar{Y}+y^*=C_1A(x)+C_2B(x)+v_1A(x)+v_2B(x)$$ ♡

例7.25 求通解 $y''+y=\sec x$.

解 特征方程 $r^2+1=0$, 特征根 $r=\pm i$. 对应齐次方程的通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\(\cos x)' & (\sin x)'\end{vmatrix}=\cos^2x+\sin^2x=1$$

其中

$$v_1(x) = -\int \frac{\sec x \sin x}{1}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x|$$

$$v_2(x) = \int \frac{\sec x \cos x}{1}\,\mathrm{d}x = x$$

故特解为

$$y^* = \cos x \ln(\cos x) + x \sin x$$

那么所求通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x$$

例7.26 求通解: $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

解 特征方程 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根 $r = -2$ 或 $r = 1$

对应齐次方程的通解

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

朗斯基行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ (e^{-2x})' & (e^x)' \end{vmatrix} = 3e^{-2x}e^x$$

其中

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\int \frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^x}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}e^x(e^x - 2) - \frac{1}{3}\ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int \frac{f(x)B(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^x}{1+e^x}e^{-2x}}{3e^{-2x}e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

故特解为

$$\begin{aligned} y^* &= v_1 A(x) + v_2 B(x) \\ &= \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x + 1) - \frac{1}{3}e^x \ln(e^x + 1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

那么所求通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= Y + y^* \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{xe^x}{3} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x + 1) - \frac{1}{3}e^x \ln(e^x + 1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

7.9.5 微分算子法

定义 7.5. 算子多项式

对于函数 $f(x)$: 规定下列记号及意义:

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$$

$$D^2=DD=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \qquad D^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=y''$$

$$D^k=D^{k-1}D=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \qquad D^ky=\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}^kx}=y^{(k)} \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$D^0=1 \qquad D^0y=1,\ y=y \text{ 这里“1" 仅仅是个记号}$$

记 $F(D)=D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$ 称为形式上的算子多项式.

$$F(D)y=D^ny+a_1D^{n-1}y+a_2D^{n-2}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny$$ ♣

定义 7.6. 逆算子

算子 $\frac{1}{F(D)}$ 为 $F(D)$ 的逆算子. 逆算子 $\frac{1}{D}$ 为积分 ♣

7.9.5.1 $f(x)=e^{kx}$ 型

定理 7.4. $f(x)=e^{kx}$ 型

1° 若 $F(k)\neq 0$, 则 $\frac{1}{F(D)}e^{kx}=\frac{e^{kx}}{F(k)}$

2° 若 $F(k)=0$, 且 k 为 $F(k)=0$ 的 n 重根 $(n=1,2)$,

$$\frac{1}{F(D)}e^{kx}=x^n\frac{1}{F^{(n)}(D)}e^{kx}=x^n\frac{e^{kx}}{F^{(n)}(k)}$$

其中 $F^{(n)}(D)=\frac{\mathrm{d}^nF(D)}{\mathrm{d}D^n}$. ♡

例7.27 $y''+3y'+2y=5e^{3x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k=3\Rightarrow F(k)=k^2+3k+2=3^2+3\cdot 3+2\neq 0$, 故设特解为

$$y^*=\frac{5e^{3x}}{D^2+3D+2}=\frac{5e^{3x}}{3^2+3\cdot 3+2}=\frac{1}{4}e^{3x}$$

例7.28 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k=-3\Rightarrow F(k)=k^2+2k-3=(k-1)(k+3)=0$, 故 $k=-3$ 为 $F(k)=0$ 的 1 重根, 故设特解为

$$y^*=x\cdot\frac{e^{-3x}}{2D+2}=x\cdot\frac{e^{-3x}}{2\cdot(-3)+2}=-\frac{1}{4}xe^{-3x}$$

例7.29 $y''+2y'+y=e^{-x}$, 求特解 y^*

解 因为 $k=-1\Rightarrow F(k)=k^2+2k+1=(k+1)^2=0$, 故 $k=-1$ 为 $F(k)=0$ 的 2 重根, 故设特解为

$$y^*=x^2\cdot\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

7.9.5.2 $f(x)$ 为 $\sin(ax)$ 或 $\cos(ax)$ 型

定理 7.5. $f(x)$ 为三角函数型

1° 若 $F(-a^2)\neq 0$, 则

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax)=\frac{\sin(ax)}{F(-a^2)}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax)=\frac{\cos(ax)}{F(-a^2)}$$

2° 若 $F(-a^2)=0$, 且 $(-a^2)$ 为 $F(-a^2)=0$ 的 n 重根 $(n=1,2)$

$$\frac{1}{F(D)}\sin(ax)=x^n\frac{1}{F'(D)}\sin(ax)$$

$$\frac{1}{F(D)}\cos(ax)=x^n\frac{1}{F'(D)}\cos(ax)$$

♡

例7.30 $y''+3y=\sin 2x$, 求特解 y^*

解 因为 $a=2\Rightarrow F(-a^2)=-a^2+3\neq 0$, 故设特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+3}\sin 2x=\frac{1}{-a^2+3}\sin 2x=\frac{1}{-2^2+3}\sin 2x=-\sin 2x$$

例7.31 $y''+4y=\cos 2x$, 求特解 y^*

解 因为 $a=2\Rightarrow F(-a^2)=(-a^2)+4=0$, 故 $-a^2$ 为 $F(-a^2)=0$ 的 1 重根, 故设特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+4}\cos 2x=\frac{x}{2D}\cos 2x=\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{D}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{x\sin 2x}{4}$$

例7.32 $y''+3y'-2y=\sin 2x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^2+3D-2}\sin 2x\\
&=\frac{1}{-(2)^2+3D-2}\sin 2x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{D-2}\sin 2x\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{D+2}{D^2-4}\sin 2x=\frac{1}{3}\left[\frac{D\sin 2x}{D^2-4}+\frac{2\sin 2x}{D^2-4}\right]\\
&=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cos 2x}{D^2-4}+\frac{2\sin 2x}{D^2-4}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cos 2x}{-2^2-4}+\frac{2\sin 2x}{-2^2-4}\right]\\
&=-\frac{1}{12}(\sin 2x+\cos 2x)
\end{aligned}$$

定理 7.6. $f(x)$ 为正 (余) 弦函数

$$\frac{1}{F(D)}\sin(ax)=\mathrm{Im}\left[\frac{e^{iax}}{F(ia)}\right]$$

$$\frac{1}{F(D)}\cos(ax)=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{iax}}{F(ia)}\right]$$

♡

7.9.5.3 $f(x)=e^{kx}v(x)$ 形

定理 7.7. $f(x)=e^{kx}v(x)$

自由项 $f(x)=f(x)=e^{kx}v(x)$ (k 可以是复数), $v(x)$ 是实函数.

$$\frac{1}{F(D)}\left(e^{kx}v(x)\right)=e^{kx}\cdot\frac{1}{F(D+k)}v(x)$$

♡

例7.33 $y''+3y'-2y=e^x\sin 2x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^2+3D-2}e^x\sin 2x\\
&=e^x\frac{1}{(D+1)^2+3(D+1)-2}\sin 2x=e^x\frac{1}{D^2+5D+2}\sin 2x\\
&=e^x\frac{1}{-2^2+5D+2}\sin 2x=e^x\frac{1}{5D-2}\sin 2x\\
&=e^x\frac{5D+2}{25D-4}\sin 2x=e^x\frac{5D+2}{25\cdot-2^2-4}\sin 2x\\
&=-\frac{1}{104}e^x(10\cos 2x+2\sin 2x)\\
&=-\frac{1}{52}e^x(5\cos 2x+\sin 2x)
\end{aligned}$$

例7.34 $y''-2y'+y=xe^x$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^2-2D+1}(xe^x)=e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}x\\
&=e^x\frac{1}{D^2}x=e^x\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^3e^x}{6}
\end{aligned}$$

7.9.5.4 $f(x)=P_n(x)$($P_n(x)$ 为 n 次多项式形)

定理 7.8. $f(x)=P_n(x)$

将 $\frac{1}{F(D)}$ 展开为形式上的泰勒级数 (或洛朗级数)

$$\frac{1}{F(D)}=a_1+a_2D+a_3D^2+\cdots+a_nD^n$$

取展开式到第 n 项为止, 则特解

$$\frac{1}{F(D)}P_n(x)=(a_0+a_1D+\cdots+B_nD^n)P_n(x)$$

♡

例7.35 $y''+y'=x^2+1$, 求特解 y^*

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^2+D}(x^2+1)=\frac{1}{D}\left[\frac{1}{1+D}(x^2+1)\right]\\
&=\frac{1}{D}\left[(1-D+D^2)(x^2+1)\right]=\frac{1}{D}\left[(x^2+1)-(2x)+(2)\right]\\
&=\frac{1}{D}[x^2-2x+3]=\frac{x^3}{3}-x^2+3x
\end{aligned}$$

7.9.5.5 $f(x)=xP(x)(P(x)$ 为指数函数或正 (余) 弦函数)

定理 7.9. $f(x)=xP(x)$

$$\frac{1}{F(D)}(xP(x))=\left(x-\frac{F'(D)}{F(D)}\right)\frac{1}{F(D)}P(x)$$

♡

7.10 欧拉方程

定义 7.7. 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x) \tag{7.12}$$

的方程 (其中 $p_1,p_2,\cdots p_n$ 为常数) , 叫做欧拉方程

♣

作变换令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, 将自变量 x 换成 t , 我们有

$$x=\ln t\Longrightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x},\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(-\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么上述计算结果可以写成

$$xy'=Dy$$

$$x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y=(D^2-D)y=D(D-1)y$$

$$x^3y'''=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y$$

一般地, 有

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

将它带入欧拉方程 (7.12) 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个解后, 把 t 换成 $\ln x$, 即得原方程的解.

7.11 二阶线性偏微分方程

定义 7.8. 二阶线性偏微分方程一般形式[2]

$$a(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{7.13}$$

♣

设 $a(x,y),b(x,y)$ 及 $c(x,y)$ 是某区域 D 上具有二阶连续偏导数的函数.

(1) 当 $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0,(x,y)\in D$ 时, 称 (7.13) 为**双曲型**;

(2) 当 $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0,(x,y)\in D$ 时, 称 (7.13) 为**抛物型**;

(3) 当 $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0, (x,y)\in D$ 时, 称 (7.13) 为**椭圆型**;

7.11.1 二阶线性偏微分方程-特征线法

首先求解特征线方程

$$a(x,y)\,\mathrm{d}y^2-2b(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+c(x,y)\,\mathrm{d}x^2=0 \tag{7.14}$$

这是一个二次一阶常微分方程, 可写成两个方程

$$a\,\mathrm{d}y-(b+\sqrt{b^2-ac})\,\mathrm{d}x=0, \tag{7.15}$$

$$a\,\mathrm{d}y-(b-\sqrt{b^2-ac})\,\mathrm{d}x=0, \tag{7.16}$$

设已求出 (7.15) 与 (7.16) 的通积分

$$\varphi(x,y)=c\,,\quad \psi(x,y)=c$$

(1) 对双曲方程 $(b^2-ac>0)$, 用新变量 (ξ,η) 来代替原变量 (x,y):

$$\xi=\varphi(x,y)\,,\quad \eta=\psi(x,y) \tag{7.17}$$

这时可以将原方程 (7.13) 化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_1\Big(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big)$$

这是双曲型方程的正则型.

(2) 对抛物型方程 $(b^2-ac=0)$, 这时只得到一个通积分 $\varphi(x,y)=c$, 今任选一函数 $\eta=\eta(x,y)$. 要求它与 φ 在 D 上独立, 即要求

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

则代换 (7.17) 可将方程 (7.13) 化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_2\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big)$$

这是抛物型方程的正则型.

(3) 对椭圆型方程 $(b^2-ac<0)$, (7.15) 与 (7.16) 的通积分将为复共轭, 它们因此定义了一对虚特征线. 设 (7.15) 的通积分是

$$\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y)=c$$

$\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为其实部与虚部, 则用它们来作代换 (7.17) 可将方程 (7.13) 化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_3\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big)$$

这是椭圆型方程的正则型.

7.11.2 二阶线性偏微分方程-分离变量法

第 8 章 差分方程

8.1 差分方程概述

定义 8.1. 差分的定义

设自变量 t 取离散的整数值 $t=0,1,2,\cdots$，而 y 是 t 的函数，记为 $y_t=f(t)$。当自变量从 t 变到 $t+1$ 时，相应的函数值的改变量称为函数 $y(t)$ 在 t 处的一阶差分，记为

$$\Delta y_t=y(t+1)-y(t) \quad 或 \quad \Delta y_t=y_{t+1}-y_t$$

函数 $y(t)$ 在 t 处的二阶差分记为

$$\Delta^2 y_t=\Delta(\Delta y_t)=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$$

函数 $y(t)$ 在 t 处的 n 阶差分记为

$$\Delta^n y_t=\Delta(\Delta^{n-1}y_t)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i y_{t+n-i}$$

♣

定理 8.1. 差分的四则运算

当 a,b,C 为常数，u_t 和 v_t 为 t 的函数时，有以下结论成立

(1) $\Delta(C)=0$;

(2) $\Delta(Cy_t)=C\Delta y_t$;

(3) $\Delta(au_t+bv_t)=a\Delta u_t+b\Delta v_t$;

(4) $\Delta(u_tv_t)=u_t\Delta v_{t+1}+v_{t+1}\Delta u_t$;

(5) $\Delta\left(\dfrac{u_t}{v_t}\right)=\dfrac{v_t\Delta u_t-u_t\Delta v_t}{v_tv_{t+1}}$;

♡

定义 8.2. 差分方程

一般地，含未知函数有和未知函数差分的方程称为差分方程

差分方程的一般形式为

$$F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+n})=0 \quad 或 \quad G(t,y_t,\Delta y_t,\cdots,\Delta^n y_t)=0$$

其中 F，G 为表达式，t 是自变量

♣

定义 8.3

n 阶非齐次线性差分方程形如

$$a_0(t)y_{t+n}+a_1(t)y_{t+n-1}+\cdots+a_n(t)y_t=f(t)$$

其中右端项 $f(t)$ 和各项系数 $a_0(t),a_1(t),\cdots,a_n(t)$ 为已知函数。

相应的齐次线性差分方程为

$$a_0(t)y_{t+n}+a_1(t)y_{t+n-1}+\cdots+a_n(t)y_t=0$$

♣

定义 8.4

设有二阶非齐次线性差分方程

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f(t)$$

相应的齐次线性差分方程为

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=0$$

其中系数 $b(t)\neq 0$ ♣

8.2 一阶常系数线性差分方程

8.2.1 迭代法

一阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1}-py_t=f(t) \tag{8.1}$$

其中常数系数 $p\neq 0$，未知函数项 y_{t+1} 和 y_t 为一次的，右端项 $f(t)$ 为已知函数。与其相应的齐次方程为

$$y_{t+1}-py_t=0 \tag{8.2}$$

齐次差分方程 (8.2) 的通解为

$$Y_t=Cp^t, t=0,1,2,\cdots \tag{8.3}$$

当 $f(t)=b$ 为常数，非齐次差分方程 (8.1) 的通解为

$$y_t=\begin{cases}Cp^t+\dfrac{b}{1-p}, & p\neq 1,\\ C+bt, & p=1.\end{cases}$$

8.2.2 待定系数法

① $y_{t+1}-py_t=P_n(t)$, $P_n(t)$ 为 t 的 n 次多项式.

(1) 当$p=1$时，设其为

$$y_t^*=t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

(2) 当$p\neq 1$时，设其为

$$y_t^*=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n$$

② $y_{t+1}-py_t=\lambda^tP_n(t)$, 其中, λ 为已知常数, $P_n(t)$ 为 t 的 n 次多项式

设特解为

$$y_t=t^k\lambda^t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

其中, 当$p=\lambda$时$k=1$; 当$p\neq\lambda$时$k=0$

③ $y_{t+1}-py_t=b_1\cos\omega t+b_2\sin\omega t$, 其中, b_1,b_2,ω 为已知常数.

(1) 若 $D=(\cos\omega-p)^2+\sin^2\omega\neq 0$, 则设特解为

$$y_t^*=\bar{B}_1\cos\omega t+\bar{B}_2\sin\omega t,$$

(1) 若 $D=(\cos\omega-p)^2+\sin^2\omega=0$, 则设特解为

$$y_t^*=x(\bar{B}_1\cos\omega t+\bar{B}_2\sin\omega t),$$

例8.1 求 $y_{t+1}-5y_t=3$ 的通解和满足 $y\big|_{t=0}=\dfrac{7}{3}$ 的特解

解 该差分方程中 $p=5$，$b=3$，由式 (8.2.1) 得到方程通解

$$y_t=C\cdot 5^t+\frac{3}{1-5}=C\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

将 $y_0=\dfrac{7}{3}$ 带入上式得到 $C=\dfrac{37}{12}$，故所求特解为

$$y_t^*=\frac{37}{12}\cdot 5^t-\frac{3}{4}$$

例8.2 求 $y_{t+1}-y_t=3+2t$ 的通解

解 由式 (8.3) 得到齐次方程的通解为

$$y_t=C,$$

因为 $p=1$ 故设所求方程的特解为 $\bar{y}_t=t(b_0+b_1t)$ 代入方程得

$$(t+1)\big(b_0+b_1(t+1)\big)-t(b_0+b_1t)=3+2t$$

所以

$$\begin{cases}2b_1=2\\ b_0+b_1=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b_1=1\\ b_0=2\end{cases}$$

故所求通解为

$$y_t=C+2t+t^2$$

例8.3 求 $y_{t+1}-3y_t=7\cdot 2^t$ 的通解

解 由式 (8.3) 得到齐次方程的通解为

$$\bar{y}_t=C\cdot 3^t,\quad \text{其中 } C \text{ 为常数.}$$

因为 $3=p\neq\lambda=2$ 故设所求方程的特解为 $y_t^*=b\cdot 2^t$ 代入方程得

$$b\cdot 2^{t+1}-3b\cdot 2^t=7\cdot 2^t\Rightarrow b=-7$$

故所求方程特解为

$$y_t^*=-7\cdot 2^t$$

通解为

$$y_t=C\cdot 3^t-7\cdot 2^t$$

8.3 二阶常系数线性差分方程

二阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=f(t)\tag{8.4}$$

其中 p,q 为常数系数 $(q\neq 0)$，未知函数项 y_{t+2},y_{t+1} 和 y_t 为一次的，右端项 $f(t)$ 为已知函数。与其相应的齐次方程为

$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=0\tag{8.5}$$

将 $y_t=\lambda^t$ 代入 (8.5) 得到

$$\lambda^2+p\lambda+q=0\tag{8.6}$$

容易证明 $y_t=\lambda^t$ 为 (8.5) 的解，当且仅当 λ 为 (8.6) 的解，因此称二次代数方程 (8.6) 为 (8.4) 和 (8.5) 的特征方程，其根为特征根。特征根有两个

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)$$

1. 当 $p^2>4q$ 时，特征方程有一对互异实根

   $\lambda_1=\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right),\lambda_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\right)$

   (8.5) 通解为 $y_t=C_1\lambda_1^t+C_2\lambda_2^t$，其中 C_1,C_2 为任意常数
2. 当 $p^2=4q$ 时，特征方程有二重实根 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$，

   (8.5) 通解为 $y_t=(C_1+C_2t)\left(-\frac{p}{2}\right)^t$，其中 C_1，C_2 为任意常数
3. 当 $p^2<4q$ 时，特征方程有共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

   特征根的实部 $\alpha=-\frac{p}{2}$，

   特征根的虚部 $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$

   $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 其中 $\cos\theta=\frac{\alpha}{r},\sin\theta=\frac{\beta}{r},\theta\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

   (8.5) 通解为 $y_t=r^t\left(C_1\cos(\theta t)+C_2\sin(\theta t)\right)$，其中 C_1，C_2 为任意常数

8.3.1 求二阶常系数非齐次线性差分方程的特解

1. 设 $f(t)=P_n(t)$，即 (8.4) 右端为一个已知的 n 次多项式

   $$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=P_n(t)$$

   方程可改写为

   $$\Delta^2y_t+(p+2)\Delta y_t+(1+p+q)y_t=P_n(t)$$

   (a). 当 $1+p+q\neq0$ 时，设

   $$y_t=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n$$

   (b). 当 $1+p+q=0,p+2\neq0$ 时，设

   $$y_t=t\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

   (c). 当 $1+p+q=0,p+2=0$ 时，设

   $$y_t=t^2\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$
2. 设 $f(t)=\lambda^tP_n(t)$，此时有

   $$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=\lambda^tP_n(t)$$

   设 (8.4) 有特解

   $$y_t=\lambda^tt^k\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n\right)$$

   其中 k 等于 λ(作为特征根) 的重数

例8.4 求 $y_{t+2}+5y_{t+1}+4y_t=0$ 的通解

解 其特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-4$, 故

$$y_t=C_1(-1)^t+C_2(-4)^t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数

例8.5 求 $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$ 的通解

解 其特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=3$, 故

$$y_t=(C_1+tC_2)3^t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例8.6 求 $y_{t+2}+4y_t=0$ 的通解解

解 其特征方程 $\lambda^2+4=0$, 特征根 $\lambda=\pm 2i$

实部

$$\alpha=-\frac{p}{2}=0$$

虚部

$$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}=2$$

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2,\sin\beta=\frac{\beta}{r}=1$$

故所求通解为

$$y_t=2^t\left(C_1\sin\frac{\pi}{2}t+C_2\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例8.7 数列 $F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ 如果满足条件

$$F_1=F_2=1\ ;\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ ,\ n\geqslant 3$$

则称此数列为斐波那契 (Fibonacci) 数列.

解 特征方程 $x^2=x+1\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 故

$$F_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

将 $F_1=F_2=1$ 代入得

$$\begin{cases}C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1\\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1\end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $C_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 从而

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

例8.8 (18 数 3) 差分方程 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 的通解是 $\underline{\quad C2^x-5\quad}$

解 法 I. 根据二阶差分的定义可得

$$\begin{aligned}\Delta^2y_x&=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)\\&=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x\end{aligned}$$

由 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 得

$$y_{x+2}-2y_{x+1}=5$$

先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$, 齐次方程通解为 $Y=C2^x$.

由于 $1+p+q=1+(-2)+0\neq 0$, 故设原差分方程的特解为 $y^*=a$,

将特解带入非齐次方程

$$a-2a=5\Longrightarrow a=-5$$

于是原方程的通解为

$$y_x=Y+y^*=C2^x-5$$

法 II(降阶法). 根据二阶差分的定义可得

$$\begin{aligned}\Delta^2y_x&=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)\\&=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x\end{aligned}$$

由 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 得

$$y_{x+2}-2y_{x+1}=5$$

令 $u_x=y_{x+1}-ay_x, u_{x+1}+bu_x=y_{x+2}-2y_{x+1}$, 则

$$y_{x+2}-(a-b)y_{x+1}-aby_x=y_{x+2}-2y_{x+1}$$

比较系数, 可得

$$\begin{cases}a-b=2\\ab=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}$$

取 $a=2,b=0$, 原方程等价于 $u_{x+1}=5$, 即 $u_t=5$. 从而

$$y_{x+1}-2y_x=5\Longrightarrow y_t=C2^t-5$$

例8.9 求 $y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_4=4$ 的通解

解 特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$
对应的齐次方程的通解

$$y_t=C_1+C_22^t$$

因 $1+p+q=1-3+2=0, p+2=-3+2=-1\neq0$
故设非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t=bt$
将其代入差分方程得

$$b(t+2)-3b(t+1)+2bt=4$$

解得 $b=-4$, 所求通解为

$$y_t=C_1+C_22^t-4t$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例8.10 求 $y_{t+2}+y_{t+1}-2y_4=12t$ 的通解

解 其特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

特征根

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$$

对应的齐次方程的通解

$$y_t=C_1+C_2(-2)^t$$

因为

$$1+p+q=1+1-2=0,\ p+2=1+2=3\neq 0$$

故设非齐次方程的一个特解为

$$\bar{y}_t=t(b_0+b_1t)$$

将其代入差分方程得

$$(t+2)(b_0+b_1(t+2))+(t+1)(b_0+b_1(t+1))-2t(b_0+b_1t)=12t$$

整理得

$$6b_1t+3b_0+5b_1=12x$$

比较系数，得

$$\begin{cases}6b_1=12,\\3b_0+5b_1=0,\end{cases}$$

解得 $b_0=-\dfrac{10}{3},b_1=2$

故所求通解为

$$y_t=C_1+C_2(-2)^t-\frac{10}{3}t+2x^2$$

其中 C_1，C_2 为任意常数

例8.11 求 $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=3^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

有特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=3$$

$f(t)=3^tP_0(t)$，因 $\lambda=3$ 为二重根，故设特解为 $\bar{y}_t=bt^23^t$

将其代入差分方程得

$$b(t+2)^23^{t+2}-6b(t+1)^23^{t+1}+9b^23^t=3^t$$

解得 $b=\dfrac{1}{18}$，特解为 $\bar{y}_t=\dfrac{1}{18}t^23^t$ 所求通解为

$$y_t=(C_1+C_2t)3^t+\frac{1}{18}t^23^t$$

例8.12 求 $y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=5^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

有特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=2$$

$f(t)=5^tP_0(t)$，因 $\lambda=5$ 不是特征根，故设特解为 $\bar{y}_t=b3^t$

将其代入差分方程得

$$b3^{t+2}-4b3^{t+1}+4b3^t=5^t$$

解得 $b=\dfrac{1}{9}$，非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t=\dfrac{1}{9}5^t$

所求通解为

$$y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + \frac{1}{9}5^t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数

例8.13 求 $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 2^t$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

有特征根

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$f(t) = 2^t P_0(t)$，因 $\lambda = 2$ 是单特征根，故设特解为 $\bar{y}_t = bt2^t$
将其代入差分方程得

$$b(t+2)2^{t+2} - 3(t+1)b3^{t+1} + 2bt3^t = 2^t$$

解得 $b = \frac{1}{2}$，非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = \frac{1}{2}2^t = 2^{t-1}$
所求通解为

$$y_t = C_1 + \left(C_2 + \frac{1}{2}\right)2^t$$

其中 C_1，C_2 为任意常数

8.3.1.1 微分算子法

8.4 差分方程应用举例

例8.14 广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r．
则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 50000$$

该差分方程的解为

$$y_x = \frac{y_0 - \frac{m}{r}}{(1+r)^x} + \frac{m}{r}$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\left[y_0(1+r)^x - y_x\right]}{(1+r)^x - 1}$$

当 $x = 240$ 时，$y_x = 0$，代入得到 $m = 2835.97$．

例8.15 (筹措教育经费模型) 某家庭现在起每月从工资中拿出一部分资金存入银行，用于投资子女的教育. 并计划 20 年后开始从投资帐户中每月支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部资金. 要实现这个投资目标，每月要向银行存入多少钱？20 年内共要筹措多少资金？（假设投资的月利率为 0.5%）

解 设第 n 个月投资帐户资金为 S_n 元，每月存入资金为 a 元. 于是，
20 年后关于 S_n 的差分方程模型为

$$S_{n+1} = 1.005S_n - 1000 \tag{8.7}$$

并且 $S_{120}=0$, $S_0=x$, 解方程 (8.7) ， 易得其通解为

$$S_n=1.005^nC-\frac{1000}{1-1.005}=1.005^nC+200000$$

以及

$$S_{120}=1.005^{120}C+200000=0$$

$$S_0=C+200000=x$$

从而有

$$x=200000-\frac{200000}{1.005^120}=90073.45$$

从现在到 20 年内， S_n 满足的差分方程为

$$S_{n+1}=1.005S_n+a \tag{8.8}$$

且 $S_0=0$, $S_{240}=90073.45$. 解方程 (8.8) ， 易得通解为

$$S_n=1.005^nC+\frac{a}{1-1.005}=1.005^nC-200a$$

以及

$$S_{240}=1.005^{240}C-200a=90073.45\,,\quad S_0=C-200a=0$$

从而有

$$a=194.95$$

20 年内要筹措资金 90073.45 元，平均每月要存入银行 194.95 元.

第 9 章 向量代数与空间解析几何

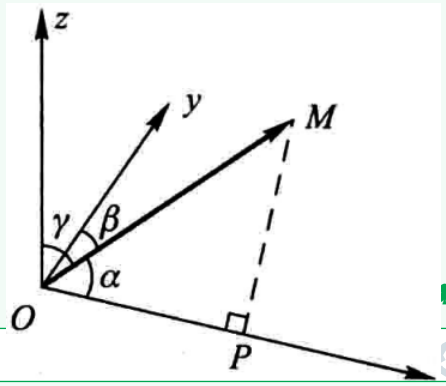
9.1 向量及其线性运算

定义 9.1. 方向余弦

设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 则

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}$$
$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 被称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦



定义 9.2. $\boldsymbol{a}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

练习 9.1 设 $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3-8+15=10$ $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{10}{\sqrt{14}}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&4&5\\1&-2&3\end{vmatrix}=(22,-4,-10).$$

9.2 数量积向量积[1] 混合积

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$\underbrace{\overbrace{[\boldsymbol{acb}]=[\boldsymbol{bca}]}^{\text{对换变号: }[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{bac}]}=[\boldsymbol{abc}]}_{\text{轮换性}}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

定理 9.1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

[1] 同济 7 版的《高等数学》p18

定理 9.2. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \theta = 0\text{或}\pi \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right\| = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

♡

定理 9.3. 三向量共面

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

♡

定理 9.4. 四面体的体积

不共面四点 A, B, C, D 所构成的四面体的体积为: $V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$

♡

9.3 平面及其方程

例9.1 求过点 $A(1,2,-1), B(2,3,0), C(3,3,2)$ 的三角形 $\triangle ABC$ 的面积和它们确定的平面方程.

解 由题设 $\overrightarrow{AB} = (1,1,1), \overrightarrow{AC} = (2,1,3)$,

故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2,-1,-1)$$

三角形 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

所求平面的方程为 $2(x-2)-(y-3)-z=0$, 即 $2x-y-z-1=0$

例9.2 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 _____

解 因平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $(2,2,-1)$，而曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 在 (x_0, y_0) 处的法向量为

$$\left(z_x(x_0,y_0), z_y(x_0,y_0), -1\right)$$

故 $\left(z_x(x_0,y_0), z_y(x_0,y_0), -1\right)$ 与 $(2,2,-1)$ 平行，

因此，由 $z_x = x, z_y = 2y$，知

$$2 = z_x(x_0,y_0) = x_0\,,\ 2 = z_y(x_0,y_0) = 2y_0$$

即 $x_0 = 2, y_0 = 1$，又 $z(x_0,y_0) = z(2,1) = 1$,

于是曲面 $2x+2y-z=0$ 在 $(x_0, y_0, z(x_0,y_0))$ 处的切平面方程是

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=0$$

即曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面的切平面方程是

$$2x+2y-z-5=0$$

定理 9.5. 点法式方程

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 Π 上一点，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是平面 Π 的一个法线向量. 设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. 平面 Π 方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ ♡

例9.3 求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程

解 因为向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$，所以可取他们的向量积为 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14i+9j-k,$$

由点法式方程，可得所求平面方程为

$$14x+9y-z-15=0$$

定理 9.6. 点到平面的距离

① 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

② 设直线过点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$，则点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$ ♡

例9.4 求点 $P(2,2,1)$ 到直线 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 的距离.

解 法 I. $P_1(-1,2,0)\in L$，L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,-1,2)$，则利用点到直线的距离公式，即得

$$d(P,L)=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{PP_1}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{6}}|(-1,5,3)|=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

法 II. 过点 P 垂直于直线 L 的平面为

$$\Pi:(x-2)-(y-2)+2(z-1)=0$$

将 L 参数化：$L:x=t-1,y=-t+2,z=2t$，代入平面 Π 的方程，得到

$$(t-3)-(-t)+2(2t-1)=0,$$

解得 $t=\frac{5}{6}$，将它代入 L 的参数方程，得到点 $Q(-\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{10}{6})$，这是直线 L 与平面 Π 的交点，也就是点 P 在直线 L 上的垂足点，所以

$$d(P,L)=d(P,Q)=\sqrt{\left(-\frac{13}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

法 III. 将 L 参数化：$L:x=t-1,y=-t+2,z=2t$，设 P 在直线 L 上的垂足点为 $Q(t-1,-t+2,2t)$，则 $\overrightarrow{PQ}\perp L$，从而 $\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$，即

$$(t-3)-(-t)+2(2t-1)=0,$$

解得 $t=\frac{5}{6}$, 得到点 $Q(-\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{10}{6})$, 所以

$$d(P,L)=d(P,Q)=\sqrt{\left(-\frac{13}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

定理 9.7. 平面与 xOy 面的夹角

平面 $\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ 与坐标面 $z=0$ 的夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

定理 9.8. 两平面之间的夹角

$$\prod_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$$

$$\prod_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$$

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

例9.5 设两个平面均通过点 $A(-5,10,12)$, 其中一个平面通过 x 轴, 另一个通过 y 轴, 试求两个平面的夹角.

解 平面通过通过 x 轴 $\Rightarrow A=D=0\Rightarrow By+Cz=0$

$$\begin{cases}By+Cz=0\\B(y-10)+C(z-12)=0\end{cases}\Longrightarrow 6y-5z=0$$

平面通过通过 y 轴 $\Rightarrow B=D=0\Rightarrow Ax+Cz=0$

$$\begin{cases}Ax+Cz=0\\A(x+5)+C(z-12)=0\end{cases}\Longrightarrow 12x+5z=0$$

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|12\times0+0\times6+5\times(-5)|}{\sqrt{12^2+0^2+5^2}\sqrt{0^2+6^2+(-5)^2}}=\frac{25}{13\sqrt{61}}$$

两个平面的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{25}{13\sqrt{61}}$.

9.4 空间直线及其方程

9.4.1 空间直线的方程

L 为过一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 平行的直线

L 的参数方程: $\begin{cases}x=x_0+tm\\y=y_0+tn\\z=z_0+tp\end{cases}\ (-\infty<t<+\infty)$

L 的对称式方程: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

L 的交面式方程 (一般方程)两张不平行的平面相交成一条直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

L 的对称式方程：

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

定义 9.3. 两点式方程

过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

♣

例9.6 (2014CMC) 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \neq 0$, 曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

解 由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$
$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

上述两切面的交线就是 Γ 在 P_0 点的切线, 该切线在 xOy 面上的投影就是 S 过 (x_0,y_0) 的切线. 消去 $z-z_0$, 我们得到

$$(F_xG_z-G_xF_z)_{P_0}(x-x_0)+(F_yG_z-G_yF_z)_{P_0}(y-y_0)=0,$$

这里 $x-x_0$ 的系数是 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \neq 0$, 故上式是一条直线的方程, 就是所要求的切线.

9.4.2 两直线之间的关系

定理 9.9. 两空间直线垂直

设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \perp \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

♡

定理 9.10. 两空间直线平行

设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 // \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

♡

9.4.3 直线与平面之间的关系

例9.7 (1990 数学 1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_____

解 平面的法向量就是直线的方向向量, 为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\{-1,3,1\}$$

平面的点法式方程:

$$-1(x-1)+3(y-2)+1(z-(-1))=0 \Longrightarrow x-3y-z+4=0$$

例9.8 (1991 数学 1) 已知两条直线的方程是

$$L_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\ L_2:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

且过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____

解 平面经过点 $(1,2,3)$，且与向量 $\{1,0,-1\}$ 和 $\{2,1,1\}$ 都垂直。

平面的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{n}}&=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}\\&=\left\{\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\right\}=\{1,-3,1\}\end{aligned}$$

平面的点法式方程：

$$1(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0\Longrightarrow x-3y+z+2=0$$

9.5 曲面及其方程

例9.9 过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为_____

解 在 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1\\x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 中消去 z，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2(4-x^2-y^2)=1,\quad \text{即}\ 9x^2+10y^2=36$$

直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 的一个方向向量为

$$\vec{\boldsymbol{s}}=\vec{\boldsymbol{n}}_1\times\vec{\boldsymbol{n}}_2=\{1,0,0\}\times\{0,3,1\}=\{0,-1,3\}$$

并且所求平面方程与直线垂直，故所求平面方程的一条法线向量为

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\{0,-1,3\}$$

交线上其中一点为 $(2,0,0)$，因此所求平面方程为

$$-y+3z=0$$

9.5.1 旋转曲面

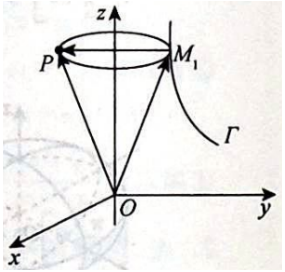
1. 曲线 C $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周得旋转曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
2. 曲线 C $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周得旋转曲面 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

例9.10 求直线 $\Gamma:\begin{cases}y=x\\z=0\end{cases}$ 绕 $L:x-1=y-1=z-1$ 旋转一周所得旋转面的方程

解 $M_0(1,1,1)\in L$，L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,1,1)$，

在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,x_1,0)$ 则过 M_1 的纬圆上任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件

$$\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{\tau}\ \text{和}\ \overrightarrow{M_0P}=\overrightarrow{M_0M_1}$$



即

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-x_1)+z=0\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x_1-1)^2+(x_1-1)^2+(0-1)^2\end{cases}$$

消去 x_1, 并整理

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0$$

注: 参考 2019 张宇高等数学 18 讲 P308

例9.11 (2017CMC) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

解 交线为抛物线或椭圆

1) 如果平面 P 平行于 $z-$ 轴, 则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于 $yz-$ 平面, C 的形状不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x=c$, 交线 C 的方程为 $z=\frac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将 C 投影到 $yz-$ 平面上, 得到抛物线 $z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 $z-$ 轴, 故交线为抛物线.

2) 如果平面 P 不平行于 $z-$ 轴, 我们设 P 的方程为 $z=ax+by+c$. 代入旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(c^2+y^2)$, 得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=\mathrm{R}^2$$

将 $C=\Gamma\cap P$ 垂直投影到 $xy-$ 平面, 得到圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{R}^2$. 令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1 和 F_2, 与圆柱 Q 相交于圆 D_1 和圆 D_2. 对 $C=\Gamma\cap P$ 上任意一点 A, 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1, 交圆 D_2 于 B_2. 则线段 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到

$$|\mathrm{AF}_1|+|\mathrm{AF}_2|=|\mathrm{AB}_1|+|\mathrm{AB}_2|=|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2|$$

为常数, 故直线 C 为椭圆.

9.5.2 柱面

9.5.3 二次曲面

9.6 空间曲线及其方程

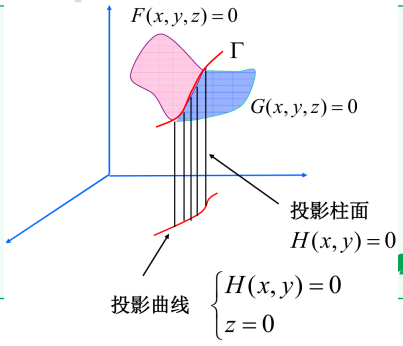
定义 9.4. xoy 面上的投影曲线

设空间曲线的一般方程: $\begin{cases}F(x,y,z=0)\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

消去变量 z 后得: $H(x,y)=0$

$H(x,y)=0$为曲线关于 xoy 的投影柱面

空间曲线在 xoy 面上的投影曲线: $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$



第 10 章 多元函数微分法及其应用

10.1 多元函数的基本概念

例10.1 用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

解 因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=|y|\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$$

从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

例10.2 求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

证明 $\forall\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\varepsilon$$

即

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon$$

只要 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon$$

原结论成立.

例10.3 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}.$

解

$$\begin{aligned}0<\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}<\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}\\&<\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}+\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^{y^2}}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}0\end{aligned}$$

练习 10.1 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}.$

解 因为 $|\sin x|\leq|x|$, 因而有

$$0\leq\left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|$$

又

$$\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\times|y|+\frac{y^2}{x^2+y^2}\times y^2$$

$$\leq |y| + y^2 \to 0$$

由夹逼准则知道极限为 0

✍ **练习 10.2** 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

解 由于

$$\begin{aligned} |\sin(x^3+y^3)| &\leq |x^3| + |y^3| \\ &\leq (|x|+|y|)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (|x|+|y|) = 0$$

由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$$

✍ **练习 10.3** 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} &= \frac{x^4}{x^4+y^4}\times\frac{1}{x^2} + \frac{y^4}{x^4+y^4}\times\frac{1}{y^2} \\ &\leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}\right) = 0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

✍ **练习 10.4** 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 由于

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(x^2+y^2)}{e^{x+y}} &= \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} \\ &\leq \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y} \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{e^y} \overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{e^y} = 0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$$

✍ **练习 10.5** 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 注意到

$$0 \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

所以

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$$

✍ **练习 10.6** 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

解 令 $x^2+y^2=t$ 则 $t\to 0^+$ 所以有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t$$

又

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$$

✍ **练习 10.7** 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(x^2+y^2)$.

解 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

接着我们令 $x^2+y^2=t$ 则 $t\to 0^+$ 那么

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t$$

又

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

✍ **练习 10.8** 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+y^2)$.

解 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\ln(x^2+y^2) = 2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

接着我们令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$ 则 $t\to 0^+$ 那么

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2} &= \lim_{t\to 0^+} t\ln t \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+y^2)=0$$

✍ **练习 10.9** 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ ——16 中科院数分

解 法 1. 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right|} \le \frac{\left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|-1} \le \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right|=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

法 2. 由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{2|x+y|}{x^2+y^2} \le 2\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le 2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} 2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

法 3. 注意到

$$x^2+y^2-xy \ge 2xy-xy=xy$$

由于

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\frac{x+y}{xy}\right| \le \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$$

显然

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$$

✍ **练习 10.10** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=kx$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to0\\y=kx}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to0} \frac{x-kx}{x+kx} = \frac{1-k}{1+k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化, 故极限不存在 (不满足极限的唯一性)

✍ **练习 10.11** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^2}=1$$

当 (x,y) 沿着 $y=0$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^20^2}{x^20^2+(x-0)^2}=0$$

因此极限不存在

✍ **练习 10.12** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=kx^3-x^2$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^3-x^2}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+(kx^3-x^2)^3}{x^2+kx^3-x^2}$$
$$=\frac{1}{k}$$

显然它的值随着 k 值的变化而变化，故极限不存在

✍ **练习 10.13** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=x^\alpha-x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y=x^\alpha-x}}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^\alpha}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ 0, & \alpha>3\end{cases}$$

故极限不存在

✍ **练习 10.14** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=x^2-x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)=-1$$

当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0$$

故极限不存在

练习 **10.15** 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}$$

解 当 (x,y) 沿着 $y=x^3-x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}&=\lim_{\substack{x\to0\\y=x^3-x}}\frac{x^2y}{x+y}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x^3-x)}{x+x^3-x}\\&=\lim_{x\to0}(x^2-1)=-1\end{aligned}$$

当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{2x}=0$$

故极限不存在

例**10.4** 求证: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\frac13)}\dfrac{\frac{\tan3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}$ 不存在.

解 (by 白朗) 注意到

$$\frac{\tan3\pi y}{12y-4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{12}(3y-1)^2+O\big((3y-1)^4\big)$$

取 $x=3y$, 则

$$\frac{\tan3\pi y}{12y-4}-\arctan x=\frac{1-x}{2}+o(1-x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac13)}\frac{\frac{\tan3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{2}+o(1-x)}{1-x^4}=\frac18$$

取 $3y-1=\sqrt[3]{1-x}$, 则

$$\frac{\tan3\pi y}{12y-4}-\arctan x=\frac{\pi^3}{12}(1-x)^{\frac23}+\frac{1-x}{2}+o(1-x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac13)}\frac{\frac{\tan3\pi y}{12y-4}-\arctan x}{1-x^4}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi^3}{12}(1-x)^{-1/3}+\frac12+o(1)}{(1+x)(1+x^2)}\to\infty$$

综上, 极限不存在

例**10.5** 求极限: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\dfrac{x^5}{y-x}\right)$

解 取 $y=2x$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{\substack{x\to0\\y=2x}}\left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+8x^3}}+\frac{x^5}{2x-x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{9}}+x^4\right)=0.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}},$$

我们取 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}}=1$, 即 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, 这时有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}+\frac{x^5}{y-x}\right)&=\lim_{\substack{x\to0\\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}}}\left(1+\frac{x^5}{\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}-x}\right)\\&=\lim_{\substack{x\to0\\ y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}}}\left(1+\frac{x^4}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}-1}\right)=1\end{aligned}$$

故所求极限不存在

✍ **练习 10.16** 设实数 x,y,z 满足

$$e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$$

求极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)$$

解 法 1. 注意

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=-1$$

且由泰勒或者伯努利函数得

$$\frac{1}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k-1}$$

其中 B_k 表示第 k 个伯努利数. 即有

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^y-1}+\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{y}{12}+\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}$$

即

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)=\frac{1}{2}$$

法 2. 显然 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x+y+z}{12}=0$, 故仅需求 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

由 $e^x+e^y+e^z=2+e^{x+y+z}$ 得

$$(e^x-1)+(e^y-1)+(e^z-1)=e^{x+y+z}-1 \tag{10.1}$$

由此令 $r=e^x-1, s=e^y-1, t=e^z-1$, 则

$$(x,y,z)\to(0,0,0)\Longleftrightarrow(r,s,t)\to(0,0,0) \tag{10.2}$$

且由 (10.1) 式可得

$$r+s+t=(1+r)(1+s)(1+t)-1\Longrightarrow\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=-1$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{12}\right)\\&=\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{\ln(1+r)}+\frac{1}{\ln(1+s)}+\frac{1}{\ln(1+t)}\right)\\&=\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{r-\frac{r^2}{2}+o(r^2)}+\frac{1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}+\frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)} \left(\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{2}+o(r)\right)+\frac{1}{s}\left(1+\frac{s}{2}+o(s)\right)+\frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right)$$
$$= \lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)} \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{3}{2}+\frac{o(r)}{r}+\frac{o(s)}{s}+\frac{o(t)}{t}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \quad (\text{利用}(10.2)\text{式})$$

因此原极限为 $\frac{1}{2}$

10.2 偏导数

例10.6 设 $u = e^{-x}\sin\frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在 $\left(2, \frac{1}{\pi}\right)$ 点处的值为 _____

解 由 Euler 公式，我们有

$$u = e^{-x}\sin\frac{x}{y} = \operatorname{Re} e^{-x}e^{\mathrm{i}\frac{x}{y}} = \operatorname{Re} e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}} = \operatorname{Re} v$$

v 对 x 求导一次得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)$$

上式再次对 x 求导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}}{y^2} + \left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}$$
$$= e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\left(\frac{-\mathrm{i}}{y^2}+\left(\frac{\mathrm{i}}{y}-1\right)\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\right)$$
$$= e^{-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}}\frac{-\mathrm{i}x}{y^2}\left(1-x+\mathrm{i}\frac{x}{y}\right)$$

带值得

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \frac{\pi^2(2\pi+\mathrm{i})}{e^2}$$

分离实部

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \operatorname{Re}\frac{\pi^2(2\pi+\mathrm{i})}{e^2} = \frac{\pi^2}{e^2}\cdot 1 = \pi^2 e^{-2}$$

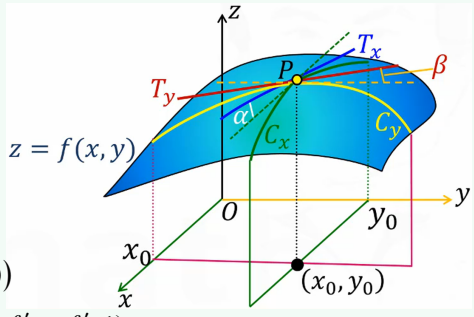
定义 10.1. 偏导数的几何意义

$f'_x(x_0,y_0)$ 表示的是 $C_x:\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 P 处的切线 T_x 对 x 的斜率

$$f'_x(x_0,y_0) = \tan\alpha$$
$$\overrightarrow{T_x} = (1,0,f'_x(x_0,y_0))$$

同理有 $f'_y(x_0,y_0)=\tan\beta$, $\overrightarrow{T_y} = (0,1,f'_y(x_0,y_0))$

$$\vec{n} = \overrightarrow{T_x}\times\overrightarrow{T_y} = (-f'_x,-f'_y,1)$$



例10.7 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$, 在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 设在点 $(2,4,5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是 α, 则由

$$\tan\alpha = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)} = \left.\frac{x}{2}\right|_{(2,4,5)} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

10.3 全微分

✍ **练习 10.17** 证明：函数 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ 在 $(0,0)$ 点的偏导数存在且在 $(0,0)$ 处不可微

解 显然有 $f(x,0) = 0, f(0,y) = 0$, 由偏导数的定义知道

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0^2 y}-0}{x} = 0$$

以及

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2 0}-0}{y} = 0$$

即偏导数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在并且

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的全增量

$$\Delta f(x,y) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}$$

记

$$\Delta f(x,y) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + \omega = \omega$$

则有

$$\omega = \sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}$$

由微分的定义可知道, 如果 $f(x,y)$在$(0,0)$可微, 那么必然有 ω 是 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量

下面证明极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在, 这一结果也就说明 $f(x,y)$在$(0,0)$不可微

考虑 $\Delta y = k\Delta x$ 则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y = k\Delta x}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}} \tag{10.3}$$

显然他的值是随着 k 值的改变而改变, 故上式极限不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微

✍ **练习 10.18** 证明：函数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的偏导数存在且在 $(0,0)$ 处不可微

解 显然有 $f(\Delta x,0) = 0, f(0,\Delta y) = 0$, 由偏导数的定义知道

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\times 0}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x} = 0$$

以及

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{0\times\Delta y}{0^2+\Delta y^2}-0}{\Delta y} = 0$$

即偏导数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在并且

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的全增量

$$\Delta f(x,y) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

记

$$\Delta f(x,y)=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+\omega=\omega$$

则有 $\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，由微分的定义可知道，如果 $f(x,y)$在$(0,0)$可微，那么必然有 ω 是 $\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小量.

下面证明极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，这一结果也就说明 $f(x,y)$在$(0,0)$不可微

考虑 $\Delta y=k\Delta x$ 则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}} \tag{10.4}$$

显然他的值是随着 k 值的改变而改变，故上式极限不存在，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微

例10.8 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个领域内连续. 试证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$

证明 (必要性) 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都存在. 由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x},$$

且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0),\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0),$$

故此 $\varphi(0,0)=0$.

(充分性) 若 $\varphi(0,0)=0$，易知 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$. 因

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

而

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 2,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 由定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

例10.9 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上可微，且 $f(0,0)=0$，求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}$$

解 将分子交换积分次序，则有

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t,$$

并由等价无穷小 $e^x-1\sim x(x\to 0)$ 和洛必达法则，则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t}{x^4}\\&\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\,\mathrm{d}t}{4x^3}\\&\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=\!=}-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2f(\xi,x)\,\mathrm{d}t}{x^3}\\&=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)}{x}$$

其中 $0<\xi<x^2$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\xi}{x}=0$, 又 $f(0,0)=0$, 从而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}=-\frac{1}{4}f'_y(0,0)$$

练习 **10.19** 设 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x,2x)=x$, $f'_1(x,2x)=x^2$, 求 $f'_2(x,2x)$

解 对 $f(x,2x)=x$ 两边对 x 求导

$$f'_1(x,2x)+2f'_2(x,2x)=1$$

由 $f'_1(x,2x)=x^2$ 可得

$$f'_2(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$$

例**10.10** 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且满足 $f(x,x^3)=x^6+2x^4$, $f'_1(x,x^3)=2x^3-3x^2$, 求 $f'_2(x,x^3)$.

解 方法 1 两边对 x 求导,

$$f'_1+3x^2f'_2=6x^5+8x^3$$

由已知 $f'_1(x,x^3)=2x3-3x^2$, 有

$$2x^3-3x^2+3x^2f'_2=6x^5+8x^3$$

整理得

$$f'_2(x,y)=2x^3+2x+1$$

方法 2 因为

$$\mathrm{d}f(x,y)=f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y$$

所以

$$\mathrm{d}f(x,x^3)=f'_1(x,x^3)\,\mathrm{d}x+f'_2(x,x^3)\,\mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}(x^6+2x^4)=(2x^3-3x^2)\,\mathrm{d}x+f'_2(x,x^3)\,\mathrm{d}x^3$$

从而

$$(6x^5+6x^3+3x^2)\,\mathrm{d}x=3x^2f'_2\,\mathrm{d}x$$

即

$$f'_2(x,x^3)=3x^3+2x+1$$

方法 3 因为

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}f(x,x^3)&=f(x,x^3)+C\\&=\int f'_1\,\mathrm{d}x+\int f'_3\,\mathrm{d}x^3\\&=\frac{1}{2}x^4-x^3+\int f'_3\,\mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int f'_3\,\mathrm{d}x^3&=\int f'_3 3x^2\,\mathrm{d}x=x^6+2x^4+x^3-\frac{1}{2}x^4+C\\&=x^6+\frac{3}{2}x^4+x^3+C\end{aligned}$$

于是

$$3x^2 f_2' = 6x^5 + 6x^3 + 3x^2 \Longrightarrow f_2'(x, x^3) = 3x^3 + 2x + 1$$

✍ **练习 10.20** 设 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, 并且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

已知 $u(x, 2x) = x, u_x(x, 2x) = x^2$ 试求: $u_{xx}(x, 2x), u_{xy}(x, 2x), u_{yy}(x, 2x)$

解 对 $u(x, 2x) = x$ 两边对 x 求导

$$u_x'(x, 2x) + 2u_y'(x, 2x) = 1$$

由 $u_x(x, 2x) = x^2$ 可得

$$u_y'(x, 2x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

上式两边对 x 求导

$$u_{xy}'(x, 2x) + 2u_{yy}''(x, 2x) = -x \tag{10.5}$$

对 $u_x'(x, 2x) = x^2$ 两边对 x 求导

$$u_{xx}''(x, 2x) + 2u_{xy}''(x, 2x) = 2x \tag{10.6}$$

利用 $u_{xx} = u_{yy}, u_{xy} = u_{yx}$, 联立式 (10.5) 和 (10.6) 求解可得

$$u_{xx}(x, 2x) = u_{yy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x \qquad u_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x$$

✍ **练习 10.21** 设 $a, b \neq 0$, f 具有二阶连续偏导数, 且

$$a^2 f_{xx} + b^2 f_{yy} = 0 \qquad f(ax, bx) = ax \qquad f_x(ax, bx) = bx^2$$

试求 $f_{xx}(ax, bx), f_{xy}(ax, bx), f_{yy}(ax, bx)$

解

✍ **练习 10.22** 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有连续偏导数, 且 $f(x, x^2) = 1$

1. 若 $f_x(x, x^2) = x$, 求 $f_y(x, x^2)$
2. 若 $f_y(x, y) = x^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$

解

✍ **练习 10.23** 设 $z = f(x, y)$ 有连续二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad f(x, 2x) = 5x^2 \qquad f_x'(x, 2x) = 2x$$

求 $f(2, 1) =$ _____

解 对 $f(x, 2x) = 5x^2$ 两边对 x 求导

$$f_x'(x, 2x) + 2f_y'(x, 2x) = 10x$$

由 $f_x'(x, 2x) = 2x$ 可得

$$f_y'(x, 2x) = 4x \tag{10.7}$$

上式两边对 x 求导

$$f_{xy}'(x, 2x) + 2f_{yy}''(x, 2x) = 4 \tag{10.8}$$

对 $f_x'(x, 2x) = 2x$ 两边对 x 求导

$$f_{xx}''(x, 2x) + 2f_{xy}''(x, 2x) = 2 \tag{10.9}$$

且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 联立 (10.8) 与 (10.9) 解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2, f''_{xy}(x,2x)=0$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=2y+h(x)\Longrightarrow f(x,y)=y^2+h(x)y+g(x)$$

再结合条件 $f(x,2x)=5x^2$ 以及式 (10.7) 可得

$$h(x)=0\qquad g(x)=x^2$$

因此 $f(x,y)=x^2+y^2$, 故 $f(2,1)=5$

练习 **10.24** 求极限

解

10.4 隐函数的求导公式

定义 10.2. 隐函数存在定理 2

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一领域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一领域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

10.5 多元函数微分学的几何应用

例**10.11** 柱面螺线: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t=\dfrac{\pi}{2}$. 求螺线的切线和法平面.

解 切点: $\left(0,a,\dfrac{b\pi}{2}\right)$

$$x'(t)=(a\cos t)'=-a\sin t=-a$$
$$y'(t)=(a\sin t)'=a\cos t=0$$
$$z'(t)=(bt)'=b$$

切向量: $\boldsymbol{T}=\{-a,0,b\}$. 切线: $\dfrac{x}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\frac{b\pi}{2}}{b}$

法平面:

$$-a\cdot(x-0)+0\cdot(y-a)+b\cdot\left(z-\frac{b\pi}{2}\right)=0\Longrightarrow ax-bz+\frac{b^2\pi}{2}=0$$

例**10.12** 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)\Longrightarrow \boldsymbol{n}\Big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处此球面的切平面方程

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0\Longrightarrow x+2y+3z-14=0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\Longrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

例10.13 记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,2x+y\leqslant 4$ 上的最低点 P 处切平面为 π, 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处切线为 l, 则点 P 到 l 在 π 上的投影 l' 的距离 $d=$_____

解 解 $\begin{cases}z'_x=2x-2=0\\z'_y=2y-1\end{cases}$, 得唯一驻点 $(1,\frac{1}{2})\in D$, 且

$$A=z''_{xx}=2,\ B=z''_{xy}=0,\ C=z''_{yy}=2$$

可知 $A>0,B^2-AC<0$, 所以驻点为极小值点, 即点 $P(1,\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$ 为曲面的最低点, 并且该平面处的切平面为 $\pi:z=-\frac{5}{4}$. 切线为 l 的方向向量为两曲面在 $(1,1,-2)$ 的法向量的向量积, 即

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-4\\1&1&1\end{vmatrix}=6(1,-1,0).$$

所以切线方能成为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{0}$, 平面束方程为

$$(x+y-2)+\lambda(z+2)=0$$

于是平面 π 内的投影 l' 方程为 $\begin{cases}x+y-2=0\\z=-\frac{5}{4}\end{cases}$. 于是点 $P(1,\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$ 到 l' 的距离

$$d=\frac{|1+\frac{1}{2}-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

10.6 方向导数与梯度

定理 10.1. 方向导数

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微, 则 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦 ♡

定义 10.3. 梯度

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 具有一阶偏导数, 则定义

$$\operatorname{grad}u\Big|_{P_0}=\{u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\}$$

为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的梯度. ♣

10.7 多元函数的极值及其求法

10.7.1 多元函数的极值及最大值与最小值

定义 10.4. 二元函数的极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)：若满足不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在 (x_0,y_0) 有极大值；若满足不等式 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在 (x_0,y_0) 有极小值；♣

定理 10.2. 必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：

$$f_x(x_0,y_0)=0 \quad f_y(x_0,y_0)=0$$ ♡

定理 10.3. 充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论. ♡

例10.14 设 $f(x,y)$ 在单位圆域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上具有一阶连续的偏导数，且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1$. 证明：在单位圆域内有一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16$$

证明 设 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$. 则在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$.

而 $g(0,0)\leqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1，或者在单位圆内存在一点 (x_0,y_0)，使 g 在该点取到极小值. 总之，必在单位圆内存在一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-4x_0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-4y_0$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2=16(x_0^2+y_0^2)\leqslant 16$$

例10.15 设在区域 $D:|x|+|y|\leqslant 1$ 上，函数 $f(x,y)$ 连续，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在，且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1$. 证明：在区域 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 8$$

证明 设 $g(x,y)=f(x,y)+(|x|+|y|)^2$. 则在区域 $D:|x|+|y|\leqslant 1$ 上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$.

而 $g(0,0)\geqslant 1$. 所以或者 g 在 D 上恒等于 1，或者在区域 D 内存在一点 (x_0,y_0)，使 g 在该点取到极小值. 总

之, 必在区域 D 内存在一点 (x_0, y_0) 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2(|x| + |y|)$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 = 2\big(-2(|x| + |y|)\big)^2 \leqslant 8$$

10.7.1.1 可微分取极值的充分条件

定理 10.4. 可微分取极值的充分条件

设 n 元函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶连续偏导数, 且 $\nabla f(x_0) = 0$, 记 $\mathbf{H}f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的黑塞矩阵

1. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 正定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点
2. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 负定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点
3. 如果 $\mathbf{H}f(x_0)$ 不定, 则 x_0 为 $f(x)$ 的鞍点
4. 其它情况需要另行判定 ♡

10.7.1.2 黑塞矩阵

定义 10.5. 黑塞矩阵

设 n 元函数 $f(x)$ 在点 P_0 处对于自变量的各分量的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 连续, 则称矩阵

$$\mathbf{H}f(P_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为 $f(x)$ 在点 P_0 处的二阶导数或黑塞矩阵 (Hessian Matrix), 也可记作 $\nabla^2 f(P_0)$. 易知矩阵 $\mathbf{H}f(P_0)$ 为对称矩阵. ♣

10.7.1.3 实对称矩阵的正定性相关定义及判定

1. 实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ **正定**的充要条件是它各阶主子式都大于 0. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \ (r = 1, 2, \cdots, n).$$

2. 实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ **负定**的充要条件是它奇数阶主子式都小于 0, 偶数阶主子式大于 0.

即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0,\ (r=1,2,\cdots,n).$$

3. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ **正定**: 所有特征根大于 0.
4. 实对称矩阵 A 是**半正定矩阵**的充要条件是它的所有主子式都大于等于 0
5. 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是**半负定矩阵**的充要条件是它的所有奇数阶主子式都小于等于 0, 并且它的所有偶数阶主子式大于等于 0.
6. 如果实对称矩阵 A 既不是半正定的, 也不是半负定的, 就称 A 为**不定矩阵**

例10.16 (第九届非数类预赛) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数. 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

解 方法 1 由于 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立,

故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$, 即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. 记 $H_f=(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立,

故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

方法 2 易得 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$, 令 $x=t\cos\alpha,y=t\sin\alpha$, 由已知 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\sin\alpha=0$$

由 α 的任意性得 $\begin{cases}f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=0\end{cases}$, 从而 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha\right)\\ &=\left(f_{xx}\cos\alpha+f_{xy}\sin\alpha\right)\cos\alpha+\left(f_{yx}\cos\alpha+f_{yy}\sin\alpha\right)\sin\alpha\\ &=f_{xx}\cos^2\alpha+2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}\sin^2\alpha\\ &=\sin\alpha\cos\alpha\left[f_{xx}\cot^2\alpha+2f_{xy}+f_{yy}\tan^2\alpha\right]\end{aligned}$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\sin2\alpha\left[f_{xx}(0,0)\cot^2\alpha+2f_{xy}(0,0)+f_{yy}(0,0)\tan^2\alpha\right]>0$$

令 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$f_{xy}(0,0)>-\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)\right]$$

从而

$$\begin{aligned}&\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\ >&\frac{1}{4}\left[f_{xy}(0,0)\right]^2+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\frac{1}{4}\left[f_{yy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\ =&\frac{1}{4}\left\{\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-2f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\left[f_{yy}(0,0)\right]^2\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\left[f_{xx}(0,0)-f_{yy}(0,0)\right]^2\geqslant 0$$

这就说明 $B^2-AC>0$, $f(0,0)$ 为极值. 下面证明 $f(0,0)$ 为极小值,

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)-g'_\alpha(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)}{t}>0$$

由保序性知: $t>0$ 时, $g'_\alpha(t)>0\Longrightarrow g_\alpha(t)\uparrow$; $t<0$ 时, $g'_\alpha(t)<0\Longrightarrow g'_\alpha(t)\downarrow$

所以 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

例10.17 (北京大学,2018 年) 设 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导, $\varphi(0)=0$, f 在 $x=0$ 附近二阶连续可微. $\nabla f(x,\varphi(x))=0$, f 在 $(0,0)$ 的 Hessian 矩阵半正定且非零矩阵. 求证 f 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

解 (by 逆逆) 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近二阶连续可微知

$$f_x(x,y)-f_x(0,0)=f_{xx}(0,0)x+f_{xy}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$
$$f_y(x,y)-f_y(0,0)=f_{yx}(0,0)x+f_{yy}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

由 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导以及 $\nabla f(x,\varphi(x))=0$ 知

$$0=f_{xx}(0,0)x+f_{xy}(0,0)\varphi'(0)x+o(|x|)\Longrightarrow 0=f_{xx}(0,0)+f_{xy}(0,0)\varphi'(0)$$
$$0=f_{yx}(0,0)x+f_{yy}(0,0)\varphi'(0)x+o(|x|)\Longrightarrow 0=f_{yx}(0,0)+f_{yy}(0,0)\varphi'(0)$$

由 f 在 $(0,0)$ 的 Hessian 矩阵

$$\begin{pmatrix}f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0)\\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{yy}(0,0)\varphi'^2(0) & -f_{yy}(0,0)\varphi'(0)\\ -f_{yy}(0,0)\varphi'(0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}$$

半正定且非零知

$$f_{yy}(0,0)>0.$$

于是存在 $\delta>0$, 使得任意满足 $|x|<\delta$ 及 $|y|<\delta$ 的 (x,y), 有

$$f_{yy}(x,y)>0.$$

由 $y=\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导知连续, 可取 $0<\delta_1<\delta$, 使得 $|x|<\delta_1$ 时有

$$|\varphi(x)|<\delta.$$

首先证明 $\varphi(x)$ 在 $|x|<\delta_1$ 时是连续的. 否则, 存在数列 $x_n\to x_0$ 满足条件

$$\varphi(x_n)\to y_0\neq\varphi(x_0),$$

于是有

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}\nabla f(x_n,\varphi(x_n))=0.$$

另一方面

$$f_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,\varphi(x_0))+f_{yy}(x_0,\xi)(y_0-\varphi(x_0))=f_{yy}(x_0,\xi)(y_0-\varphi(x_0))\neq 0,$$

其中 ξ 在 y_0 与 $\varphi(x_0)$ 之间, 矛盾. 所以 $\varphi(x)$ 连续. 下面我们固定 $\varepsilon>0$, 考虑函数

$$f_\varepsilon(x,y)=f(x,y)+\varepsilon x^2.$$

设 $0<x_1<\delta_1$, 由于

$$\nabla f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_1))=\nabla f(x_1,y_1)+(2\varepsilon x_1,0)=(2\varepsilon x_1,0),$$

即

$$f_{\varepsilon,x}(x_1,\varepsilon(x_1))=2\varepsilon x_1>0,$$

存在领域 $U(x_1,\varphi(x_1))=(x_1-\delta_{x_1},x_1+\delta_{x_1})\times(\varphi(x_1)-\delta_{x_1},\varphi(x_1)+\delta_{x_1})$, 使得任意 $(x,y)\in$

$U(x_1,\varphi(x_1))$, 均有

$$f_{\varepsilon,x}(x,y)>0.$$

取 δ'_{x_1}, 使得 $|x-x_1|<\delta'_{x_1}$ 时有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_1)|<\delta_{x_1}.$$

于是对于 $x_1<x_2<x_1+\delta'_{x_1}$ 根据

$$f_{\varepsilon,y}(x_1,\varphi(x_1))=0$$

以及

$$f_{\varepsilon,yy}(x,y)=f_{yy}(x,y)>0$$

可得

$$f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_2))\geqslant f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_1)).$$

再根据 $f_{\varepsilon,x}(x,y)>0$, 可得

$$f_\varepsilon(x_2,\varphi(x_2))\geqslant f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_2)).$$

因此, $0<x_1<\delta_1$ 时, 存在 $\delta'_{x_1}>0$, 对于 $x_1<x_2<x_1+\delta'_{x_1}$, 成立

$$f_\varepsilon(x_2,\varphi(x_2))\geqslant f_\varepsilon(x_1,\varphi(x_1)).$$

由此不难得到 $x>0$ 时, $f_\varepsilon(x,\varphi(x))$ 是增函数, 于是

$$f_\varepsilon(x,\varphi(x))>f_\varepsilon(0,\varphi(0))=f(0,0).$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 可得

$$f(x,\varphi(x))\geqslant f(0,0).$$

类似可得上述不等式对于 $x<0$ 也成立. 根据 $f_y(x,\varphi(x))=0$ 以及 $f_{yy}(x,y)>0$ 可得

$$f(x,y)\geqslant f(x,\varphi(x))\geqslant f(0,0).$$

故 f 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

10.7.2 条件极值　拉格朗日乘数法

例10.18 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

证明 设 $a_1a_2\cdots a_n=a$, 作辅助函数 $F=a_1+a_2+\cdots+a_n+\lambda(a_1a_2\cdots a_n)$.

$$\begin{cases}F'_{a_1}=1+\lambda a_2a_3\cdots a_n=0,\\ F'_{a_2}=1+\lambda a_1a_3\cdots a_n=0,\\ \cdots\cdots\\ F'_{a_n}=1+\lambda a_1a_2\cdots a_{n-1}=0,\\ F'_\lambda=a_1a_2\cdots a_n-a=0,\end{cases}$$

解得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\sqrt[n]{a}$. 由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 无最大值, 其最小值为

$$\min\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}=n\sqrt[n]{a},$$

即 $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a}=n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 得证.

例10.19 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解

解 考察 $f(x)=7x^3+14y^3+21z^3$ 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=7x^3+14y^3+21z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

由

$$\begin{cases}L_x=21x^2+2\lambda x=0\\L_y=42y^2+2\lambda y=0\\L_z=63z^2+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2\lambda}{21}=\dfrac{2\lambda}{21}(-1)\\y=-\dfrac{2\lambda}{42}=\dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\\z=-\dfrac{2\lambda}{63}=\dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=1\Longrightarrow\left(\frac{2\lambda}{21}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=1\Longrightarrow\lambda=-9$$

$$\Longrightarrow x=\frac{6}{7},\ y=\frac{3}{7},\ z=\frac{2}{7}$$

故 $f_{\min}=\dfrac{1}{49}(6^3+2\times3^3+3\times2^3)=6$. 因此方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解为

$$x=\frac{6}{7},\ y=\frac{3}{7},\ z=\frac{2}{7}$$

例10.20 求 $u=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

解 [1] 对于固定的常数 $r>0$, 我们把原问题化为下面的形式

$$\begin{cases}u=\dfrac{xy+2yz}{r}\\x^2+y^2+z^2=r\end{cases}\tag{10.10}$$

作函数 $F(x,y,z)=u+\lambda(x^2+y^2+z^2-r)$, 对各变量求偏导数得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{r}+2\lambda x,\quad\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x+2z}{r}+2\lambda y,\quad\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2y}{r}+2\lambda z$$

令 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$, 得 $\begin{cases}x=x\\y^2=5x^2\\z=2x\end{cases}$ 代入 (10.10) 式得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{r}{10}}$.

取 $\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{r}{10}}\\y=\sqrt{\dfrac{r}{2}}\\z=2\sqrt{\dfrac{r}{10}}\end{cases}$ 代入 (10.10) 式得 $u=\dfrac{\frac{r}{\sqrt{20}}+4\frac{r}{\sqrt{20}}}{r}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 即为所求.

例10.21 平面曲线 $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\x=0\end{cases}$, 绕 x 轴旋转所得曲面 S, 求曲面 S 的内接长方体体积的最大体积

[1] 《高等数学中的若干问题解析》P203

证明 长方体长 $2x$, 宽 $2y$, 高 $2z$, 曲面 S 方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

内接长方体体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz$$

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 & (10.11)\\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 & (10.12)\\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{b^2}=0 & (10.13)\end{cases}$$

(10.11)$\cdot x$ + (10.12)$\cdot y$ + (10.13)$\cdot z$, 并由约束条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 得

$$3xyz+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)=0\Longrightarrow 3xyz+2\lambda=0\Longleftrightarrow xyz=-\frac{2\lambda}{3}$$

$$\begin{cases} xL_x=xyz+\dfrac{2\lambda x^2}{a^2}=0\\ yL_y=xyz+\dfrac{2\lambda y^2}{b^2}=0\\ zL_z=xyz+\dfrac{2\lambda z^2}{b^2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

于是, 我们得到可能极值点为 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 由实际问题的特性及点的唯一性, 当 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ 时, 内接长方体的体积最大, 且最大体积为

$$V=8xyz=\frac{8}{3\sqrt{3}}ab^2$$

例10.22 (18 数学 3) 将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解 (by 向禹) 设分成的三段依次为 x,y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\dfrac{x}{2\pi},\dfrac{y}{4},\dfrac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{36}z^2$$

法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x'=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ f_y'=\dfrac{y}{8}+\lambda=0\\ f_z'=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0\\ x+y+z=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$

并且 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点,

此时最小面积为 $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

法二 由柯西不等式

$$\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4,$$

因此当 $\dfrac{x}{2\pi}=\dfrac{y}{16}=\dfrac{\sqrt{z}}{13\sqrt{3}}$ 时, $S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

例10.23 求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0 \tag{10.14}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 [11] 以 (10.14) 为约束条件, 取目标函数 $f(x,y,z)=z$, 则 Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4).$$

令

$$L_x=4\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{10.15}$$

$$L_y=2\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{10.16}$$

$$L_z=1+2\lambda z-4\lambda=0. \tag{10.17}$$

显然 $\lambda\neq0$, 于是由 (10.15) 和 (10.16) 得驻点为 $(0,1)$. 代入 (10.14) 得 $z_1=1, z_2=3$. 再由 (10.17) 得 $\lambda_1=\dfrac{1}{2},\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. 由于

$$L_{xx}=4\lambda,\ L_{yy}=L_{zz}=2\lambda,\ L_{xy}=2\lambda,\ L_{xz}=L_{yz}=0,$$

于是 L 在 $(0,1,1)$ 与 $(0,1,3)$ 的 Hesse 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

前者正定, 后者负定, 所以 $z=1$ 为极小值, $z=3$ 为极大值.

10.8 二元函数的泰勒公式

例10.24 (2018CMC) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

证明 法 I. 作辅助函数

$$\varphi(t)=f\big(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\big)$$

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $c\in(0,1)$, 使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$$

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right| \\
&\leqslant \left[\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant M|AB|
\end{aligned}
$$

法 II. 由于函数可微, 则偏导数存在, 因此函数 $f(x,y)$ 关于 x,y 一阶可导, 因此分别依据 Lagrange 中值定理, 有

$$
\begin{aligned}
|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= |f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)+f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)| \\
&= |f_y'(x_1,\xi)(y_2-y_1)+f_x'(\eta,y_2)(x_2-x_1)|
\end{aligned}
$$

以上意思同上.

练习 **10.25** 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$. 若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明

$$
\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}
$$

证明 在点 $(0,0)$ 展开 $f(x,y)$ 得

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)
\end{aligned}
$$

其中 $\theta\in(0,1)$, 记 $(u,v,w)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)$, 则

$$
f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+w^2y\right)
$$

已知条件 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M\Longleftrightarrow u^2+2v^2+w^2\leqslant M$

$$
f(x)=\frac{1}{2}\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}
$$

由于

$$
\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\right|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}
$$

以及

$$
\left|\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|=\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}=x^2+y^2
$$

我们有

$$
\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|\leqslant\sqrt{M}(x^2+y^2)
$$

即

$$
|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)
$$

根据保序性，从而

$$
\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{M}}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

例10.25 (18 北大数分) 设 f 在 $(0,0)$ 某个邻域内二阶连续可微, 求极限

$$\lim_{R\to 0+} \frac{1}{R^4} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 (by Hansschwarzkopf) 根据题意, 有

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(0,0) + o\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\to 0\right).$$

从而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (f_{xx}(0,0)x^2 + f_{yy}(0,0)y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + o(R^4)\\ &= \frac{\pi R^4}{8} f_{xx}(0,0) + \frac{\pi R^4}{8} f_{yy}(0,0) + o(R^4)(R\to 0^+).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{R\to 0+} \frac{1}{R^4} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8} f_{xx}(0,0) + \frac{\pi}{8} f_{yy}(0,0).$$

注记: 原条件是 $f\in C^3$, 实际上 $f\in C^2$ 足矣.

第 11 章 重积分

11.1 二重积分的概念与性质

✍ 练习 11.1 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\int_1^{\frac{1}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{2}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_1^{\frac{n-1}{n}}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right]$

解

$$I=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_1^{\frac{i}{n}}e^{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y e^{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=-\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e)$$

✍ 练习 11.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{(n+i+1)^2}+\dfrac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+i+i)^2}\right)$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(n+i+j)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{i}{n}+\frac{j}{n})^2}$$
$$=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

✍ 练习 11.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{i+j}{i^2+j^2}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln(1+y^2)-2\ln y\right)\mathrm{d}y+\int_0^1\arctan\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y+\frac{\pi}{2}-\int_0^1\arctan y\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\pi}{2}+\ln 2$$

例11.1 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}i}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{n}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

例11.2 计算 $\iint\limits_D\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[0,2]$.

解 首先将区域 D 分为 4 个小区域, $D_k: k-1\leqslant x+y<k$, $k=1,2,3,4$, 于是有

$$S_{D_1}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\Longrightarrow\iint_{D_1}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_1}=\frac{1}{2}\times0=0$$

$$S_{D_2}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}\Longrightarrow\iint_{D_2}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_2}=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

$$S_{D_3}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{3}{2}\Longrightarrow\iint_{D_3}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_3}=\frac{3}{2}\times2=3$$

$$S_{D_4}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}\Longrightarrow\iint_{D_4}\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V_{D_4}=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$$

故

$$\iint_D\lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=6$$

例11.3 计算 $\iint\limits_D\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant n,x>0,y>0\}$.

解 将区域 $D: x>0,\ y>0,\ x^2+y^2\leqslant n$ 分为 n 个小区域,

$$D_k: k-1\leqslant x^2+y^2<k\,,x>0,y>0\ ,\ k=1,2,\cdots,n$$

这 n 个小区域的面积均为 $\dfrac{\pi}{4}$, 且 $\lfloor x^2+y^2\rfloor$ 在这些区域的取值为 $0,1,\cdots,n-1$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\iint_D\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\lfloor x^2+y^2\rfloor\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\iint_{D_k}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\\&=\frac{\pi}{8}n(n-1)\end{aligned}$$

定理 11.1. 二重积分的中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ,η), 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

♡

例11.4 设区域 D:$x^2+y^2\leq r^2$, 求 $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\(\xi,\eta)\to(0,0)}} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta) = 1$$

练习 11.4 证明不等式：

$$2\pi\left(\sqrt{17}-4\right) \leq \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \leq \frac{\pi}{4}.$$

解 左边不等式：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \geqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$

$$= 2\pi(16+r^2)^{1/2}\Big|_0^1 = 2\pi\left(\sqrt{17}-4\right).$$

右边不等式：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \leqslant 4 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$$

例11.5 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域

$$D = \{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上具有连续的四阶偏导数，$f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right| \leqslant 3$，试证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{48}$$

解 (by xwmath)[1] 由于 $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，所以

$$\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}x(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1-2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (2x-1)\,\mathrm{d}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2} = \left[(2x-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x$$

类似可得

$$\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y(1-y)\,\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \left[y(1-y)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2y)\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right.$$

$$= \int_0^1 (2y-1)\,\mathrm{d}f(x,y)$$

$$= [(2y-1)f(x,y)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

将两个结果分别视为二重积分中的两个累次积分计算，于是可得

$$\iint_D x(1-x)y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\int_0^1\left[-2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

[1]考研竞赛数学：每日一题 271：多元函数高阶偏导数条件的不等式证明

$$= 4\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = 4\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

于是由 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right| \leqslant 3$, 得

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| &= \frac{1}{4}\left|\iint_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{3}{4}\left|\iint_D xy(1-x)(1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \\ &= \frac{3}{4}\left|\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &= \frac{3}{4}\left|\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &= \frac{3}{4}\left(\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

11.2 二重积分的计算法

练习 **11.5** 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 设 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数, 且有

$$f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $f(x,y)$

解 由

$$f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得

$$\frac{xf(x,y)}{x+y} = \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} - \frac{1}{\pi}\frac{x}{x+y}\iint_D \frac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到 $\iint\limits_D \dfrac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是个常数, 故令 $C = \iint\limits_D \dfrac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则

$$C = \iint_D \frac{xf(x,y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{C}{\pi}\iint_D \frac{x}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\xlongequal{\text{轮换对称性}} \iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 \rho\sin(\pi\rho)\mathrm{d}\rho = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\iint_D \frac{x}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{轮换对称性}} \iint_D \frac{y}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15\pi}{8}$$

由此可知 $C = -\dfrac{23}{6}$, 故 $f(x,y) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) + \dfrac{23}{6\pi}$

例11.6 设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = x^2 + x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t + \iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 D 是以 $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形, 且 $f(1)=0$, 求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

解法 1 令 $\displaystyle\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A$, 则

$$f(x) = x^2 + x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t + A$$

以 xy 替换 x

$$f(xy) = x^2y^2 + xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t + A$$

$$\begin{aligned} A &= \iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \left[xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{9} + \iint_D \left[xy\int_0^{x^2y^2} f(xy-t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2A \\ &\xlongequal{u=xy-t} \frac{2}{9} + \iint_D \left[xy\int_0^{x^2y^2} f(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2A = \frac{2}{9} + 2A \end{aligned}$$

即 $A = \dfrac{2}{9} + 2A \Longrightarrow A = -\dfrac{2}{9}$.

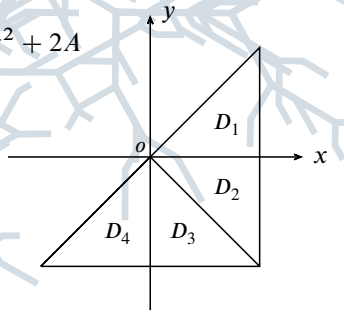
法 2(by 湖工 hfg) 令 $\displaystyle\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A$, 由 $f(-x) = x^2 - x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t + A$, 则对任意 x 有

$$f(x) + f(-x) = 2x^2 + 2A \tag{11.1}$$

根据函数 $f(xy)$ 的性质, 显然有

$$\iint_{D_2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_4} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_3} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



故

$$\begin{aligned} \iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} \big(f(xy)+f(-xy)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_3} \big(f(xy)+f(-xy)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{(11.1)} \iint_{D_1} \big(2(xy)^2+2A\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_3} \big(2(xy)^2+2A\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{9} + 2A \end{aligned}$$

即 $A = \dfrac{2}{9} + 2A \Longrightarrow A = -\dfrac{2}{9}$. 于是

$$f(x) = x^2 + x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\,\mathrm{d}t - \frac{9}{2}$$

$$\xlongequal{u=x^2-t} x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u-\frac{9}{2}$$

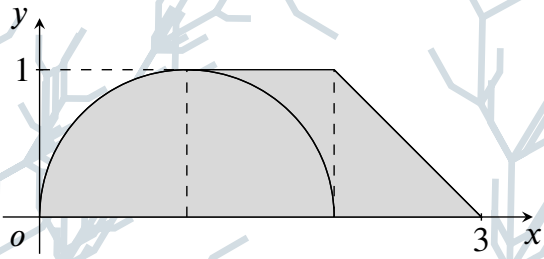
结合已知条件 $f(1)=0$ 代入, 所以有

$$0=1+\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u-\frac{2}{9}\Longrightarrow\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u=-\frac{7}{9}$$

11.2.1 交换积分次序[2]

例11.7 交换累次积分的顺序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

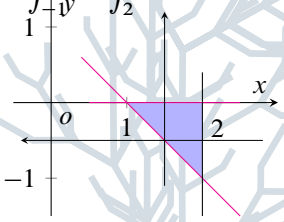
解



$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

例11.8 交换二重积分的积分次序 $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

解



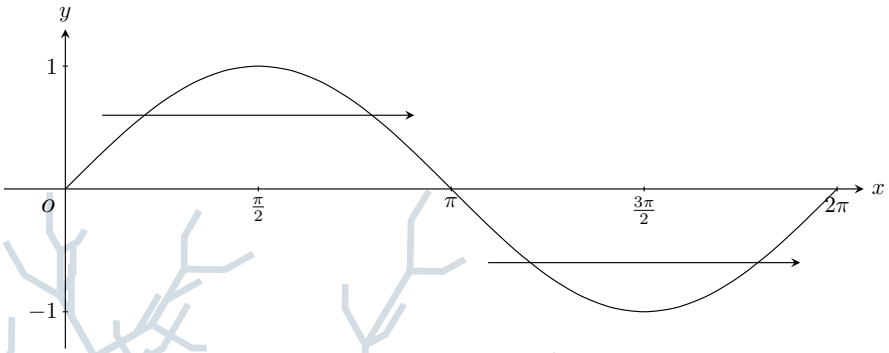
$$\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=-\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

注意 注意积分上下限次序

例11.9 交换二重积分的积分次序 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解

[2]二重积分交换积分次序结果可能改变。被积函数需满足 Fubini's Theorem 中的条件



从而

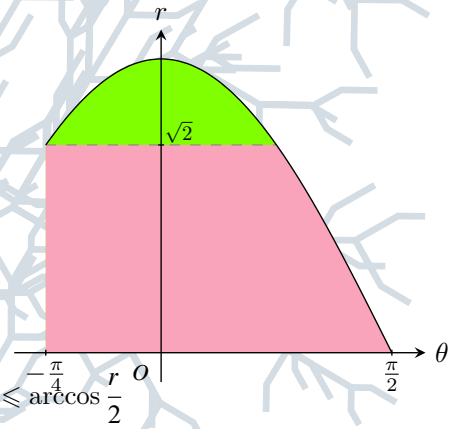
$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例11.10 在极坐标下交换积分次序

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

解 法 I(类直角坐标法). 积分区域 D

$$D:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\\-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$



由于 $r=\arccos\theta$ 的定义域为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 故

$$\theta=\begin{cases}-\arccos\dfrac{r}{2}, & -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\\ \arccos\dfrac{r}{2}, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

草绿色的区域 D_1

$$D_1:\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 2\\ -\arccos\dfrac{r}{2}\leqslant\theta\leqslant\arccos\dfrac{r}{2}\end{cases}$$

粉红色的区域 D_2

$$D_2:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\ -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\arccos\dfrac{r}{2}\end{cases}$$

根据积分区域的划分可得

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos x}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\\&=\underset{\text{品红色的区域}}{\iint}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta+\underset{\text{原谅色的区域}}{\iint}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

其它的解法参考http://kaoyan.xdf.cn/201611/10564802.html

✍ **练习 11.6** 交换二重积分的积分次序

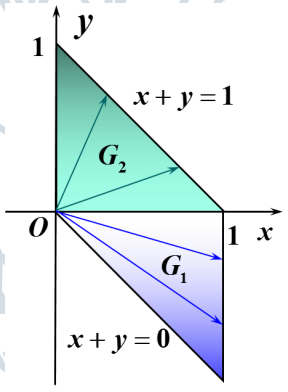
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

解

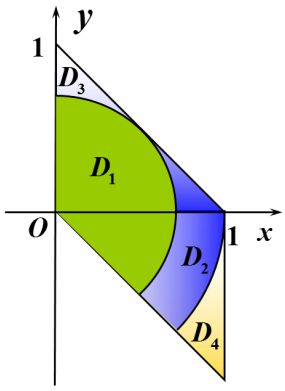
$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_1^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

✍ **练习 11.7** 对积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 作极坐标变换，并表示为不同次序的累次积分，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1\}$

解



(a)



(b)

经过极坐标变换后，D 可分解为二个 θ 型区域：

$$G_1=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0,0\leqslant r\leqslant\sec x\right\}$$

$$G_2=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right\}$$

又可分解为四个 r 型区域（见图 (b)）：

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant 1,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}\right\}$$

$$D_3=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant r\leqslant 1,\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$D_4=\left\{(r,\theta)\middle|1\leqslant r\leqslant\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant-\arccos\frac{1}{r}\right\}$$

于是

$$I=I_1+I_2=J_1+J_2+J_3+J_4$$

其中

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sec\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$J_1 = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_2 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_3 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{2}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$J_4 = \int_{1}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\arccos\frac{1}{r}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

11.2.2 利用直角坐标计算二重积分

例11.11 (2019 川大竞赛) 设 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1\}$, 则 $\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 令 $u = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, 固定 u 为常数, 注意坐标原点到直线

$$u = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$$

的距离恰好为 $|u|$, 平行于该直线划分 D, 可选择面积元

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\ (|u| \leqslant 1)$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1} \sqrt{25-(5u)^2}\cdot 2\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 10\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{40}{3}\end{aligned}$$

练习 11.8 计算二重积分 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 令

$$D = [0,1]\times[0,1],\ D_1 = D\cap\{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1\},\ D_2 = D\cap\{(x,y): x^2+y^2 \geqslant 1\},$$

则

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1} (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{1-x^2-y^2} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1-z \\ x,y\geqslant 0}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_2} (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D} (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1} (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D} (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_1} (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

练习 **11.9** 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\{e^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\} = +\infty.$

解

$$\begin{aligned}F(t) &= 2\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^x \frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^t e^x\mathrm{d}x\int_0^x \frac{1-e^{y-x}}{x-y}\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^x e^x\mathrm{d}x\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \\ &\geqslant 2\int_0^t e^x\mathrm{d}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= 2\int_0^t e^x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2e^t\ln(1+t) - 2\int_0^t \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+x} \\ &\geqslant 2e^t\ln(1+t) - 2\int_0^t e^x\mathrm{d}x \\ &= 2e^t\ln(1+t) - 2(e^t-1), \forall t>0.\end{aligned}$$

故

$$e^{-t}F(t) \geqslant 2\ln(1+t) - 2(1-e^{-t}) \to +\infty (t\to+\infty).$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}F(t) = +\infty.$$

例11.12 设 $u(x)\in C[0,1]$ 且 $u(x) = 1+\lambda\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y$. 试证: $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$

解 等式两边对 x 从 0 到 1 积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y \\ &= 1+\lambda\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 u(y)u(y-x)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} 1+\lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(y-x)\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{y-x=t} 1+\lambda\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^y u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{\text{轮换对称性}} 1+\lambda\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t u(y)\,\mathrm{d}y$$
$$=1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$$

设 $\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x=a$, 故

$$a=1+\frac{\lambda}{2}a^2\Longrightarrow\Delta=1-4\cdot\frac{\lambda}{2}\geqslant 0\Longrightarrow\lambda\leqslant\frac{1}{2}$$

例11.13 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{260n\pi}\dfrac{t|\sin t|}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}t$, 其中 $D:x^2-260x+y^2\leqslant n^2-260n$

证明 (by 蓝兔兔)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{260n\pi}\frac{t|\sin t|}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{260n\pi}t|\sin t|\,\mathrm{d}t}{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(260n)^2\pi}{130\pi(n-130)^2}=520$$

例11.14 计算积分:

$$\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$

解

$$\frac{\pi^2}{16}=\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}+\frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\left(\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}-\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi^2}{6}-2\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{96}\pi^2$$

例11.15 平面上由 $2\leqslant\dfrac{x}{x^2+y^2}\leqslant 4$ 与 $2\leqslant\dfrac{y}{x^2+y^2}\leqslant 4$ 所确定的区域记为 Ω. 证明:

$$\iint_D\frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\ln^2 2$$

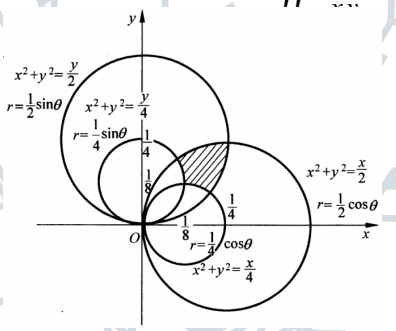
解 积分区域关于 $y=x$ 对称, 被积函数也关于 $y=x$ 对称.

只须考虑从 x 轴到 $y=x$ 所夹的一部分.

曲线 $x^2+y^2=\frac{x}{2},x^2+y^2=\frac{x}{4},x^2+y^2=\frac{y}{2},x^2+y^2=\frac{y}{4}$ 的极坐标方程分别是

$$r=\frac{1}{2}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{4}\cos\theta,\quad r=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad r=\frac{1}{4}\sin\theta$$

而 $r=\frac{1}{4}\cos\theta$ 与 $r=\frac{1}{2}\sin\theta$ 的交点为 $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}},\arctan\frac{1}{2}\right)$, 所以



$$\begin{aligned}\iint\frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{4}\cos\theta}^{\frac{1}{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\cos\theta\sin\theta}\\&=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\ln\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{\frac{1}{4}\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\tan\theta}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2\cdot\frac{1}{2}\ln^2(2\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\ln^2 2\end{aligned}$$

例11.16 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成，

计算二重积分 $\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解 积分区域参考同济 7 高数 p372 页

$$\begin{aligned}\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(x+y)y\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\Big(t-\sin t+1-\cos t\Big)(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{u=t-\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(u+\pi+\sin u+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{\text{奇偶性}}2\int_0^{\pi}\Big(\pi+1+\cos u\Big)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{\theta=u-\frac{\pi}{2}}2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\pi+1-\sin\theta\Big)(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\text{奇偶性}}4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\text{Wallis}}4\pi\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\Big)+4\Big(\frac{\pi}{2}+3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\Big)=\pi(3\pi+5)\end{aligned}$$

例11.17 (AMM12011) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2n\right)$

证明 (by 向禹) 显然

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

因此, 我们只需计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x-n\right)$ 即可.

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{x}\frac{x^n-y^n}{e^x-e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}e^{-x}\frac{x^n-y^n}{1-e^{-(x-y)}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-x}(x^n - y^n)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(x-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= n\cdot n! + \int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-(k+1)x}(x^n - y^n)\sum_{k=0}^{\infty} e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

这里

$$\int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-x}(x^n - y^n)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n\cdot n!$$

而

$$\int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-(k+1)x}x^n e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)x}x^n\frac{e^{kx}-1}{k}\,\mathrm{d}x = n!\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)^{n+1}}\right)$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-(k+1)x}y^n e^{ky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} e^{-(k+1)x}y^n e^{ky}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{k+1}\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{+1}$$

因此

$$\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\int_0^x \frac{x^n - y^n}{e^x - e^y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty} n!\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)^{n+1}} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^{n+1}} \to 1 \quad (n\to+\infty)$$

因此原极限为 2

11.2.3 利用极坐标计算二重积分

例11.18 计算二重积分 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解 法 I. 用极坐标变换, 正方形区域变成

$$\Omega: 0\leqslant r\leqslant \min\{\sec\theta, \csc\theta\}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据对称性, 得到

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}} r|r^2-1|dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} r|r^2-1|dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} |r^2-1|d(r^2-1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} |r^2-1|(r^2-1)\Big|_0^{\sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4\theta+1)d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

法 II.

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0.1]} |x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}} r|r^2-1|\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\min\{\sec\theta,\csc\theta\}} r(r^2-1)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{8} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sec\theta} r(r^2-1)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

例11.19 计算 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $x^2+y^2=x+y$ 所围成的区域

解 [4] 原区域为 $x^2+y^2 \leqslant x+y$. 极坐标变换为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

附带的限制是

$$\begin{cases} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

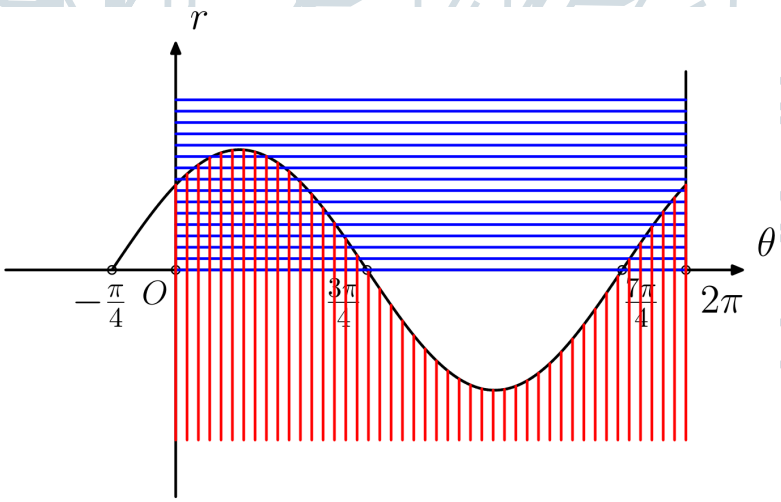
这样变换后的区域为

$$\begin{cases} r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

需要注意原积分并不等于

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r(\sin\theta+\cos\theta) r\,\mathrm{d}r$$

通常, 应该化个草图, 来看出新变量真正的取值范围 从图中可以看出新的积分区域为红色阴影区



域和蓝色阴影区域相交部分, 即

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[2\pi - \dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases}$$

由于 θ 在 $\left[2\pi - \dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ 这一段可以看作与 θ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$ 的那一段是一样的, 所以新区域又可以写成

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

如果你未卜先知, 可以一开始就将变量代换中 θ 的范围定为 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ 或 $[-\pi, \pi]$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2}r^2 \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{4}{3}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin^4\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \xlongequal{\text{Wallis 公式}} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

也可以这样做

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}r^2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} 2r^2\sqrt{2-r^2}\,\mathrm{d}r \xlongequal{r=\sqrt{2}\sin\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

11.2.4 二重积分的换元法

定理 11.2. 二重积分的换元公式

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 若变换

$$T:\ x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D, 且满足

(1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数

(2) 在 D' 上雅可比式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

(3) 变换 $T:\ D' \rightrightarrows D$ 是一对一的

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

♡

✍ **练习 11.10** 证明

$$\iint_S f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u$$

其中 $S: x^2+y^2 \leqslant 1, a^2+b^2 \neq 0$

解 作正交变换:

$$u = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax, by),\ v = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ay, bx)$$

则 $x^2+y^2 = u^2+v^2$, 因此 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 变成 $u^2+v^2 \leqslant 1$ 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 1$$

所以

$$\iint_S f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u+c\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

而

$$\left\{u^2+v^2\leqslant 0\right\} = \left\{(u,v)\middle| -1\leqslant u\leqslant 1, -\sqrt{1-u^2}\leqslant v\leqslant \sqrt{1-u^2}\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}v\\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

✍ **练习 11.11** 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$，计算二重积分 $\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}\sigma$

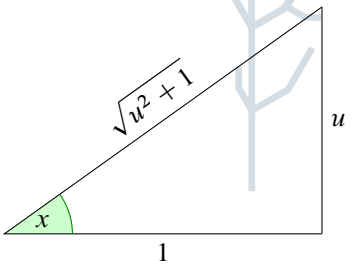
解 作代换

$$\begin{cases}x=2\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\Longrightarrow J(\rho,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=2\rho$$

$x=y\Longrightarrow\theta=\arctan 2$

$$\begin{aligned}\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(y-x)\,\mathrm{d}\sigma\\ &= \int_0^{\arctan 2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho(2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho\\ &\quad+\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho(\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\rho\\ &= \int_0^{\arctan 2}\frac{2}{3}(2\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(\sin\theta-2\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3}(2\sin\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\arctan 2}+\frac{2}{3}(-\cos\theta-2\sin\theta)\Big|_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2}{3}(4\sin\arctan 2+2\cos\arctan 2-3)\\ &= \frac{4}{3}\sqrt{5}-2\end{aligned}$$

其中



$$\tan x=u\Longrightarrow x=\arctan u$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\arctan u=\dfrac{u}{\sqrt{u+1}}\\ \cos x=\cos\arctan u=\dfrac{1}{\sqrt{u+1}}\end{cases}$$

✍ **练习 11.12** 计算积分 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所

围成的三角形区域

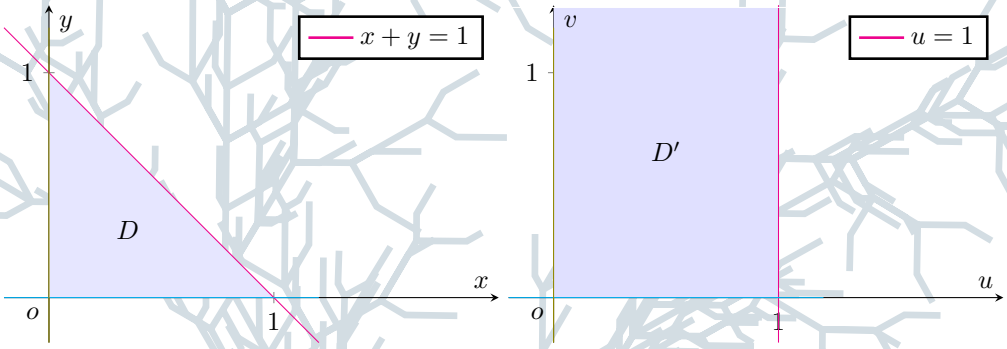
解 令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}$, 其雅可比行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2}\\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^2}$$

区域 D 变为 D', 即

$$\begin{cases}x=0\Longrightarrow \dfrac{u}{1+v}=0\Longrightarrow u=0\\ y=0\Longrightarrow \dfrac{uv}{1+v}=0\Longrightarrow uv=0\\ x+y=1\Longrightarrow \dfrac{u}{1+v}+\dfrac{uv}{1+v}=1\Leftrightarrow u=1\end{cases}$$

区域 D 与区域 D' 如图所示



那么有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{D}}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_{\mathrm{D}'}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{|u|}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\\&=\left[-\frac{\ln(1+v)}{1+v}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\\&=0-\left[\frac{1}{1+v}\right]_0^{+\infty}=1\end{aligned}\qquad\begin{aligned}K&=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}=\frac{16}{15}\end{aligned}$$

故

$$\iint_{\mathrm{D}}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1\cdot\frac{16}{15}=\frac{16}{15}$$

✍ **练习 11.13** 计算

$$\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1} \sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 作变换

$$\begin{cases} x=\rho^4\cos^4\theta \\ y=\rho^4\sin^4\theta \end{cases} \Longrightarrow J=16\rho^7\cos^3\theta\sin^3\theta$$

在这变换下, 区域 $D=\{(x,y)\big|\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}$ 对应区域 $D'=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$
因此有

$$\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1} \sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^{\frac{23}{3}}\mathrm{d}\rho=\frac{2}{13}$$

例11.20 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 x 轴 y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 围成, $a>0,b>0$

解 作变换

$$\begin{cases} x=ar^4\cos^4\theta \\ y=br^4\sin^4\theta \end{cases} \Longrightarrow J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=16abr^7\cos^3\theta\sin^3\theta$$

原区域 D 变 D', $D'=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right\}$. 因此有

$$\begin{aligned}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 br^4\sin^4\theta\cdot 16abr^7\cos^3\theta\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\\&=16ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{11}\mathrm{d}r\\&=\frac{4}{3}ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}ab^2\left[\frac{1}{8}\sin^8\theta-\frac{1}{10}\sin^{10}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab^2}{30}\end{aligned}$$

✍ **练习 11.14** 计算 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

解 作代换

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow J(\rho,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix}=ab\rho$$

在这变换下, 区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 对应区域 $D'=D=\{(\rho,\theta)\big|\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$
因此有

$$\begin{aligned}\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1|ab\rho^2\sin\theta\cos\theta|\cdot|ab\rho|\,\mathrm{d}\rho\\&=(ab)^2\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{8}(ab)^2\left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\right)\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta-\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right)\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{1}{2}(ab)^2\end{aligned}$$

例11.21 证明:$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 法 I. 注意到恒等式

$$\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$$

利用单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)，立即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}\right)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy$$

通过换元 $(u,v)=((x+y)/2,(y-x)/2)$, 也就是 $(x,y)=(u-v,u+v)$ 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv$$

S 是由点 $(0,0),(1/2,-1/2),(1,0),(1/2,1/2)$ 构成的正方形，利用正方形的对称性，那么

$$\begin{aligned}2\iint_S\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv&=4\int_0^{1/2}\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu+4\int_{1/2}^1\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dvdu\\&=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\\&\quad+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du\end{aligned}$$

利用恒等式 $\arctan(u/\sqrt{1-u^2})=\arcsin u,\arctan((1-u)/\sqrt{1-u^2})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin u$, 就能够得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=4\int_0^{1/2}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arcsin u}{2}\right)du\\&=[2\arcsin u^2]_0^{1/2}+[\pi\arcsin u-\arcsin u^2]_{1/2}^1\\&=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

法 II. 计算：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2}$$

做代换

$$(u,v)=\left(\arctan x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},\arctan x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right)$$

从而有 $(x,y)=\left(\frac{\sin u}{\cos v},\frac{\sin v}{\cos u}\right)$, 雅可比行列式即为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}&=\begin{vmatrix}\cos u/\cos v & \sin u\sin v/\cos v^2\\ \sin u\sin v/\cos u^2 & \cos v/\cos u\end{vmatrix}\\&=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}=1-x^2y^2\end{aligned}$$

从而

$$\frac{3}{4}\zeta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\iint_A dudv$$

其中 $A=\{(u,v)|u>0,v>0,u+v<\dfrac{\pi}{2}\}$, 从而 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ 成立!

✍ **练习 11.15** 计算一个二重积分:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)},$$

其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 和 $x+y=1$ 所围成的第一象限的平面区域。

解 作变换 $x=e^{r\cos\theta}$, $y=e^{r\sin\theta}$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta e^{r\cos\theta} & -r\sin\theta e^{r\cos\theta}\\ \sin\theta e^{r\sin\theta} & r\cos\theta e^{r\sin\theta}\end{vmatrix}=re^{r\sin\theta}e^{r\cos\theta}.$$

原积分变为

$$I=\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r}.$$

这里的 Δ 是变换以后的积分区域. 注意 $x+y=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 分别被变为

$$\begin{cases}e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1,\\ e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1.\end{cases}$$

现在来分析由上述两条曲线所围成的 (r,θ) 平面上的区域是什么形状. 从第一个式子可以看出 θ 的变化范围必须使 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都取负值, 故 θ 只能在 $\left[\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right]$ 中取值. 假设由第一个式子确定的函数为 $r=r(\theta)$, 则由第二个式子确定的函数便为 $r=\dfrac{1}{2}r(\theta)$. 因此

$$I=\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r}=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}r(\theta)}^{r(\theta)}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

✍ **练习 11.16** 证明

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)\pi$$

解

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y e^{\sqrt{2}\sin y\cos x}\,\mathrm{d}y\\&=\oint_{|r|=1}e^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}S\quad \mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}x}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}x}\left(\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}x}(\pi)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

11.3 三重积分

11.3.1 利用直角坐标系计算三重积分

定理 11.3. 化为三次积分

将三重积分化为三次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

♡

例11.22 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成。

解

$$\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z = \frac{1}{48}$$

定理 11.4. 投影法 (先一后二)

设 Ω 是 XY 型区域：$\Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

♡

例11.23 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 所围成。

解 Ω 在 xOy 面上的投影区域为三角形区域

下边界曲面：$z=0$，上边界曲面：$z=xy$

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \frac{1}{364}$$

例11.24 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3$$

解 [16] 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z \int_z^1 f(y)\,\mathrm{d}y \int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z \int_z^1 f(y)F(z)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 f(z)F(z)\big[F(1)-F(z)\big]\,\mathrm{d}z \\
&= \left[F(1)\frac{1}{2}F^2(z) - \frac{1}{3}F^3(z)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^3
\end{aligned}$$

定理 11.5. 截面法 (先二后一)

设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,c\leqslant z\leqslant d,\ (x,y)\in D_z\}$

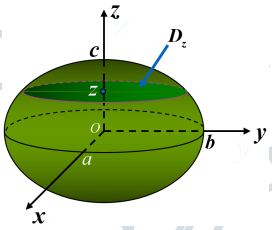
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

先计算一个二重积分 (算面积)、再计算一个定积分 ♡

例11.25 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域。

解

$$\Omega:\begin{cases}-c\leqslant z\leqslant c\\ D_z:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}\end{cases}$$



$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3\end{aligned}$$

注意 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积: $A=\pi ab$

例11.26 (2015 考研) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ _____

解 由轮换对称性得

$$\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面, 其面积为 $\dfrac{1}{2}(1-z)^2$. 所以

$$\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}$$

例11.27 求由方程 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=z$ 所确定的曲面 Σ 所围空间立体 Ω 的体积, 其中 a,b,c 为常数.

解 任取平面 $z=z(0\leqslant z\leqslant 1)$ 截立体 Ω 得截面

$$D_z:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\sqrt{z-\frac{z^4}{c^4}},$$

于是

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}\sigma=\pi ab\int_0^c\sqrt{z-\frac{z^4}{c^4}}\,\mathrm{d}z\\&\xlongequal{t=z^{\frac{3}{2}}}\frac{2\pi}{3}ab\int_0^c\sqrt{1-\frac{t^4}{c^4}}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}ab\cdot\frac{\pi}{4}c^2=\frac{\pi^2}{6}abc^2\end{aligned}$$

例11.28 (2018CMC) 计算三重积分 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

解

$$\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^4\mathrm{d}z\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}}r^3\,\mathrm{d}r=\frac{256}{3}\pi$$

例11.29 (CMC,2019) 计算三重积分 $\iiint_\Omega\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$.

解 采用“先二后一法”, 并利用对称性, 得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},\text{其中 }D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x.$$

用极坐标计算二重积分, 得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{r\,\mathrm{d}r}{(1+r^2+z^2)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

交换积分次序, 得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\,\mathrm{d}z$$

作变量代换: $z=\tan t$, 并利用对称性, 得

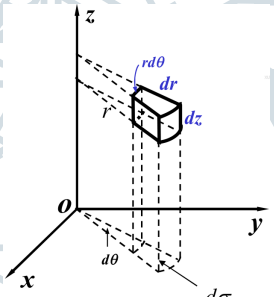
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\,\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sec^2\theta\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}$$

所以 $I=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi^2}{16}=\dfrac{\pi^2}{32}$.

11.3.2 利用柱面坐标计算三重积分

柱面坐标=极坐标+竖坐标

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}\quad\begin{cases}0\leqslant\rho<+\infty\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ -\infty<z<+\infty\end{cases}$$



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

例11.30 计算三重积分 $\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2$

解

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\iint_\Omega\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_\rho^2\rho^3\,\mathrm{d}z=\frac{16}{5}\pi$$

例11.31 (1991 数 1) 求 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)\,dV$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 围成的立体.

解 旋转曲面方程: $x^2+y^2=2z$, Ω 在坐标面上的投影区域: $x^2+y^2\leqslant 8$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{4}(\rho^2+z)\rho\,dz=\frac{256}{3}\pi$$

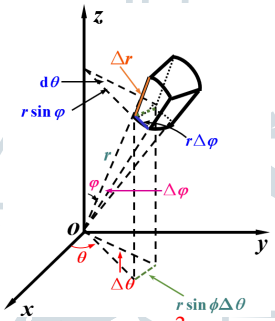
例11.32 计算 $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成的有界区域

解

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz&=\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\leq z^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\\&=\int_0^1 dz\int_0^z r\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

11.3.3 利用球面坐标计算三重积分



$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}\qquad \begin{cases} 0\leqslant r<+\infty \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

定理 11.6. 球面坐标下的体积元素:

$$dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$ ♡

定理 11.7. 常见曲面的球面坐标方程

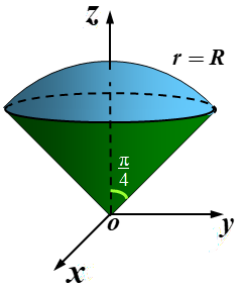
	直角坐标方程	球面坐标方程
球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$r=R$
球面	$x^2+y^2+z^2=2az$	$r=2a\cos\varphi$
正圆锥面	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\frac{\pi}{4}$
圆锥面	$z=\cos\beta\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\beta$

♡

例11.33 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant R \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4} \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$



因此

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{5}R^5(2-\sqrt{2})$$

例11.34 计算 $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

解 $\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 1$

$$\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

例11.35 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=2$, 求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$.

解 在球坐标系, 积分区域可以用不等式描述上述形式描述为:

$$D=\{(\theta,\varphi,r)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant t\}$$

所以三重积分为

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

由于 $f(u)$ 具有连续导数, 故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 4\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r}{t^4}\\ &\overset{\text{洛必达}}{=\!=} 4\lim_{t\to 0}\frac{t^2 f(t)}{4t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} f'(t) = 2\end{aligned}$$

例11.36 (2016CMC) 某物体所在的空间区域为 Ω : $x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$, 密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量

$$M=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解 由于

$$\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$$

是一个椭球, 它的体积为 $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

作变换 $\begin{cases}u=x-\frac{1}{2}\\ v=y-\frac{1}{2}\\ w=\sqrt{2}(z-\frac{1}{2})\end{cases}$ $\Longrightarrow J=\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\sqrt{2}\Longrightarrow \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

将区域 Ω 变为单位球 $\Sigma: u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 则

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_\Sigma\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

因为一次项积分都为 0, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left[u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w+A$$

其中 $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. 记

$$I=\iiint_{\Sigma}\left[u^2+v^2+w^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}$$

由于 u^2, v^2, w^2 在 Ω 上的积分都是 $\dfrac{I}{3}$, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

例11.37 (2018CMC) 计算三重积分 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

解 (1). 计算大球 (V_1) 的积分: 采用球坐标换元, 令

$$(V_1):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-1=r\cos\varphi\\ 0\leqslant r\leqslant 3, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\varphi\int_0^3 r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

(2). 计算小球 (V_2) 的积分: 采用球坐标换元, 令

$$(V_2):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-2=r\cos\varphi\\ 0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

(3). 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 (V_3): 采用柱坐标, 令

$$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0\\ 0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V&=\iint_{r\leqslant 2\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3(\sqrt{9-r^2}-1)\,\mathrm{d}r=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

所以最终的积分为

$$\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\iiint_{(V_1)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V-\iiint_{(V_2)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V-\iiint_{(V_3)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\frac{256}{3}\pi$$

例11.38 求由方程 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=z$ 所确定的曲面 Σ 所围空间立体 Ω 的体积, 其中 a, b, c 为常数.

解 作广义球坐标代换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \Omega : \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \left(\dfrac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{c\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{\frac{1}{3}}} abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{3}abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{6}abc^2 \end{aligned}$$

11.4 n 重积分

例11.39 (匈牙利,1967) 设 $f:[0,1]\to R$ 连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

.

解 **解法 1** . 设 $|f|$ 最大值为 M. 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-1/2|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f(\frac{1}{2})\right|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\ \leq&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\ +&\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\delta}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\ \leq&2M\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\delta}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots dx_n+\varepsilon \\ \leq&\frac{2M}{\delta^2}\int_{\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\delta}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon \\ \leq&\frac{2M}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+\varepsilon \\ =&\frac{M}{6n\delta^2}+\varepsilon. \end{aligned}$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{[0,1]^n}\left|f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f(\frac{1}{2})\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\leq\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 即可.

解法 2 由科尔莫格罗夫强大数定律得

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s.}E(X_i)=\frac{1}{2}\,(n\to+\infty).$$

又因为 $f(x)$ 连续有界, 由控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}E\left(f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)=E\left(\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right)$$

$$= E\left(f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

例11.40 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

解 令 $[0,1]^n = V_n$. 由于 $\lim\limits_{\substack{y\to\frac{1}{3}\\x\to\frac{1}{2}}}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 δ 使得 $\forall x,y:\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\delta,\left|y-\dfrac{1}{3}\right|<\delta$. 有 $\left|\dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{\delta}{2}$,

令 $A_n = \left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\delta\right\}$, $B_n = \left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\left|\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\dfrac{1}{3}\right|\geqslant\delta\right\}$

则

$$\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\geqslant\int\cdots\int\limits_{A_n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\geqslant\int\cdots\int\limits_{A_n}\delta^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \delta^2 m(A_n)\ (m(A_n)\text{为 }A_n\text{ 体积})$$

注意到

$$\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n-\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{3}+2C_n^2\times\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12n}$$

故 $m(A_n)<\dfrac{1}{12n\delta^2}$, 同理

$$\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\geqslant\delta^2 m(B_n)\ (m(B_n)\text{为 }B_n\text{ 体积})$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{5}+2C_n^2\times\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\geqslant\delta^2 m(B_n)$$

$$\frac{4}{45n}\geqslant\delta^2 m(B_n)$$

即 $m(B_n)<\dfrac{4}{45n\delta^2}$, 从而

$$\left|\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n-\frac{2}{3}\right|$$

$$\leqslant\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}\left|\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}\right|\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\xlongequal{F(x)=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}-\frac{2}{3}}\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n|(A_n\cup B_n)}|F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\int\cdots\int\limits_{A_n\cup B_n}|F(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{A_n}\cdots\int \left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n + \int_{B_n}\cdots\int \left(1+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{5}{3}\big(m(A_n) + B(B_n)\big)$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{12n\delta^2} + \frac{4}{45n\delta^2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2} + \frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{12\delta^2}+\dfrac{4}{45\delta^2}\right)\dfrac{1}{n} = 0$. 故存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 且 $n>N$ 有

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{12\delta^2} + \frac{4}{45\delta^2}\right)\frac{1}{n} < \varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\cdots\int \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{2}{3}$$

例11.41 假设 $f\in C[t,t+1]$, 其中 $t>0$. 对于 $p\in\mathbb{R}$, 定义函数

$$\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases}\left(\dfrac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}, & p=0.\end{cases}$$

另外定义

$$A_p = \begin{cases}\left(\dfrac{(t+1)^{p+1}-t^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,-1\\ \dfrac{(t+1)^{t+1}}{t^t e}, & p=0.\\ \dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{t})}, & p=-1.\end{cases}$$

那么我们有极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n} f(\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n))\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f(A_p).$$

解 (by 逆逆) 若 $p\neq 0$, 令 $g(x) = f(x^{\frac{1}{p}})$, 那么只需考虑积分

$$\int_{[t,t+1]^n} g\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

由于我们可以用三角多项式一致逼近函数, 所以只需考虑 $e^{\mathrm{i}2\pi kx}$ 的情形, 即

$$\int_{[t,t+1]^n}\exp\left(\mathrm{i}2\pi k\cdot\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \left(\int_{[t,t+1]} e^{\mathrm{i}2\pi k\frac{x^p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n.$$

根据 $e^{\mathrm{i}2\pi k\frac{x^p}{n}} = 1+\mathrm{i}2\pi k\dfrac{x^p}{n}+O(1/n^2)$ 可得

$$\int_{[t,t+1]} e^{\mathrm{i}2\pi k\frac{x^p}{n}}\,\mathrm{d}x = 1+\mathrm{i}2\pi k\frac{A_p^p}{n}+O(1/n^2),$$

于是

$$\int_{[t,t+1]^n}\exp\left(\mathrm{i}2\pi k\cdot\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \to \exp(\mathrm{i}2\pi kA_p^p),$$

故有

$$\int_{[t,t+1]^n} g\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \to g(A_p^p),$$

因此

$$\int_{[t,t+1]^n} f(\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n))\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f(A_p).$$

若 $p=0$, 我们可以用三角多项式一致逼近函数, 所以只需考虑 x^k 的情形即

$$\int_{[t,t+1]^n}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{k}{n}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\left(\int_{[t,t+1]}x^{\frac{k}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n.$$

根据 $x^{\frac{k}{n}}=1+\dfrac{k}{n}\ln x+O(1/n^2)$ 可得

$$\int_{[t,t+1]}x^{\frac{k}{n}}\,\mathrm{d}x=1+\frac{k}{n}\ln A_0+O(1/n^2),$$

于是

$$\int_{[t,t+1]^n}(x_1,\cdots,x_n)^{\frac{k}{n}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\to\exp(k\ln A_0)=A_0^k.$$

类似可得结论成立.

推论: 根据幂平均不等式, $\varphi_{p,n}(x_1,\cdots,x_n)$ 关于 p 是递增的, 取 $f(x)=x$ 可得 A_p 关于 p 是递增. 特别地, 取 $p=-1,0,1$ 可得到不等式

$$\frac{t+1}{t+\frac12}\left(1+\frac1t\right)^t\leqslant e\leqslant(t+1)\ln\left(1+\frac1t\right)\left(1+\frac1t\right)^t.$$

11.5 重积分的应用

11.5.1 曲面的面积

定理 11.8. 空间曲面的面积

空间曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的面积公式:

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♡

例11.42 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2\leqslant x$ 内那一部分的面积.

解 所求面积的曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Longrightarrow\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt2$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy} : $x^2+y^2\leqslant x$, 所以

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt2}{4}\pi$$

例11.43 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b\leqslant a)$ 内那部分的面积

解

$$x^2+y^2+z^2=a^2\Longrightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

z 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy} : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant1$

$$\begin{aligned}S&=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\overset{\text{对称性}}{=\!=\!=}8a\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= 8a \int_0^a \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}x$$
$$= 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$

定理 11.9. 光滑曲面的面积

若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_y}{F_z}, \quad (x, y) \in D_{x,y}$$

光滑曲面的面积:

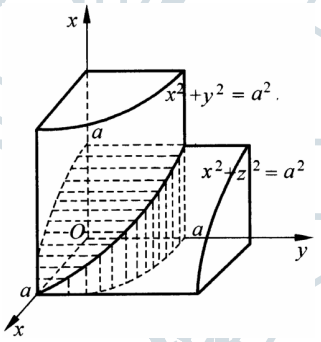
$$S = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♡

11.5.2 求体积

例11.44 计算由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $x^2 + z^2 = a^2$ 所围成的空间立体的体积 V

解 由对称性得到



$$V = 8 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0}} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 8 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= 8 \int_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3$$

11.5.3 质心

定理 11.10. 形心公式

形心 : $(\overline{x}, \overline{y})$ $\iint_D x\mathrm{d}\sigma = \overline{x} \iint_D \mathrm{d}\sigma$ $\iint_D y\mathrm{d}\sigma = \overline{y} \iint_D \mathrm{d}\sigma$

♡

例11.45 计算 $\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D : x^2 + y^2 \leqslant x + y + 1$

解 区域 D

$$D = \left\{ \{x, y\} \middle| \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \tfrac{3}{2} \right\}$$

而

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma = \overline{x} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$
$$\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma = \overline{y} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

因此

$$\iint_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

定理 11.11. 质心

对于平面薄片，面密度 $\rho(x,y)$ 连续，D 是薄片所占的平面区域，
则计算重心 $\overline{x},\overline{y}$ 的公式为

$$\overline{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\quad \overline{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}$$

♡

例11.46 (数 I, 2019) 设 Ω 是锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解 (by 向禹) 设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由于 Ω 是关于 yOz 面对称的，由对称性可知 $\bar{x}=0$. 对固定的 z，记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\}$，利用切片法可得

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},$$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}V&=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{y-z=u}\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}(u+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\\&=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y}=\bar{z}=\dfrac{\pi/12}{\pi/3}=\dfrac{1}{4}$，形心坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$

定理 11.12. 不均匀平面图形的质心

设质量均匀的曲边梯形 $aBCb$ 是由 $y=f(x),x=a,x=b$ 所围成，设其密度为 $\rho(x)$，则质心坐标 (x_0,y_0) 是

$$x_0=\frac{\int_a^b x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x},\quad y_0=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}$$

♡

证明 $\forall x\in[a,b]$，面积微元

$$\mathrm{d}A(x)=f(x)\,\mathrm{d}x$$

于是，有质量微元

$$\mathrm{d}M(x)=\rho(x)\,\mathrm{d}A(x)=\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

这样，$\mathrm{d}M(x)$ 对 x 轴和 y 轴的静力矩 M_x,M_y 分别为

$$\mathrm{d}M_x(x)=\frac{1}{2}f(x)\,\mathrm{d}M(x)=\frac{1}{2}\rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}M_y(x)=x\,\mathrm{d}M(x)=x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因而，质心坐标 (x_0,y_0) 是

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x},\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x}$$

例11.47 曲线 $y=x^2$, x 轴与 $x=1$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周产生的旋转体的形心 x 坐标等于 _____

解 由形心公式,

$$\bar{x}=\frac{\pi\int_0^1 x\cdot(x^2)^2\,\mathrm{d}x}{\pi\int_0^1(x^2)^2\,\mathrm{d}x}=\frac{5}{6}$$

引理 11.1. 古鲁金定理 II

平面曲线绕此平面上不与其相交的轴旋转一周，生成的旋转体侧面积等于此曲线的质心绕同一轴旋转所产生的圆周长乘以该曲线的弧长。即：

$$S=2\pi\rho l$$

其中，ρ 为曲线重心到轴的距离；l 为曲线段长 ♡

引理 11.2. 古鲁金定理 II

一平面图形绕与其不相交的轴 (可以是它的边界) 旋转所得立体的体积等于该平面图形面积与其重心绕轴旋转的周长的乘积。即：

$$V=2\pi\rho S$$

♡

11.6 含参变量的积分

11.6.1 含参变量的积分的一致收敛

定义 11.1. 无穷积分的一致收敛

如果 $\forall\varepsilon>0$, 总 $\exists A_0=A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x\in I$ 无关!) $>a$, 当 $A>A_0$ 时, 有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

则称含参变量的无穷积分 $\int_A^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛. ♣

定义 11.2. 瑕积分的一致收敛

设 a 为瑕点, $\forall y\in I$, $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x\in I$ 无关!) >0, 当 $\delta\in(0,\delta_0)$, 有

$$\left|\int_a^{a+\delta}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{a+\delta}^b f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ \forall y\in[\alpha,\beta]$$

瑕积分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. ♣

定理 11.13. 参变量无穷积分的 Cauchy 收敛准则

无穷积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$(仅与 ε 有关, 而与 $x \in [\alpha,\beta]$ 无关!) $> a$, 当 $A', A'' > A_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

♡

定理 11.14. 参变量无穷积分的 Weierstrass 判别法

设 $f(x,y)$ 对 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 F, 使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 y, 都有

$$|f(x,y)| \leqslant F(x), \quad (x,y) \in [a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$$

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

♡

例11.48 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

解 [4] 注意到 $x = 0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x = 0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分. 我们有

$$\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-x}, \quad \forall (x,\alpha) \in (0,+\infty) \times [1,+\infty).$$

由于 $\int_0^{+\infty} e^{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 因此由 Weierstrass 定理,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

定理 11.15. 参变量无穷积分的 Abel 判别法

如果函数 $f(x,y), g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 对 x 单调, 且关于 $y \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\forall M > 0$(常数), 使得
$$|g(x,y)| \leqslant M, \quad (x,y) \in [a,+\infty) \times [\alpha,\beta];$$
2. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

♡

例11.49 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

解 [4] 注意到 $x = 0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x = 0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分.

由于积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 该积分不含参数 α, 自然关于 α 是一致收敛的. 另外对于固定的 $\alpha \in [0,+\infty)$, $e^{-\alpha x}$ 关于 x 都是单调有界的. 因此由 Abel 判别法,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

定理 11.16. 参变量无穷积分的 Dirichlet 判别法

如果函数 $f(x,y), g(x,y)$ 满足:

1. $g(x,y)$ 为 x 的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时关于 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致趋于 0, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, 当 $x > A_0$ 时, $|g(x,y)| < \varepsilon$;
2. $\forall A \geqslant a, \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即 $\exists M > 0$(M 为常数), 使得

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,, \quad \forall y \in [\alpha,\beta],$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例11.50 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

解 [4] 注意到 $x = 0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x = 0$ 的附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分.

注意 $e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ 在整个 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上是有界的, 因此, 我们只需考虑 $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

注意到 $\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x$ 关于 $A \geqslant 1$ 一致有界, 而函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调, 且当 $x \to +\infty$ 时, 它关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛到 0, 所以由 Dirichelt 判别法,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

定理 11.17. Dini

设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续、非负. 若

$$\varphi(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上连续, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

11.6.1.1 含参变量积分的性质

推论 11.1

若 $f(x,y) = g(x)h(y)$, 此处 $(x,y) \in \mathbb{R} = [a,b]\times[c,d]$, 则

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

解 根据傅比尼 (Fubini) 定理, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}A &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d \left[h(y)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \quad (\text{把}h(y)\text{当作常数})\end{aligned}$$

$$= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \quad \left(\text{把} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{当作常数}\right)$$

定理 11.18. 莱布尼茨公式

如果函数 $f(x,y)$ 及偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $\mathbb{R}=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上可微，且

$$c \leqslant \alpha(x) \leqslant d,\ c \leqslant \beta(x) \leqslant d \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

那么，$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y + f\big[x,\beta(x)\big]\beta'(x) - f\big[x,\alpha(x)\big]\alpha'(x)\end{aligned}$$

♡

例11.51 设 $\Phi(x)=\int_x^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\,\mathrm{d}y$，求 $\Phi'(x)$

解 应用莱布尼茨公式，得

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \int_x^{x^2} \cos(xy)\,\mathrm{d}y + \frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x - \frac{\sin x^2}{x}\cdot 1 \\ &= \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_x^{x^2} + \frac{2\sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} = \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}.\end{aligned}$$

例11.52 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_t^{\frac{x}{2}} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^2}{4}}}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\left[\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{x}{2}} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u - \int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{d}t\int_{\frac{x}{2}}^{t} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}u\right] \\ &\overset{\text{换序}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\left[\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}u\int_0^{u} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{d}u\int_u^{x} e^{-(t-u)^2}\,\mathrm{d}t\right] \\ &\overset{\text{洛必达}}{=\!=} 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\frac{x}{2}}^{x} e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{x} e^{-(t-\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}t \overset{t-\frac{x}{2}=v}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\ &\overset{\text{洛必达}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\right) = 1\end{aligned}$$

11.6.2 含参变量积分的计算

例11.53 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\partial}{\partial T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^T\,\mathrm{d}x\Big|_{T=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial T}B\left(\frac{T+1}{2},\frac{1}{2}\right)\Big|_{T=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\Big|_{T=0}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{T\to 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{T+1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{T+1}{2}\right)-\psi_0\left(\frac{T}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{T}{2}+1\right)}\Bigg|_{T=0}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)-\psi_0(1)}{2\Gamma(1)}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left((-\gamma-2\ln 2)-(-\gamma)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(-2\ln 2) = -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

例11.54 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\ln x=-t} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\sin t\,\mathrm{d}t\int_1^{+\infty}e^{-ty}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}e^{-xy}\,\mathrm{d}y\\
&= \int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \arctan y\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

例11.55 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 令 $\displaystyle F(\alpha)=\int_0^1\frac{\arctan\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 则 $F(0)=0$

$$
\begin{aligned}
F'(\alpha) &= \int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+\alpha^2x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x=\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha^2\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\alpha^2)\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{(1+\alpha^2)\tan^2\theta+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

于是

$$
F(1) = F(1)-F(0) = \int_0^1 F'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})
$$

因此

$$
\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})
$$

例11.56 求定积分

$$
\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta
$$

解 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$
\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right)
$$

令 $\displaystyle F(\lambda)=\int_0^{2\pi}e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$, 则

$$
\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{i\lambda}\int_0^{2\pi} i\lambda e^{i\theta}e^{\lambda e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i\lambda}\left[e^{\lambda e^{i\theta}}\right]_0^{2\pi} = 0
$$

故

$$F(\lambda)-F(0)=\int_0^{\lambda}\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=F(1)=2\pi$$

例11.57 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

解 令 $F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$，$\alpha>0$, 则

$$\begin{aligned}F'(\alpha)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+\alpha^2t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\left[\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{t}{\alpha}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{\alpha^2-1}\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2(\alpha+1)}\end{aligned}$$

又 $F(0)=0$, 于是

$$F(\alpha)=F(\alpha)-F(0)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1)$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x=F(2)=\frac{\pi}{2}\ln 3$$

练习 11.17 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解 (西西) 注意到

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}(1-a,a)=\pi\csc(a\pi)$$

上式两边对 a 求导得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{-a}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\pi^2\csc(a\pi)\cot(a\pi)$$

令 $a=\frac{1}{4}$. 再换 $x\to x^2$ 即有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}$$

例11.58 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

解 记 $I(n)=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

$$I(n)=2\mathrm{B}\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{-\frac{1}{2}}$$

上式两边对 n 求导得:

$$I'(n)=\int_0^1\frac{x^n\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\sim-\frac{\sqrt{\pi}}{4}n^{-\frac{3}{2}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\int_0^1\frac{t^n\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

例11.59 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

解 (by 冬眠的小老鼠)

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\ln(1+x)$$
$$=\ln^2 2-2\int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\ln^2 2-2J$$

令 $\displaystyle J(\alpha)=\int_0^1 \frac{x\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$J'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^2}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}-\frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$$

又 $J(0)=0$, 于是

$$J=J(1)-J(0)=\int_0^1 J'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$
$$=\int_0^1\left(\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}-\frac{\alpha\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\right)\mathrm{d}\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\alpha\ln 4-\pi}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{96}(\pi^2+12\ln^2 2)$$

因此

$$I=\ln^2 2-\frac{1}{48}(\pi^2+12\ln^2 2)=\frac{3}{4}\ln^2 2-\frac{\pi^2}{48}$$

例11.60 计算积分: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

解 令

$$f(t)=\int_0^1 \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$f'(t)=\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)(1+tx^2)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{t+1}\int_0^1 \frac{x-1}{1+tx^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{t+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$
$$=\frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+tx^2)-\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan(\sqrt{t}x)+\ln(x+1)\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{2t}\ln(1+t)-\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\sqrt{t}+\ln 2\right]$$
$$\Longrightarrow f(t)=\frac{1}{2}\left[-\mathrm{Li}_2(-t)-\frac{1}{2}\ln^2(t+1)\right]-\arctan^2\sqrt{t}+\ln 2\ln(t+1)$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x=f(1)$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\mathrm{Li}_2(-1)-\frac{1}{2}\ln^2 2\right]-\frac{\pi^2}{16}+\ln^2 2$$
$$=\frac{3}{4}\ln^2 2-\frac{\pi^2}{48}$$

练习 11.18 计算积分

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

解 令 $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(\alpha+\cos x)\mathrm{d}x,\alpha>1$, 易知 $I(\alpha,x)$ 可导

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\sin x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha d(\cot x)}{(\alpha\cot x)^2+\alpha^2-1}\\&=-\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arctan\frac{\alpha\cot x}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\end{aligned}$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C\Rightarrow I(1)=\pi\ln(1+0)+C=C$$

因为

$$I(1)=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=-\pi\ln 2$$

所以

$$I(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$$

令 $\alpha=2$, 可得

$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

✍ **练习 11.19** 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}\left(x+x^2+x^{2^2}+x^{2^3}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

解 考虑含参变量 a 的积分所确定的函数

$$I(a)=\int_0^1\frac{x^a-1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

易得 $I(0)=0$ 以及

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a}=\int_0^1x^a\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}\tag{11.2}$$

式 (11.2) 在 $[0,1]$ 对 a 积分得

$$I(a)-I(0)=\int_0^1\frac{1}{a+1}\mathrm{d}x\Longrightarrow I(a)=\ln(a+1)$$

因此有

$$\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}x^k\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x^k-1)-(x^{k+1}-1)}{\ln x}\mathrm{d}x=\ln\frac{k+1}{k+2}$$

故

$$I=\int_0^1\frac{1-x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}x^{2^k}\mathrm{d}x=\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^k+2}=\ln\left(\frac{1}{2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+1}{2^{k-1}+1}\right)=-\ln 3$$

✍ **练习 11.20** 求定积分 $\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 (by ytdwdw)[3] 设 $\alpha \geqslant 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
F(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^{\alpha} \frac{x^2}{(1+t^2x^4)(x^2+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\alpha} \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+t^2x^2}{(1+t^2x^4)(t^2+1)} - \frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{tx=\sqrt{t}u} \int_0^{\alpha} \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \frac{1+tx^2}{(1+x^4)(t^2+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\alpha} \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\alpha} \frac{1+t}{(t^2+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2} \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1) + \arctan(\sqrt{2\alpha}-1) - \arctan\alpha)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\left(1-x^2\right)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{3}-1)\arctan x^2}{2\left(x^2+2-\sqrt{3}\right)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{3}+1)\arctan x^2}{2\left(x^2+2+\sqrt{3}\right)}\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{\sqrt{2}}{2}(F(2-\sqrt{3}) - F(2+\sqrt{3})) \\
=&-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1) + \arctan(\sqrt{2\alpha}-1) - \arctan\alpha\right)\Big|_{\alpha=2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \\
=&-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(-\arctan(\sqrt{3}-2) + \arctan(2-\sqrt{3})) = -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

✍ **练习 11.21** 计算

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin(x+y)}{xy\,(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 考虑参数积分

$$I(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin t\,(x+y)}{xy\,(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad 0 < t < 1$$

则

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \cos t\,(x+y)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y\,[\cos(tx)\cos(ty) - \sin(tx)\sin(ty)]}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \cos(tx)\cos(ty)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos(tx)}{x}\mathrm{d}x \int_0^{\infty} \frac{\sin y \cos(ty)}{y}\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos(tx)}{x}\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(1+t)\,x + \sin(1-t)\,x}{x}\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(Dirichlet Integral)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin y \sin(tx)\sin(ty)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin(tx)}{x}\mathrm{d}x \int_0^{\infty} \frac{\sin y \sin(ty)}{y}\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin(tx)}{x}\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

[3]《数学分析高等数学例题选解 V6》

$$= \left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(1-t)x-\cos(1+t)x}{x}\mathrm{d}x\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \quad \text{(Frullani Integral)}$$

于是

$$I = I(0)+\int_0^1 I'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\int_0^1 \ln^2\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\int_0^1\left[\ln^2(1-t)+\ln^2(1+t)-2\ln(1-t)\ln(1+t)\right]\mathrm{d}t\right),$$

其中

$$\int_0^1 \ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln^2 t\,\mathrm{d}t = t\ln^2 t\,|_0^1 - \int_0^1 2\ln t\,\mathrm{d}t = 2.$$

$$\int_0^1 \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}t = t\ln^2(1+t)\,|_0^1 - \int_0^1 \frac{2t\ln(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= \ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$$

$$\int_0^1 \ln(1-t)\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}\left[(t-1)\ln(1-t)-t\right]$$
$$= \left[(t-1)\ln(1-t)-t\right]\ln(1+t)\,|_0^1 - \int_0^1 \frac{(t-1)\ln(1-t)-t}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= -\ln 2 + \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 2-2\ln 2+2\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\mathrm{d}t = 2-2\ln 2+2\int_0^1 \frac{\ln t}{2-t}\mathrm{d}t$$
$$= 2-2\ln 2+2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2u)}{1-u}\mathrm{d}u = 2-2\ln 2+2\ln^2 2+2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u$$
$$= 2-2\ln 2+2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = 2-2\ln 2+2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u$$
$$= 2-2\ln 2+\frac{1}{2}\left(2\ln^2 2+2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u+2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u\right)$$
$$= 2-2\ln 2+\ln^2 2+\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u = 2-2\ln 2+\ln^2 2+\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u^n\ln u\,\mathrm{d}u$$
$$= 2-2\ln 2+\ln^2 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 2-2\ln 2+\ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}.$$

将以上各式代入原积分可得

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin y\sin(x+y)}{xy(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{6}.$$

✍ **练习 11.22** 计算积分: $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$

解 方法 1:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}}\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}} \left[\int_\varepsilon^\delta \frac{\cos ax}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^\delta \frac{\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x\right]$$

分别作变量代换 $ax = u, bx = u$, 得

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}} \left[\int_{a\varepsilon}^{a\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{b\varepsilon}^{b\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \delta\to+\infty}} \left[\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$$

因为 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛 (可由 Dirichlet 判别法得到)

所以

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+} \left[\int_1^{b\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{a\delta} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

对于前面那个极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \ln\frac{b}{a} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

由于 $\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 同理有 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$$

注: 这个方法可以计算此题的一般形式 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 称为 Froullani 积分, 其中 $f(x)$ 需要满足适当条件

解 方法 2 记 $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}(\cos ax - \cos bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则易验证 $F(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上一致收敛

而

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos ax - \cos bx)\,\mathrm{d}x = \frac{t}{b^2+t^2} - \frac{t}{a^2+t^2}$$

$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right) + C$, 其中 C 为积分常数

留意到 $F(+\infty) = 0$

所以

$$0 = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right) + C \Rightarrow C = 0$$

所以

$$F(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right)$$

令 $t \to 0^+$ 即有 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$

11.6.2.1 狄利克雷 (Dirichlet) 积分

练习 11.23 Evaluate

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sin x\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty}\left[-\frac{y\sin x+\cos x}{e^{xy}(y^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y\\ &= \Big[\arctan x\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

注意

$$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\quad(x>0)$$

解 Here's another way of finishing off Derek's argument. He proves

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

Let

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Let

$$D_n=\frac{\pi}{2}-I_n=\int_0^{\pi/2}f(x)\sin(2n+1)x\;\mathrm{d}x$$

where

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}.$$

We need the fact that if we define $f(0)=0$ then f has a continuous derivative on the interval $[0,\pi/2]$. Integration by parts yields

$$D_n=\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}f'(x)\cos(2n+1)x\;\mathrm{d}x=O(1/n).$$

Hence $I_n\to\pi/2$ and we conclude that

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{2}.$$

解

定理 11.19. Riemann

If $f(x)$ is Riemann integrable in the interval $a\le x\le b$, then:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\;\mathrm{d}x=0\,.$$

♡

Next, notice that:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\,,n=0,1,2,\ldots\tag{11.3}$$

and let:

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & ,\ x=0\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\sin\frac{x}{2}} & ,\ 0<x\le\pi\,.\end{cases}$$

Then $\phi(x)$ is continuous and satisfies Riemann theorem, so choosing $k = n + \dfrac{1}{2}$ we write:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\ \mathrm{d}x = 0\ .$$

But taking (11.3) into account we have:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ .$$

Using substitution $u = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ and knowing that $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ converges we finally have:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\ .$$

解 We can decompose interval $[0,+\infty)$ into intervals of length $\dfrac{\pi}{2}$. Then we'll have:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi/2}^{(n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$$

Now consider the case when n is even i.e. $n = 2k$ and substitute $x = k\pi + t$:

$$\int_{2k\pi/2}^{(2k+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = (-1)^k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{k\pi+t}\ \mathrm{d}t$$

and for odd n we have $n = 2k-1$ and we use substitution $x = k\pi - t$:

$$\int_{(2k-1)\pi/2}^{2k\pi/2}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = (-1)^{k-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{k\pi-t}\ \mathrm{d}t$$

Hence we obtain:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{t+k\pi}+\frac{1}{t-k\pi}\right)\right]\mathrm{d}t$$

But in square bracket we have expansion of $\dfrac{1}{\sin x}$ into partial fractions, hence the result follows:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

✍ 练习 **11.24** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

解 注意到

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x}{x^3}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x^3}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 3x\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\\
&= \left[\frac{-3\sin x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\sin 3x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,d\left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 3x\,d\left(\frac{-1}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$=\left[\frac{-3\cos x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\left[\frac{-3\cos 3x}{8x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{9}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x}{3x}d(3x)$$
$$=-\frac{3\pi}{8}+\frac{9\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$$

✍ 练习 **11.25** 计算积分:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x$$

解 利用分布积分，我们有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\sin^n x d(\frac{1}{x^{n-1}})$$
$$=-\frac{\sin^n x}{(n-1)x^{n-1}}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}d(\sin^n x)$$
$$=-\frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)'}{x^{n-1}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}(\sin^n x)'d(\frac{1}{x^{n-2}})$$
$$=-\frac{(\sin^n x)'}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-2}}d(\sin^n x)'$$
$$=-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)''}{x^{n-2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}(\sin^n x)''d(\frac{1}{x^{n-3}})$$
$$=-\frac{(\sin^n x)''}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{n-3}}d(\sin^n x)''$$
$$=\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)'''}{x^{n-3}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\quad\vdots$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x}\,\mathrm{d}x$$

因为

$$(\sin^n x)^{(m)}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{m+n+1}{2}}}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(2k-n)^m\sin(2k-n)x & m+n\text{为奇数}\\ \dfrac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(2k-n)^m\cos(2k-n)x & m+n\text{为偶数}\end{cases}$$

当 $m=n-1$ 时,$m+n=(n-1)+n=2n-1$ 为奇数, 有

$$(\sin^n x)^{(n-1)}=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(2k-n)^{n-1}\sin(2k-n)x$$

又因为有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{(2k-n)x}d[(2k-n)x]=\operatorname{sgn}(2k-n)\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin^n x)^{(n-1)}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(2k-n)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2k-n)x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (2k-n)^{n-1}\operatorname{sgn}(2k-n)\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}$$

11.6.2.2 菲涅耳 (Fresnel) 积分

例**11.61** Evaluate:

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$$

解 方法 1 (by fin3574):

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u]{u=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}(1-\cos u)$$
$$= \lim_{u\to+\infty}\frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}} - \lim_{u\to0^+}\frac{1-\cos u}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}e^{-uv}\mathrm{d}v\right)(1-\cos u)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty}e^{-uv}(1-\cos u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty}e^{-uv}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty}e^{-uv}\cos u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[-\frac{1}{ve^{uv}}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\frac{\sin u - v\cos u}{e^{uv}(v^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{v\sqrt{v}}{1+v^2}\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{v}}{v(v^2+1)}\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{t=v^2}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}$$
$$\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

方法 2 (by fin3574):

$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{I}(\tau) = \int_0^{+\infty}e^{-\tau x^2}\sin x^2\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{I}^2(\tau) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\tau(x^2+y^2)}\sin x^2\sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\tau(x^2+y^2)}\cdot\frac{-1}{2}\Big[\cos(x^2+y^2)-\cos(x^2-y^2)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau r^2}\Big[\cos(r^2)-\cos(r^2\cos 2\theta)\Big] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,[r^2\to r]\\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\tau r}\Big[\cos r-\cos(r\cos 2\theta)\Big]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\tau}{\tau^2+1}-\frac{\tau}{\tau^2+\cos^2 2\theta}\right]\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau}{\tau^2+1}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2\sin^2\theta+(1+\tau^2)\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\int_0^{\pi}\frac{1}{\tau^2\tan^2\theta+(1+\tau^2)}\mathrm{d}\tan\theta\\
&= -\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8}\cdot\frac{1}{\tau\sqrt{1+\tau^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau^2}}\tan\theta\right)\right]_{0\to\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}\to\pi}\\
&= -\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\tau}{8\sqrt{1+\tau^2}}\left[\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right]\\
&= -\frac{\pi\tau}{8(\tau^2+1)}+\frac{\pi}{8\sqrt{1+\tau^2}}
\end{aligned}
$$

✍ 练习 **11.26** Evaluate

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$$

解

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x &\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u]{u=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}(\sin u)\\
&= \lim_{u\to+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}-\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}e^{-uv}\mathrm{d}v\right)\sin u\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[\int_0^{+\infty}e^{-uv}\sin u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{v}\left[-\frac{\cos u+v\sin u}{e^{uv}(v^2+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{v}}{1+v^2}\mathrm{d}v\\
&\xlongequal{t=v^2}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}\\
&\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

注意 Equation

$$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-xt}\mathrm{d}t\quad(x>0)$$

11.6.2.3 拉普拉斯 (Laplace) 积分

例11.62 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \cos bx \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2)y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-a^2y}\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\cos bx\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-a^2y}\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-(yx^2-ibx)}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{-a^2y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{b^2}{4y}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-a^2y-\frac{b^2}{4y}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a^2}e^{-2\sqrt{a^2\cdot\frac{b^2}{4}}}\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-ab}
\end{aligned}$$

注意

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

例11.63 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

解 利用欧拉公式有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

令 $f(z)=\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}$，在上半平面内，i 为 2 阶极点，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left((z-\mathrm{i})^2\cdot\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}(z+3\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}}{2e}
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] = \frac{\pi}{e}$$

于是原积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{e}$$

第 12 章 曲线积分与曲面积分

12.1 对弧长的曲线积分

定义 12.1. 对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数, L 叫做积分弧段, $\mathrm{d}s$ 叫做弧微分.

函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L 上对弧长的曲线积分记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ ♣

定理 12.1. 物理背景

线密度为 $f(x,y)$ (或 $f(x,y,z)$) 的非均匀分布在平面 (或空间) 曲线段 L 上的物体的质量, 特别当 $f(x,y)$(或 $f(x,y,z)$) 时, 第一型曲线积分的数值就是 L 的长度 ♡

12.1.1 对弧长的曲线积分的计算法

定理 12.2. L 为参数方程

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 其中 $\varphi(t), y=\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha<\beta)$$ ♡

(1) L 由显函数给出: $L: x=x,\ y=y(x),\ a\leqslant x\leqslant b$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

(2) L 由极坐标给出: $L: r=r(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$. 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

例12.1 计算 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}s,\quad L: x^2+y^2=1, x>0, y>0$

解 法 1(参数方程) L 的参数方程: $x=\cos\theta, y=\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[(\cos\theta)']^2+[(\sin\theta)']^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cdot(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

法 2(极坐标) L 的极坐标方程: $L: r=1, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 弧微分

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1^2+[(1)']^2}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}$$

法 3(直角坐标) L 的直角坐标方程：$L:y=\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\left[\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

法 4(直角坐标) L 的直角坐标方程：$L:x=\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1$ 弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left[\left(1-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

故

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}s=\int_0^1\sqrt{1-y^2}y^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

例12.2 求两直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2,x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体的表面积

解 只需求 $x^2+y^2=R^2$ 在第一卦限的面积，再乘以 16，柱面下方曲线

$$L:r=R\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

柱面上方曲线方程 $z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}$，弧微分 $\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta$

$$z=f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-(R\cos\theta)^2}=R\sin\theta$$

$$A=16\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=16R^2$$

例12.3 计算 $I=\oint_L\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}$，其中 L 为曲线 $x^2-4xy+5y^2=1$.

解 (by xwmath)[1] 由 $L:x^2-4xy+5y^2=1$，改写方程为 $(x-2y)^2+y^2=1$. 令 $x-2y=\cos t$，$y=\sin t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则

$$\begin{cases}x=\cos t+2\sin t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

被积函数定义在积分曲线上，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}&=\frac{1}{\sqrt{5-x^2-y^2+x^2-4xy+5y^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{6-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}}\end{aligned}$$

将以上计算的结果代入，可得

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2\sin(2t)+2\cos(2t)}}\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi\end{aligned}$$

[1]考研竞赛数学：每日一题 218：对弧长的曲线积分换元法及其应用

例12.4 设曲线 $L:|x|=1,|y|=1$, $f(x)$ 为正值函数, 求 $\oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s$

解 因为积分区域关于 $y=x$ 对称, 故

$$\oint_L \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}s \xlongequal{\text{轮换对称性}} \oint_L \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\oint_L (a+b)\mathrm{d}s = 4(a+b)$$

例12.5 计算曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解 曲线 Γ 为半径为 R 的圆周, 其方程关于变量 x,y,x 具有轮换对称性

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2\,\mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\oint_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

定理 12.3. 对弧长的平面曲线积分换元法

设平面曲线 L 的方程 $\varphi(x,y)=0$, 变换

$$x=x(u,v)\,,\ y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的曲线 L_{uv} 一一映射到 xOy 面上的曲线 L_{xy}, 其中 $\varphi(x,y),x(u,v),y(u,v)$ 在各自分布的曲线上具有一阶连续偏导数且

$$\left(\varphi_x'^2+\varphi_y'^2\right)_L \neq 0\,,\ \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_L \neq 0$$

$f(x,y)$ 在 L_{xy} 上连续, 则

$$\int_{L_{xy}} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{L_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y' \\ -\varphi_x'\end{pmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}$$

其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,

$$\mathrm{d}s_{uv}=\sqrt{(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2}\,,J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

♡

例12.6 计算 $I=\oint_L \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}$, 其中 L 为曲线 $x^2-4xy+5y^2=1$.

解 (by xwmath)[2] 由 $L:x^2-4xy+5y^2=1$, 改写方程为 $(x-2y)^2+y^2=1$. 令

$$u=x-2y,v=y, \text{即 } x=u+2v,y=x$$

所以 $L_{uv}:u^2+v^2=1$, 被积函数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}=\frac{1}{5-4uv-4v^2}$$
$$L:\varphi(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1=0$$

所以 $\varphi_x'(x,y)=2x-4y,\varphi_y'(x,y)=-4x+10y$,

$$\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}=\sqrt{(2x-4y)^2+(-4x+10y)^2}$$
$$=2\sqrt{5u^2-4uv+v^2}$$

[2]考研竞赛数学：每日一题 218：对弧长的曲线积分换元法及其应用

并且

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y'\\ -\varphi_x'\end{pmatrix}\right\| &= \left\|\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4x+10y\\ -(2x-4y)\end{pmatrix}\right\|\\ &= \left|(2y,-2x+4y)\right| = \left|(2v,-2u)\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}=2\end{aligned}$$

将上面计算的结果代入换元法计算公式, 并且积分变量定义在 $L_{uv}:u^2+v^2=1$ 上, 所以

$$5u^2-4uv+v^2=5(u^2+v^2)-4uv-4v^2=5-4uv-4v^2$$

于是换元后的被积表达式为

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{5-4xy+4y^2}} &= \oint_{L_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\sqrt{\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_y'\\ -\varphi_x'\end{pmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}\\ &= \oint_{L_{uv}} \frac{1}{5-4uv-4v^2}\frac{2\sqrt{5u^2-4uv+v^2}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}s_{uv}\\ &= \oint_{L_{uv}} \mathrm{d}s_{uv}\overset{\text{几何意义}}{=\!=\!=} 2\pi\end{aligned}$$

12.2 对坐标的曲线积分

定义 12.2. 第二类曲线积分

函数 $P(x,y)$ 在有向线弧 L 对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

函数 $Q(x,y)$ 在有向线弧 L 对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

记

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

♣

定理 12.4. 物理背景

质点受力 $\boldsymbol{F}(x,y)=\boldsymbol{F}(P(x,y),Q(x,y))$ 作用沿平面或空间有向曲线 L, 从起点 A 移动到终点 B 变力 F 所作的功. ♡

12.2.1 对坐标的曲线积分的计算法

定理 12.5. L 为参数方程

设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 当参数 t 单调地由 α 变 β 时, 点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在

以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t$$

♡

例12.7 计算 $\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$，从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段。

解 L 的的参数方程：$L:x=1+\cos t, y=\sin t \quad (t:0\to\pi)$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi \big((-\sin t)\cdot(1+\cos t)'+(1+\cos t)\cdot(\sin t)'\big)\,\mathrm{d}t=\pi$$

例12.8 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_C \frac{e^y}{x^2+y^2}\big((x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\big),$$

其中 $C:x^2+y^2=1$，取逆时针方向

解

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} e^{e^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi\lim_{z\to 0}e^z=2\pi$$

例12.9 计算 $\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$，从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段。

解 L 的直角坐标方程：$L:y=\sqrt{2x-x^2} \quad (x:2\to 0)$

$$\int_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_2^0\left(-\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)\mathrm{d}x=\pi$$

定理 12.6. 奇偶对称性

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & Q(x,y)=-Q(-x,y)\\ 2\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y, & Q(x,y)=Q(-x,y)\end{cases}$$

♡

定理 12.7. 奇偶对称性

若 Γ 关于 xOy 面对称，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & P(x,y,z)=-P(x,y,-z)\\ 2\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y, & P(x,y,z)=P(x,y,-z)\end{cases}$$

其中 Γ_1 为 Γ 在 xOy 面上方的部分.

♡

例12.10 设 $f(r,t)=\oint_{x^2+xy+y^2=r^2}\frac{x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^t}$，求 $\lim_{r\to\infty}f(r,t)$

解 令 $x=u+v, y=u-v\Rightarrow x^2+xy+y^2=3u^2+v^2$. 令 $u=\frac{r}{\sqrt{3}}\cos\theta, v=r\sin\theta$ 得圆的参数方程

$$\begin{cases}x=\frac{r}{\sqrt{3}}\big(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\big),\\ y=\frac{r}{\sqrt{3}}\big(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\big),\end{cases}\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

于是有

$$f(r,t)=\int_0^{2\pi}\frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\left[\frac{2r^2}{3}(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)\right]^t}=\sqrt{3}\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)^t}$$
$$=4\sqrt{3}\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{(1+3\tan^2\theta)^t}=4\sqrt{3}\left(\frac{2r^2}{3}\right)^{1-t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+3x^2)^t}$$

故有

$$\lim_{r\to+\infty}f(r,t)=\begin{cases}0, & t>1\\ 2\pi, & t=1,\\ +\infty, & t<1.\end{cases}$$

定理 12.8. 对坐标的平面曲线积分换元法

设 L 为平面有向光滑曲线, 起点为 A, 终点为 B. 变换

$$x=x(u,v),y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的有向曲线 L_{uv} 和点 $A_{uv}\to B_{uv}$ 一一映射到 xOy 面上的曲线 L 和点 $A\to B$. 其中, $x(u,v)$, $y(u,v)$, P, Q 在各自定义曲线上具有一阶连续偏导数, 且 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{L_{uv}}\neq 0$, 则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{L_{uv}}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v.$$

定理 12.9. 对坐标的空间曲线积分换元法

设 Γ 为空间有向光滑曲线, 起点为 A, 终点为 B. 变换

$$x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w)$$

将 $O-uvw$ 空间上的有向曲线 $\Gamma_{uvw}:A_{uvw}\to B_{uvw}$ 一一映射到 $O-xyz$ 面上的曲线 $\Gamma:A\to B$. 其中, $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$, P, Q, R 在各自定义曲线上具有一阶连续偏导数, 且 $\left.\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Gamma_{uvw}}\neq 0$, 则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\Gamma_{uvw}}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}+R\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}v+\left(P\frac{\partial x}{\partial w}+Q\frac{\partial y}{\partial w}+R\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}w.$$

12.3 格林公式及其应用

定理 12.10. 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的取正向 (逆时针) 的边界曲线

例12.11 计算 $\int_L x^2y\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y$

L 是由曲线 $y^3=x^2$, $y=x$ 所围成的区域的边界正向曲线

解 (方法 1) $L=L_1\cup L_2$, $L_1:y=x\ (x:0\to 1)$, $L_2:y=x^{\frac{2}{3}}\ (x:1\to 0)$

$$\begin{aligned}\int_L x^2y\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y&=\int_{L_1}x^2y\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}x^2y\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(x^2\cdot x+x^3\cdot 1\right)\mathrm{d}x+\int_1^0\left[x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}+\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot\left(\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{44}\end{aligned}$$

(方法 2) 用格林公式

$$\begin{aligned}\int_L x^2y\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(-x^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x^{\frac{2}{3}}}(-x^2)\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{44}\end{aligned}$$

例12.12 计算 $\int_L(xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y$

解 (加边法)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-\ln(1+y))-\frac{\partial}{\partial y}(xy+e^x)=x$$

添加一条边：$L':y=0,(x:0\to\pi)$, 由格林公式

$$\oint_{L+L'}(xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y=\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L(xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y&=\pi-\int_{L'}(xy+e^x)\,\mathrm{d}x+[x^2-\ln(1+y)]\,\mathrm{d}y\\&=\pi-\int_0^\pi e^x\,\mathrm{d}x\quad(\because\ y=0,\ \mathrm{d}y=0)\\&=\pi+1-e^\pi\end{aligned}$$

例12.13 计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$
其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，$R\ (R>1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解 (挖洞法) 在 L 所围的区域内有奇点：$(0,0)$，作一个椭圆 (顺时针方向)：
$L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$, ε 足够小，使椭圆包含于圆内. L_1 围成的区域为 D_1。

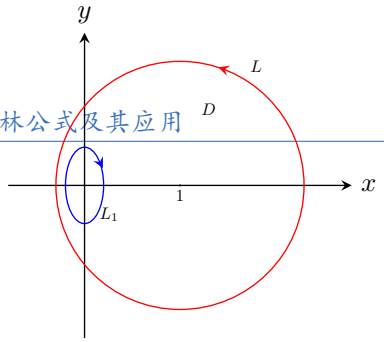
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)=0$$

在 D 上用格林公式得

$$\oint_{L\cup L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

故

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}&=\oint_{L\cup L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}\\&=0-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\oint_{L_1}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{-L_1}x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$



$$\overset{\text{格林公式}}{=\!=\!=} \iint_{D_1}\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\left(\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\right)=\pi$$

例12.14 设函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有一阶连续偏导数, 又

$$f(x,y)=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j},$$
$$g(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}.$$

且在 D 的边界上有 $u(x,y)\equiv=1, v(x,y)=y$, 求 $\iint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma$

证明 [16] 因为

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y},$$

所有

$$\iint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left(\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$
$$\overset{\text{格林公式}}{=\!=\!=}\oint_L uv\,\mathrm{d}x+uv\,\mathrm{d}y=\oint_L y\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=-\pi$$

其中, $L: x^2+y^2=1$ 正向.

例12.15 设函数 $f(x)$ 在闭区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$$

证明: $\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$

解 在极坐标下有

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y'\right)r\,\mathrm{d}r$$
$$\overset{\text{交换积分次序}}{=\!=\!=}\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y'\right)\mathrm{d}\theta$$

注意到: 因为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则对应有 $\mathrm{d}x=-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y=r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, 将上式内层积分看作沿闭曲线 $L_r: x^2+y^2=r^2$ 逆时针方向的曲线积分 $\int_{L_r}-f_y'\,\mathrm{d}x+f_x'\,\mathrm{d}y$, 那么由格林公式, 得

$$\int_{L_r}-f_y'\,\mathrm{d}x+f_x'\,\mathrm{d}y=\iint_{D_\rho:x^2+y^2\leqslant r^2}(f_{xx}''+f_{yy}'')\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_r}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\delta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=\pi(1-e^{-r^2}).$$

于是, $\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\pi(1-e^{-r^2})r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2e}$

法 2.

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\iint_D \left(f'_x\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}+f'_y\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\oint_{L_D}(x^2+y^2)f'_x\,\mathrm{d}y-(x^2+y^2)f'_y\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\oint_{L_D}f'_x\,\mathrm{d}y-f'_y\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\iint_D(1-x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}
\end{aligned}$$

定理 12.11. 面积公式

L 围成的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

♡

例12.16 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$

证明 **证法一**：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1)

$$\text{右边}=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\text{右边}=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geqslant 2+\sin^2 x=\dfrac{5-\cos 2x}{2}$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$$

证法二：(1) 根据 Green 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta$$

因为关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)\mathrm{d}\delta,$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}\geqslant 2+t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin y}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta=\iint_D\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\delta\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$$

定理 12.12. 格林第二公式

设 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 依次表示 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数：证明

$$\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. ♡

证明 由格林第一公式知：

$$\iiint_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置，得

$$\iiint_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

12.3.1 平面上曲线积分与路径无关的条件

定理 12.13. 曲线积分与路径无关的条件

设区域 D 是一个单连通域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关（或沿 D 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 D 内恒成立。 ♡

例12.17 (2018CMC) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分

$$\int_L y\left(2-f(x^2-y^2)\right)\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解 设 $\begin{cases}P(x,y)=y\left(2-f(x^2-y^2)\right)\\ Q(x,y)=x+xf(x^2-y^2)\end{cases}$，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2-f(x^2-y^2)+2y^2f'(x^2-y^2)\\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f(x^2+y^2)+2x^2f'(x^2-y^2)\end{cases}$$

由题设可知, 积分与路径无关, 于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Longrightarrow (x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$$

记 $t=x^2-y^2$, 则微分方程

$$tf'(t)+f(t)=1\Leftrightarrow \big(tf(t)\big)'=1\Longrightarrow tf(t)=t+C$$

又 $f(1)=0$, 可得 $C=-1$, $f(t)=1-\dfrac{1}{t}$, 从而

$$f(x^2-y^2)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$$

例12.18 (同济 7 下 P214) 求解方程

$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解 设 $P(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3$, $Q(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$ 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

因此, 所给方程是全微分方程.

取 $x_0=0, y_0=0$, 有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y\\&=\underbrace{\int_0^y(y^2)\,\mathrm{d}y}_{(0,0)\to(0,y)}+\underbrace{\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x}_{(0,y)\to(x,y)}\\&=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3\end{aligned}$$

于是, 方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

12.4 对坐标的曲面积分

定义 12.3. 第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

其中 $R(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分记为 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

类似可定义

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

记

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

♣

定理 12.14. 两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由此知:

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S$$
$$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S$$
$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

♡

12.4.1 对坐标的曲面积分的计算法

(1) 如果 Σ 由 $z = z(x,y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 取上侧为 "+" 下侧为 "−"。

(2) 如果 Σ 由 $x = x(y,z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Σ 取前侧为 "+" 后侧为 "−"。

(3) 如果 Σ 由 $y = y(z,x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Σ 取右侧为 "+" 左侧为 "−"。

例12.19 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 的部分.

解 把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两部分

下侧 $\Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$　　上侧 $\Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\iint_{D_{xy}} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{15}$$

例12.20 计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 z}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

其中, S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

证明 [16] 利用球面的对称性, 得

$$\begin{aligned} I&=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 z}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}\\ &\xlongequal{\text{对称性}} \iint_S\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\iint_S \frac{1}{z\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_S \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\quad-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I&=\iint_S \frac{1}{z\cos^2 z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标}} 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\\ &=-4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-\rho^2}}{\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}=-4\pi\tan\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1=4\pi\tan 1. \end{aligned}$$

定理 12.15. 奇偶对称性

若 Σ 关于 yOz 面对称, 则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & P(x,y,z)\text{关于}x\text{为奇函数}\\ 2\iint_{\Sigma_1}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, & P(x,y,z)\text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

♡

12.5 对面积的曲面积分

定义 12.4. 第一类曲面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面, $\mathrm{d}S$ 叫做面积元素.

函数 $f(x,y,z)$ 在积分曲面 Σ 上对面积的曲面积分记为 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

♣

12.5.1 对面积的曲面积分的计算法

定理 12.16. 几何意义

$\iint_\Sigma \mathrm{d}S = |\Sigma|$, 其中 $|\Sigma|$ 表示曲面 Σ 的面积.

定理 12.17

设有曲面 $\Sigma: z = z(x,y) \quad (x,y) \in D$, 有界闭区域 D 是曲面在 xOy 面上的投影区域, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 是面积元素

定理 12.18

设有曲面 $\Sigma: y = y(x,z) \quad (z,x) \in D_{zx}$, 有界闭区域 D_{xy} 是曲面在 zOx 面上的投影区域, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f\left[x,y(z,x),z\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

其中 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ 是面积元素

例12.21 计算 $\oiint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S$,
其中 Σ 是 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的四面体的边界曲面

解 $\Sigma = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$, $\Sigma_1: x=0$, $\Sigma_2: y=0$, $\Sigma_3: z=0$, $\Sigma_4: z=1-x-y$

$\Sigma_1: x=0$

$$\oiint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_2: y=0$

$$\oiint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_3: z=0$

$$\oiint_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S = 0$$

$\Sigma_4: z=1-x-y$

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S &= \iint_D \left(xy\cdot(1-x-y)\right)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} xy\cdot(1-x-y)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{\sqrt{3}}{120}\end{aligned}$$

所以

$$\oiint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

例12.22 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量, 此壳的面密度为 $\mu=z$.

解 [3] $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$. $z_x=x$, $z_y=y$. 故 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 因此

$$\begin{aligned} M&=\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\\ &\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

例12.23 设有一分布着质量的曲面 Σ, 在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$, 用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 [4] 设想将 Σ 分成 n 小块, 取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$ (其面积也记作 $\mathrm{d}S$). (x,y,z) 为 $\mathrm{d}S$ 上一点, 则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$\mathrm{d}I_x=(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

例12.24 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解 [5]

$$\begin{aligned} I&=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\,\mathrm{d}S\\ &=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mu_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mu_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标}}\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{a^2-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\\ &\xlongequal{\rho=a\sin t}2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{华里士公式}}\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0\end{aligned}$$

定理 12.19. 泊松 (Poisson) 公式

设函数 $f(x)$ 连续, a,b,c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 求证:

$$I=\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u.$$

♡

证明 法 1(微元法). 1). 由 Σ 的面积为 4π 可见: 当 a,b,c 都为零时, 等式成立.

2). 当他们不全为零时, 可知: 原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是 $\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

[3] [9] P191
[4] [9] P186
[5] [9] P192

$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 其中 u 固定. 则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离, 从而 $-1\leqslant u\leqslant 1$.

两平面 P_u 和 $P_{u+\mathrm{d}u}$ 截单位球 Σ 的截下的部分上, 被积函数取值为 $f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)$.

这部分摊开可以看作一个细长条, 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$, 宽是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 它的面积是 $2\pi\,\mathrm{d}u$, 故我们得证.

法 2[4]. 如果 $a=b=c=0$, 则结论成立. 以下设 a,b,c 不全为零, 则可以坐标旋转 (及翻转) 变换, 使新的坐标系 $Ouvw$ 满足

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

例如, 当 $a\neq 0$ 时, 可以令

$$\begin{cases} u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\\ v=\dfrac{-bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ w=\dfrac{cax+cby-(a^2+b^2)z}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \end{cases}$$

由于上述变换是正交变换, 不改变面积元, 从而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}S\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

例12.25 设函数 $f(z)$ 在圆锥面 $\Sigma=\{(x,y,z)|z=a\sqrt{x^2+y^2},0\leqslant z\leqslant h\}$ 上连续 ($a>0$ 为常数), 证明:

$$\iint_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}S=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)\,\mathrm{d}z$$

解 取 $z=t$ 为被积函数的等值面, 则 $0\leqslant t\leqslant h$. 考虑圆锥面 Σ 夹在平面 $z=t$ 与 $z=t+\mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}t>0$) 之间部分的面积.

曲面 $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ 可视为 xOz 平面上的直线 $z=ax$ ($z\geqslant 0$) 绕 z 轴旋转一周而生成. 由旋转侧面积公式知所考虑的面积为

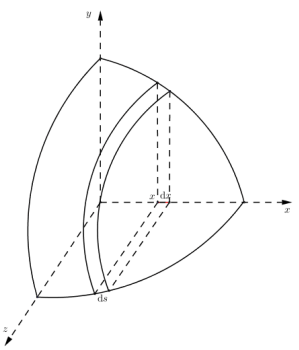
$$2\pi\int_t^{t+\mathrm{d}t}\frac{z}{a}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\left[2t\,\mathrm{d}t+(\mathrm{d}t)^2\right],$$

故面积元素 $\mathrm{d}S(t)=\dfrac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\iint_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}S=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{a^2}\sqrt{1+a^2}\int_0^h zf(z)\,\mathrm{d}z$$

例12.26 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \sin y e^{\sin x\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



解 法 I. (by 向禹) 首先反向利用一型曲面积分公式,

令 $u=\sin x\sin y, v=\sin x\cos y, w=\cos x$, 曲面

$$\Sigma=\{(u,v,w)\big|u,v,w\geqslant 0,u^2+v^2+w^2=1\}$$

为单位球面在第一卦限的部分, 则

$$\iint_D \sin y e^{\sin x\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} e^u\,\mathrm{d}S$$

用微元法求此曲面积分. 考虑到平面 $u=0$ 处距离为 u 的宽度为 $\mathrm{d}u$ 的球面窄条面积, 相当于是底面边长为 $v=\sqrt{1-u^2}$, 宽度为 $\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 因此

$$\iint_{\Sigma} e^u \,\mathrm{d}S=\int_0^1 e^u \frac{\pi}{2}\sqrt{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

注: $\frac{\pi}{2}\sqrt{1-u^2}=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{1-u^2}$ 为弧长.

法 II. 引理: 若 $f(x)\in C[0,1]$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

证明: 令 S 为 $x^2+yz^2+z^=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$. 由对称性显然可得

$$\iint_S f(y)\,\mathrm{d}S=\iint_S f(z)\,\mathrm{d}S.$$

而

$$\iint_S f(y)\,\mathrm{d}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\begin{aligned}\iint_S f(z)\,\mathrm{d}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

利用引理可得

$$\iint_D \sin y e^{\sin x\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

定理 12.20. 奇偶对称性

若 Σ 关于 xOy 面 $(z=0)$ 对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\end{cases}$$

♡

12.6 高斯公式

定理 12.21. 高斯公式, 奥高公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

其中 Σ 取外侧

♡

例12.27 计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3$ 的整个表面的外侧。

解 $P=0, Q=0, R=x+y\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$

由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}V=0$$

例12.28 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧, $\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c\}$

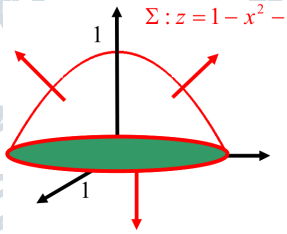
解 $P=x^2,Q=y^2,R=z^2\Longrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)$

由高斯公式

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)\,\mathrm{d}V\\&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^c2(x+y+z)\,\mathrm{d}z\\&=abc(a+b+c)\end{aligned}$$

例12.29 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 $\Sigma:z=1-x^2-y^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧



解 $P=y,Q=x,R=z\Longrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$

添加一圆盘: $\Sigma':z=0\ (D:x^2+y^2\leqslant 1)$ 下侧.

曲面 Σ 与 Σ' 所围的区域 $\Omega:0\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2,x^2+y^2\leqslant 1$

由高斯公式,

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma'}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}1\,\mathrm{d}V=\iint_{D}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$$

容易知道

$$\oiint_{\Sigma'}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

故

$$\oiint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

例12.30 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围成部分的下侧, 记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域, 则

$$\begin{aligned}I=&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&-\iint_{\Sigma_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\qquad(12.1)\\=&6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(z+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

注意: (12.1) 中 x^2+y^2+z 不能用 1 代替。

例12.31 (2014CMC) 设函数 $f(x)$ 连续可导, $P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$, 有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_t}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

解 由高斯公式

$$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iiint_V(2xz+2yz+x^2+y^2)f'\left((x^2+y^2)z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由对称性 $\iiint_V(2xz+2yz)f'\left((x^2+y^2)z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$. 从而

$$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V(x^2+y^2)f'\left((x^2+y^2)z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{I_t}{t^4}&=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z}{t^4}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1 f'(t^2z)t^3\,\mathrm{d}z}{4t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f'(t^2z)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}f'(0)\end{aligned}$$

例12.32 (2009 数学 1) 计算曲面积分 $\oiint_\Sigma\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

其中 Σ 是椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧。

解 易得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

作一个包含在椭球面内的球面: $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$ (取内侧)

利用高斯公式。

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_\Omega 0\,\mathrm{d}V=0$$

其中

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}&=\oiint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\oiint_{\substack{-\Sigma_1\\ \text{外侧}}}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{高斯公式}}-\iiint_{\Omega_1}(1+1+1)\,\mathrm{d}V\\&=-3\cdot\frac{4}{3}\pi=-4\pi\end{aligned}$$

故

$$\oiint_\Sigma\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0-(-4\pi)=4\pi$$

例12.33 (18 数学 1) 求 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
其中 Σ 取曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的正面.

解 (by 向禹) 取 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint_{3y^2+3z^2\leqslant 1}(y^2+z^2)\sqrt{1-3y^2-3z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^2\sqrt{1-3r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}\end{aligned}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{14\pi}{45}$$

例12.34 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

计算

$$I=\iiint_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

解 记球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的单位法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

考虑曲面积分等式

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{12.2}$$

对两边都利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\oiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=2\iiint_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&\quad+\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned}\tag{12.4}$$

将 (12.3)、(12.4) 代入 (12.2) 并整理得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(1-(x^2+y^2+z^2)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

例12.35 (13 年武大数分) 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}dS$, 其中 Σ 为椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0).$$

解 (by 陶哲轩小弟)

令 $x=a\sin\varphi\cos\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi$, 其中 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi$,

经计算得到

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}EG-F^2&=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2\\&=(abc)^2\sin^2\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

而这时被积函数化为

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}&=\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\\&\quad\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此

$$I=abc\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

注意到这么一个事实, 当 $M+Nx^2$ 不取 0 且 $M\neq 0$ 时, 我们有

$$\int\left(M+Nx^2\right)^{-3/2}dx=\frac{1}{M}\cdot\frac{x}{\sqrt{M+Nx^2}}+C.$$

故

$$\begin{aligned}I&=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi\\&=-abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}d(\cos\varphi)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left[\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) + \left(c^2 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right)\cos^2\varphi\right]^{-\frac{3}{2}} d\left(\cos\varphi\right)\\
&= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} \left[\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) + \left(c^2 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right)x^2\right]^{-\frac{3}{2}} dx\\
&= abc\int_0^{2\pi} \frac{2}{\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)c} d\theta = 4ab\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + b^2x^2} d + \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2x^2 + b^2} dx\\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}x\right)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right)\Big|_0^{+\infty}\\
&= \frac{\pi}{ab}.
\end{aligned}
$$

进而得到

$$
I = 4ab\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta = 4\pi.
$$

解 (by Hansschwarzkopf) 注意到 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位外法向量是

$$
n = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},
$$

且 $1 = x\cdot\dfrac{x}{a^2} + y\cdot\dfrac{y}{b^2} + z\cdot\dfrac{z}{c^2}$. 从而原积分可写成第二型曲面积分

$$
\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.
$$

作小球面 $S_\varepsilon : x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$. 运用 Gauss 公式可知

$$
\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \iint_{S_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = 4\pi.
$$

即

$$
\iint_{\Sigma} \frac{dS}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = 4\pi.
$$

12.7 斯托克斯公式[6]

斯托克斯公式是建立沿空间双侧曲面 S 的积分与沿 S 的边界曲线 L 的积分之间的联系

定理 12.22. 斯托克斯公式

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则[a], 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空

[6] $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 有方向. 即 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 不可以写成 $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$, 其它同理

间区域内具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

L 是曲面 Γ 的正向边界曲线

[a]右手法则: 若右手大拇指指向右侧的方向则图指向的方向就是边界 L 的正向. ♡

注意 L 的方向与 Σ 的正向法向量 $\boldsymbol{n}$ 符合右手法则

L 是曲面 Σ 的正向边界曲线

定理 12.23. Stokes 公式的实质

它表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系. ♡

定理 12.24. 斯托克斯公式的行列式形式

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

♡

例12.36 (2017CMC) 设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\quad x+z=1\,,\quad x\geqslant 0\,,\ y\geqslant 0\,,\ z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I=\displaystyle\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$

解 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $\overrightarrow{BA}=(1,0,0)-(0,0,1)=(1,0,-1)$

$$\Gamma_1:B\to A:\begin{cases}x=0+t=t\\ y=0+0t=0\\ z=1+(-1)t=1-t\end{cases}\qquad t:0\to 1$$

$$\int_{\Gamma_1} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ, 方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\ (y\geqslant 0)$$

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\displaystyle\iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\displaystyle\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

这样就有 $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

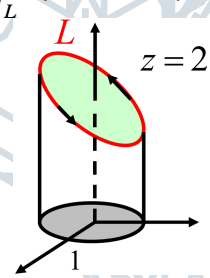
定理 12.25. 斯托克斯公式的行列式形式

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为 Σ 的单位法向量 ♡

例12.37 计算曲线积分 $\int_L -y^2\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+z^2\,\mathrm{d}z$
其中 L 是 $x^2+y^2=1,\ y+z=2$, 从 z 轴正向看去是逆时针方向。

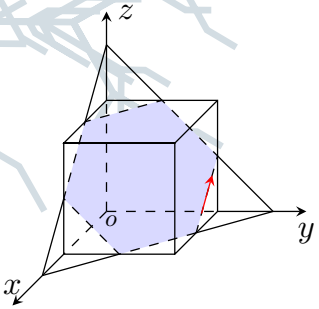
解 利用斯托克斯公式, 取 L 所围的平面为 Σ（上侧）$\Sigma: y+z=2$,
求 Σ 的单位法向量: $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}$



$$\begin{aligned}\int_L -y^2\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+z^2\,\mathrm{d}z&=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y^2 & x & z^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(1+2y)\,\mathrm{d}S\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D(1+2y)\sqrt{1+0^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\iint_D(1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\end{aligned}$$

例12.38 设曲线 L 是空间区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线, 则 $\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|=$ _____.

解 如图所示, 取平面为 Σ 的上侧被 L 所围成的部分. 则

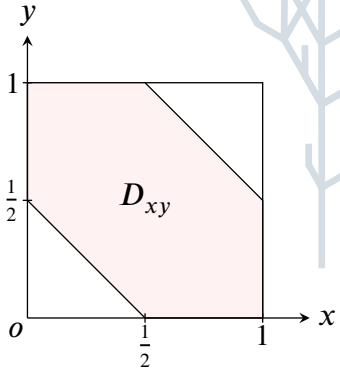


$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$$

即

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

利用 Stokes 公式得



$$\begin{aligned}&\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\\ &=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S\\ &=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)\,\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\frac{3}{2}\,\mathrm{d}S\\ &=-6\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

因此, $\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|=\dfrac{9}{2}$

第 13 章 数项级数

13.1 无穷带来的各种悖论

当时我就震惊了：无穷带来的各种悖论

希尔伯特旅馆悖论 (Hilbert's paradox of Grand Hotel): 希尔伯特旅馆有无限个房间, 并且每个房间都住了客人. 一天来了一个新客人, 旅馆老板说: "虽然我们已经客满, 但你还是能住进来的. 我让 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间搬到 3 号房间 n 号房间搬到 $n+1$ 号房间, 你就可以住进 1 号房间了." 又一天, 来了无限个客人, 老板又说: "不用担心, 大家仍然都能住进来. 我让 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号搬到 4 号, 3 号搬到 6 号 n 号搬到 $2n$ 号, 然后你们排好队, 依次住进奇数号的房间吧."

托里拆利小号 (Torricelli 's Horn): 意大利数学家托里拆利 (Evangelista Torricelli) 将 $y=1/x$ 中 $x \geqslant 1$ 的部分绕着 x 轴旋转了一圈, 得到了上面的小号状图形 (注意, 上图只显示了这个图形的一部分). 然后他算出了这个小号的一个十分有趣的性质——它的表面积无穷大, 可它的体积却是 π. 这明显有悖于人的直觉: 体积有限的物体, 表面积却可以是无限的! 换句话说, 填满整个托里拆利小号只需要有限的油漆, 但把托里拆利小号的表面刷一遍, 却需要无限多的油漆!

"科赫雪花" (Koch Snow flake): 科赫雪花是一种经过无穷多次迭代生成的分形图形, 下图就是前三次迭代的过程, 迭代过程的极限便是科赫雪花了. 它也有一个类似的性质: 它的面积有限, 周长却是无限的. 用无限的周长包围了一块有限的面积, 真是另类的 "无中生有" 啊!

阿基里斯与乌龟的悖论 (Achilles and the tortoise Paradox): 在跑步比赛中, 如果跑得最慢的乌龟一开始领先跑得最快的希腊勇士阿基里斯, 那么乌龟永远也不会被阿基里斯追上. 因为要想追到乌龟, 阿基里斯必须先到达乌龟现在的位置; 而等阿基里斯到了这个位置之后乌龟已经又前进了一段距离. 如此下去, 阿基里斯永远追不上乌龟.

二分法悖论 (Dichotomy Paradox): 运动是不可能的. 你要到达终点, 必须首先到达全程的 1/2 处; 而要到达 1/2 处, 必须要先到 1/4 处 每当你想到达一个点, 总有一个中点需要先到, 因此你是永远也到不了终点的. 其实, 你根本连动都动不了, 运动是不可能的.

定义 13.1. 无穷级数

设 $a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为一实数列, 称形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为无穷级数。 ♣

注意 牛角尖：类似 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-8}$ 发散.

13.2 常数项级数的概念和性质

例13.1 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} - \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=\frac{\pi^2}{6}-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{1}$$
$$=\frac{\pi^2}{6}.$$

例13.2 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ 的和

证明 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

例13.3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$ $(|x|<1)$ 的和函数

解 注意到

$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x^{2^n}+1-1}{(x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^n}+1}$$

因此级数的部分和函数列为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x^{2^k}-1}-\frac{1}{x^{2^k}+1}\right)=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

由于 $|x|<1$, 所以 $\lim_{n\to+\infty}x^{2^{n+1}}=0$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{x^2-1}+1=\frac{x^2}{x^2-1}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x^2}{x^2-1},\ |x|<1$$

例13.4 计算 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$.

解 注意到

$$\frac{ab}{(a-b)(3a-2b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{2b}{3a-2b}$$

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\frac{2^k\cdot 3^k}{(3^k-2^k)(3\cdot 3^k-2\cdot 2^k)}=\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)=2$$

例13.5 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}$

解 注意到

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right)$$

所以

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(m+n)!}=\frac{1}{(m-1)(m-1)!}$$

例13.6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 的和

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right)^2\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}-\frac{2}{(n+1)(n+\frac{1}{2})}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\\&=\frac{2\pi^2}{3}-8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\\&=\frac{2\pi^2}{3}-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=-8\ln 2+\frac{2\pi^2}{3}\end{aligned}$$

例13.7 证明：对任何自然数 p, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+p)}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

解

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+p)}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+p}\right)\\&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k+p-1}-\frac{1}{k+p}\right)\right]\\&=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+p}\right)\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$

例13.8 计算: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}$

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}&=\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}=\frac{[2(n-1)]!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\\&=\frac{1}{2n}\frac{2(n-1)}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}=\left(1-\frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\right)\frac{[2(n-1)]!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\\&=\frac{1}{2^{2(n-1)}}C_{2(n-1)}^{n-1}-\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\right)=1$$

例13.9 求 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的和

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}\right)=-\ln 2\end{aligned}$$

例13.10 (IMC2011[1]) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$ 的和.

解 (by 向禹)[2] 注意到当 $x+y+z=0$ 时, $x^3+y^3+z^3=3xyz$. 这里

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{2n}{2n+1}+\ln\frac{2n+1}{2n+2}=0$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\\=&\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\=&\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right]\\=&\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\=&\frac{1}{3}\ln^3 2\end{aligned}$$

例13.11 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$

解 这里主要利用公式 $\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{n+1-n}{1+(n+1)n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n+1)-\arctan n)\\&=\arctan(n+1)-\arctan 1\quad(n\to\infty)\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

例13.12 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{n-1}{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}}$$

[1] http://www.imc-math.org.uk/imc2011/imc2011-day2-solutions.pdf
[2] IMC 向禹译 P139

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\arctan\frac{n}{n+1} - \arctan\frac{n-1}{n})$$
$$= \lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big(\arctan(2n+1) - \arctan(2n-1)\big)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\arctan(2n+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

注意

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$
$$\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{1}{2n-1} - \arctan\frac{1}{2n+1}$$
$$\arctan\frac{2}{n^2} = \arctan\frac{1}{n-1} - \arctan\frac{1}{n+1}$$
$$\arctan\frac{2n}{n^4+n^2+2} = \arctan(n^2+n+1) - \arctan(n^2-n+1)$$

例13.13 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)} = \ln 3 - \frac{\pi}{4}$.

解 (by MSE)[3] 由 $\arctan(x) = \arg(1+ix)$, 可得

$$1 + \frac{10in}{(3n^2+2)(9n^2-1)} = \frac{(1-\frac{i}{n})(1+\frac{i}{3n-1})(1+\frac{i}{3n+1})(1+\frac{i}{3n})}{1+\frac{2}{3n^2}}$$

于是, 我们有

$$\arctan\left(\frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{1}{3n-1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3n}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{10n}{(3n^2+2)(9n^2-1)}\right)$$
$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[\arctan\left(\frac{1}{3n-1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3n}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3n+1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= -\arctan(1) + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=m+1}^{3m+1}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= -\arctan(1) + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=m+1}^{3m+1}\left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$= \log(3) - \frac{\pi}{4}$$

例13.14 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性:

$$\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{6} + \cdots$$

[3] https://math.stackexchange.com/questions/1487596/a-serie-about-sum-n-1-infty-arctan-frac10n-left-3n2-2-r

证明 由于

$$u_n=\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}$$

从而

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]\\&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\end{aligned}$$

因为当 $n\to\infty$ 时, $\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在, 所以 S_n 的极限不存在, 即级数发散

例13.15 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n)^n$ 的敛散性.

证明 (by 周明强)[4]. 对于 π, 存在 $p_n\in\mathbb{Z}, q_n\in\mathbb{N}$, 使得 $|\pi-p_n/q_n|<1/q_n^2$. 由此知

$$|\cos p_n|=|\cos(q_n\pi-p_n)|>\cos\frac{1}{q_n}=1-2\sin^2\frac{1}{2q_n}>1-\frac{1}{2q_n^2}.$$

从而得

$$|\cos p_n|^{p_n}>\left(1-\frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n}>1-\frac{p_n}{q_n}\frac{1}{2q_n}$$

这说明该级数不满足收敛的必要条件, 即发散

13.2.1 级数不等式

例13.16 (College Mathematics Journal T1119) 设 $0<x<1$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}<\ln\frac{1}{1-x}.$$

解 (by 西西) 当 $x\in(0,1/2)$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n-x^{n+1}}{1-x^2}\\&=\frac{x}{1-x^2}<\ln\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

当 $x\in[1/2,1)$ 时,

① $n=2k$, 有

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\frac{x^{2k}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2k}}\\&\leqslant\frac{x^{2k}}{(2k+1)x^k}=\frac{x^k}{2k+1}\end{aligned}$$

② $n=2k-1, k\neq1$, 有

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}&=\frac{x^{2k-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2k-1}}\\&=\frac{x^k}{\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k-2}}+\cdots+x^{k-1}+x^k}\\&\leqslant\frac{x^k}{\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k-2}}+\cdots+x^{k-1}+\frac{3}{2}x^k}\leqslant\frac{x^k}{2k-3+\sqrt{6}},\quad k\neq1\end{aligned}$$

[4]周明强《数学分析习题演练》第二册 P172

$n=1$, 注意到 $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \dfrac{x}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}x$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n} &\leqslant \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-3}\right)\\ &< x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-\frac{k}{k+1}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = \ln\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例13.17 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

证明 由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\cdot\sum_{i=1}^{k}a_i \geqslant \frac{k^2(k+1)^2}{4} \Longrightarrow \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}$$

那么有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right) < 2\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right] < 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\cdot\frac{1}{i^2}$$

其中用到

$$\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{i^2}$$

推广 (by 西西): $\forall\, a_i > 0\,(i=1,2,\cdots,n), n \geqslant 3$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \leqslant \left(2-\frac{7\ln 2}{8\ln n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

例13.18 (Carleman 不等式). 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

其中, e 为最佳常数, 上述不等式等号成立当且仅当所有数为 0.

解 (by 西西) 由不等式 $\left((n+1)/e\right)^n < n!$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt[n]{(a_1)(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n\sqrt[n]{n!}} \leqslant e\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}\\ &= e\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{n(n+1)} = e\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{ka_k}{n(n+1)}\\ &= e\sum_{k=1}^{N}ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right) \leqslant e\sum_{k=1}^{N}a_k\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

对每个 N 构造数列

$$a_n=\begin{cases}1/n, & 1\leqslant n\leqslant N\\ 0, & n>N\end{cases}$$

由 Stolz 定理得

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N}a_n}=\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{\sqrt[N]{N!}}=e$$

这表明不等式右边的系数 e 不能再改进.

例13.19 (CMC, 2018) 已知 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是正数数列, 且 $b_{k+1}-b_k\geqslant\delta, k=1,2,\cdots,\delta$ 为一常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛..

解 法 I. 令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i, a_kb_k=S_k-S_{k-1}, S_0=0, a_k=\dfrac{S_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2,\cdots.$ (4 分)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}a_k&=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}\\&=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\geqslant\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛, 由算术–几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\leqslant\frac{a_1b_1+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{S_k}{b_kb_{k+1}}$, 故结论成立.

法 II(by 向禹). 注意到 $b_{k+1}>k\delta$, 于是

$$\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}<\frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}{b_{k+1}}<\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}{\delta}$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 由 Carleman 不等式知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$ 收敛, 证毕.

13.3 常数项级数的审敛法

13.3.1 正项级数及其审敛法

定理 13.1. 基本判别法

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow\{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow\{S_n\}$ 有上界.

♡

例13.20 (17 江西省赛) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}$ 也收敛

证明 (by 西西) 定义

$$I=\left\{n:(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}\leqslant e^2a_n\right\};,\quad J=\left\{n:(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}>e^2a_n\right\}$$

若 $n\in J$, 则有

$$(a_n)^{\ln n}>(en)^2(a_n)^{1+\ln n}\Longrightarrow a_n<(en)^{-2}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{\frac{\ln n}{1+\ln n}}\leqslant\sum_{n\in Ix}e^2a_n+\sum_{n\in J}(en)^{-2}\leqslant e^2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+e^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-2}<+\infty$$

注意 一般的, 设 $a_n>0,\varphi(n)>0,\varphi(n)=O\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^{1-\varphi(n)}$ 也是收敛的.

例13.21 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 都有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_n$ 是有界的。证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

证明 (by 欧阳) 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ $(n\geqslant 1)$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (记 $S_0=0$)

$\exists M>0,|(1-n)S_n-S_{n-1}|\leqslant M$, 所以

$$|(n-2)!S_{n-1}-(n-1)!S_n|\leqslant M(n-2)!$$

$$-M\sum_{k=2}^{n}(k-2)!\leqslant\sum_{k=2}^{n}\left[(k-2)!S_{k-1}-(k-1)!S_k\right]\leqslant M\sum_{k=2}^{n}(k-2)!$$

即

$$-M\sum_{k=0}^{n-2}k!\leqslant S_1-(n-1)!S_n\leqslant M\sum_{k=0}^{n-2}k!$$

所以

$$\frac{S_1}{(n-1)!}-M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}\leqslant S_n\leqslant\frac{S_1}{(n-1)!}+M\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-2}k!}{(n-1)!}<\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-1)!}=1$$

所以 $S_n\leqslant S_1+M$. S_n 单调递增有上界, 故极限存在。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

例13.22 设数列 $\{a_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛。证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛

解 由题意可设 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=B$。$A$，$B$ 均为有限数。

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛知

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n+1})=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[na_n-n(a_n-a_{n+1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} na_n - \lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = A - 0 = A$$

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) + na_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1} \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1}) + \lim_{n\to\infty} na_{n+1} = B + A$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

例13.23 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

(1) 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 当 $p \leqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

证明 (1) 由题设 S_n 单调上升, 则当 $p > 1$ 时

$$\frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{(1-p)(S_n - S_{n-1})} = \frac{1}{(\xi_n)^p} > \frac{1}{S_n^p}, \quad \exists \xi_n \in (S_{n-1}, S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \leqslant \frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{1-p}$$

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n^p} \leqslant \sum_{n=2}^{m} \frac{(S_n)^{1-p} - (S_{n-1})^{1-p}}{1-p} = \frac{(S_m)^{1-p} - (S_1)^{1-p}}{1-p}$$

从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(2) 用反证法. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$.

从而 $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = 0$.

$$\frac{\ln S_n - \ln S_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{1}{\xi_n} \sim \frac{1}{S_n}, \quad \exists \xi_n \in (S_{n-1}, S_n)$$

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \sim \ln S_n - \ln S_{n-1}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln S_n - \ln S_{n-1})$ 收敛, 但是由于该级数的部分和序列无界, 矛盾.

因此, 当 $p \leqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

例13.24 设 $a_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

设 $a_1>1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 的敛散性

解 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_k\ln S_k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_k\ln S_k}\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{S_k}^{S_{k+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=+\infty\end{aligned}$$

因为我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k\ln^2 S_k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k\ln^2 S_k}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{S_{k-1}}^{S_k}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}<+\infty\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 收敛.

例13.25 设 $a_n>0\,(n\in\mathbb{N}^+)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 且记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ 收敛.

解 取 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $\beta\triangleq\dfrac{1}{m}<\alpha$. 从而易知只需指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}}$ 收敛. 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\beta}}-\frac{1}{S_n^{\beta}}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{S_1^{\beta}}-\frac{1}{S_N^{\beta}}\right)=\frac{1}{S_1^{\beta}}.$$

所以只需指出

$$\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\beta}}-\frac{1}{S_n^{\beta}}\right),\quad 1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\leqslant\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{S_{n-1}^{\beta}}{S_n^{\beta}}\right).\tag{13.1}$$

为此, 令 $\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\beta}=x$, 则 $\dfrac{S_{n-1}}{S_n}=x^m$, 从而式 (13.1) 化为

$$1-x^m\leqslant m(1-x)\quad(1<x\leqslant 1).$$

注意到 $1-x^m=(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})$, 式 (13.1) 成立.

例13.26 如果两个通项单调递减的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散, 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 是否可能收敛?

解 (by 向禹) 答案是肯定的, 下面给出一个例子 (by 逆逆)

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{2^{2^k}},b_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}},2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1,k=2m\\a_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}},b_n=\dfrac{1}{2^{2^k}},2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1,k=2m-1\end{cases}$$

那么 $n\geqslant 2$ 时上式都有意义, 且显然

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}}-2^{2^{2m-1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right)=\infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}}-2^{2^{2m-2}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right)=\infty$$

因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ 都发散，但 $\min\{a_n, b_n\} = \dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1$，因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2k+1}}}\left(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2k+1}}} 2^{2^k} = \frac{1}{2^{2^k}} < \infty$$

比较判别法

定理 13.2. 比较审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

♡

例13.27 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 的敛散性

证明 因为

$$\frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln 3}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

而 $\ln 3 > 1$, 故该级数收敛

例13.28 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性

证明 因为

$$\frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln(\ln \ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln \ln n)}} < \frac{1}{n^2} \quad (n > e^{e^{e^2}})$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛

例13.29 设 $a_n < b_n < c_n$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛

解 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛. 又因

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n,$$

所以由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛

例13.30 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项发散级数. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ 的敛散性.

证明 [6] 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故数列 $\{a_n\}$ 可能有界也可能无界.

(1) 当 $\{a_n\}$ 有界时, 即 $\exists M > 0, \forall n, 0 \leqslant a_n \leqslant M$. 此时

$$\frac{a_n}{1 + a_n} \geqslant \frac{1}{1 + M} a_n$$

由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ 发散

(2) 当 $\{a_n\}$ 无界时, 必有子列 $a_{n_k} \to +\infty\ (k \to +\infty)$, 此时

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n_k}}+1} \to 1 \neq 0\ (k \to +\infty)$$

于是由级数收敛的必要条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 发散

例13.31 如果 $a_n > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 证明: 当 $p > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛

证明 (1) 若 $p \geqslant 1$ 时, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

由数列极限的有界性可得: 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n < 1$, 则 $a_n^p < a_n$

则此时 $\dfrac{a_k^p}{k} < a_k^p < a_n$, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 由比较判别法可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛

(2) 若 $p \geqslant 1$ 时, 由加权不等式可得

$$\frac{a_k^p}{k} = a_k^p \cdot \frac{1}{k} = a_k^p \left(\frac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}\right)^{1-p} \leqslant pa_k + (1-p)\frac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\frac{1}{1-p}}}$ 收敛 $\left(1 < 1-p < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1-p} > 1\right)$

所以由比较判别法可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^p}{k}$ 收敛

例13.32 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}}\right)$ 也是收敛的

证明 因为

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1 = (n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = (n^2+5n+5)^2$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}}{\sqrt[n]{(a_n)^{n^5+5n^2+1}}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{n^2+5n+5}}{a_n^{n^2+5n+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{5-\frac{1}{n}}$$

注意到

$$a_n^{\frac{5n-1}{n}} = \left(\left(a_n^{5n-2} a_n^{\frac{1}{2}} \cdot a_n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5n}}\right)^5 \leqslant \left(\frac{(5n-2)a_n + 2\sqrt{a_n}}{5n}\right)^5$$

且

$$\frac{5n-2}{5n}a_n \leqslant a_n\ ,\ \frac{2\sqrt{a_n}}{5n} \leqslant \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

由比较判别法以及

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{5-\frac{1}{n}}$ 收敛, 故原级数收敛

例13.33 设 $a_n > 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

证明 (by ytdwdw)方法 1 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to +\infty$.

于是a_n 可由从小到大进行重排, 设 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant \cdots$. 而

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{(n+2)A_n} \leqslant \frac{2}{A_n}$$

$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}} \leqslant \frac{2n}{A_1+A_2+\cdots+A_{2n}} \leqslant \frac{2n}{(n+1)A_n} \leqslant \frac{2}{A_n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{A_n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$$

方法 2 事实上可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ 收敛. 而

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

记 $b_n = \frac{1}{a_n}$. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n} kb_k}{n!}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{kb_k}{n\sqrt[n]{n!}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{kb_k}{n\sqrt[n]{n!}}$$

而由 Stirling 公式,

$$\sqrt{n!} = \left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+o(1))\right]^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n}{e}, \quad n \to +\infty$$

所以有常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n\sqrt[n]{n!}} \leqslant C\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n^2} \leqslant 2C$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} \leqslant 2C\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$$

注意 因为利用 $\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} \leqslant \frac{b_1+\cdots+b_n}{n}$ 来证明行不通, 所以尝试用

$$\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n} = \frac{\sqrt[n]{b_1\cdot 2b_2\cdots nb_n}}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{b_1+2b_2\cdots+nb_n}{n\sqrt[n]{n!}}$$

定理 13.3. 比较审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 若 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $u_n \leqslant v_n$, 则

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

♡

例13.34 设 $a_n > 0, b_n > 0$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) > 0.$$

证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在.

解 (by 楚坛) 由题设知, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) > \lambda$. 由极限保号性知, 存在

$N\in\mathbb{N}$, 使对 $n\geqslant N$, 都有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\lambda\Leftrightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\lambda a_{n+1}\Longrightarrow\frac{a_n}{b_n}>\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\tag{13.2}$$

上式表明 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geqslant N}$ 为单调递减数列, 注意到它以 0 为下界, 故收敛, 即正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收敛. (13.2)式表明, 对 $\forall n\geqslant N$,

$$a_{n+1}<\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

由比较判别法即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛: 换言之极限, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

定理 13.4. 比较审敛法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数,

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0\leqslant l<+\infty)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛
2. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 ♡

✍ **练习 13.1** 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$

1. 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性

解 (1) 利用不等式: 当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0$$

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right]\\&\geqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right]=\frac{1}{n}>0\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

(2) 显然, 以 a_n 为部分和的级数为 $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)\right)$, 则该级数收敛于 C, 且 $a_n-C>0$, 用 r_n 记作该级数的余项, 则

$$a_n-C=-r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式, 当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$$

记 $b_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{2(k-1)^2}-\dfrac{1}{k}\right)$, 下面证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。因为

$$\begin{aligned}c_n &\triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)\\ &< nb_n < n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-2)}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

而当 $n\to\infty$ 时, $c_n=\dfrac{n-2}{2(n-1)}\to\dfrac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=\dfrac{1}{2}$.

根据比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

因此, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 发散。

Cauchy 积分审敛法[5]

定理 13.5. Cauchy 积分审敛法

设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty]$ 上的非负单调减的连续函数, 其中 $a\geqslant 0$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a+n)$ 与广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散 ♡

例13.35 (美国,2012) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant \mathrm{e},\\ xf(\log x), & x>\mathrm{e},\end{cases}$$

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/f(n)$ 的敛散性.

解 令 $\mathrm{e}_1=\mathrm{e},\mathrm{e}_k=\mathrm{e}^{\mathrm{e}_{k-1}}(k\geqslant 2)$. 由数学归纳法得

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant \mathrm{e}_1\\ x\log x, & \mathrm{e}_1<x\leqslant \mathrm{e}_2\\ x\log x\log(\log x), & \mathrm{e}_2<x\leqslant \mathrm{e}_3\\ \cdots & \\ x\log x\log(\log x)\cdots\log^{(k)}x, & \mathrm{e}_k<x\leqslant \mathrm{e}_{k+1}\end{cases}$$

其中 $\log^{(k)}(x)$ 表示 $\log x$ 的 k 重复合. 记 $N_1=[\mathrm{e}_1]=2,N_2=[\mathrm{e}_2],\cdots,N_k=[\mathrm{e}_k]$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N_k}\frac{1}{f(n)} &\geqslant \int_1^{\mathrm{e}_k}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\\ &=\int_1^{\mathrm{e}_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\mathrm{e}_1}^{\mathrm{e}_2}\frac{\mathrm{d}x}{x\log x}+\cdots+\int_{\mathrm{e}_{k-1}}^{\mathrm{e}_k}\frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log(\log x)\cdots\log^{(k-1)}x}\\ &=\log x\Big|_1^{\mathrm{e}_1}+\log(\log x)\Big|_{\mathrm{e}_1}^{\mathrm{e}_2}+\cdots+\log^{(k)}x\Big|_{\mathrm{e}_{k-1}}^{\mathrm{e}_k}\\ &=(1-0)+(1-0)+\cdots+(1-0)=k\end{aligned}$$

因此级数发散.

[5]英国数学家马克劳林（C. Maclaurin, 1669～1746）

其它判别法

定理 13.6. Kummer 判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 当 n 充分大时

(1) $b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant \delta > 0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(2) $b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ 发散 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 ♡

证明 (1) 充分性. 不妨设 $b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant \delta > 0$ 对于 $n \geqslant 1$ 成立. 将它改写为

$$0 < \delta a_{n+1} \leqslant b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1}$$

可见正数数列 $\{b_n a_n\}$ 单调减少, 因此有估计

$$\sum_{n=1}^{n} a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} \leqslant a_1 + \frac{1}{\delta} \cdot b_1 a_1$$

从而知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

必要性. 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时记其余项为 $R_n, n \geqslant 1$. 令 $b_n = \dfrac{R_n}{a_n}$, 则就有

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{R_n - R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

因此取 $\delta = 1$ 即可.

(2) 充分性. 由 $b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0$ 可知

$$a_n b_n \leqslant a_{n+1} b_{n+1}$$

即 $\{a_n b_n\}$ 关于 n 单调递增, 从而 $a_n \geqslant \dfrac{a_1 b_1}{b_n}$, 因此由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ 发散, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

必要性. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 取 $b_n = \dfrac{S_n}{a_n}$, 其中 S_n 为级数的第 n 个部分和. 则

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0.$$

从 $\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{a_n}{S_n}$, 和 Sapagof 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ 发散.

13.3.2 任意项级数的审敛法

13.3.2.1 柯西审敛原理

定理 13.7. 柯西审敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为：对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对于任意的正整数 p 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

成立 ♡

例13.36 证明：级数 $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ 发散于 $+\infty$

证明 考察

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) > \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{n} \end{aligned}$$

显然 $S_{3n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. 对 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $m = 3n + i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$. 由级数的通项趋于 0, 故当 m, 适当大时, 有

$$S_m > S_{3n} - 1$$

从而 $S_m \to +\infty$ $(m \to \infty)$

例13.37 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \right)$ 的敛散性

证明 当 n 是 3 的倍数时, 如果取 $p = 3n$, 则必有

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \frac{1}{n+4} + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right| \\ &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} > \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, 不论 N 为任何正整数, 当 $n > N$ 并 n 是 3 的倍数, 且当 $p = 3n$ 时, 就有

$$|S_{n+p} - S_n| > \varepsilon_0$$

根据柯西审敛原理知, 级数发散

例13.38 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 设 n_0 是某一自然数, 若当 $n > n_0$ 时, 有

$$x_n < x_{n+1}, \quad x_n < \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1}), \quad y_{n+1} \leqslant y_n.$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$$

解 (by 向禹) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 且 $y_{n+1} \leqslant y_n$. 由 Cauchy 收敛准则知对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大

时,

$$ny_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} y_k < \varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} ny_n = 0$. 由题意有当 $n > n_0$ 时, 正项数列 $\{x_{n+1} - x_n\}$ 单调递增, 不妨设从第一项开始递增. 于是 $x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1} > \cdots > x_2 - x_1$, 那么

$$(n-1)(x_{n+1} - x_n) > \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = x_n - x_1.$$

于是 $x_{n+1} - x_n > \dfrac{x_n - x_1}{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$

例13.39 若 $a_n > 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 发散, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

证明 (1) 利用柯西收敛准则

取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}^+$(固定), 取 $n' = N + 1 > N$. 于是有 $\{S_n\} \uparrow$ 趋向于 $+\infty$, 所以对固定的 N, 存在 $p' > N$ 适当大, 可使 $\dfrac{S_{n+1}}{S_{N+1+p'}} < \dfrac{1}{2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n'+1}}{S_{n'+1}} + \frac{a_{n'+2}}{S_{n'+2}} + \cdots + \frac{a_{n'+p'}}{S_{n'+p'}} &\geqslant \frac{S_{n'+p'} - S_{n'}}{S_{n'+p'}} = 1 - \frac{S_{n'}}{S_{n'+p'}} \\ &= 1 - \frac{S_{N+1}}{S_{N+1+p'}} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散

(2) 因为 $S_n \leqslant S_{n+1}$, 所以

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{S_n} - \dfrac{1}{S_{n+1}}\right)$ 收敛于 $\dfrac{1}{a_1}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

例13.40 已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k+1)$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 发散

证明 根据柯西 (Cauchy) 收敛准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{a_{2^n}}$ 收敛. 但是,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1) = \ln\big((n+1)!\big)$$

且当 n 足够大时, 有不等式

$$\ln\big((n+1)!\big) \leqslant \ln(n^n) = n \ln n$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a_{2^n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln\big((2^n+1)!\big)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln\big(2^n\big)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\big(2^n\big)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

故原级数发散.

例13.41 (Pringshcim) 设 a_n 是递减正数列, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

证明 对 $\forall \varepsilon>0$, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, s.t. 当 $n>n_0$ 时, 有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{4}, \quad a_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

对于 $\forall p \in N$ 成立. 因为 $\{a_n\}$ 单调减, 故

$$pa_{n+p}<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{4}$$

特别取 $p=n$ 就得

$$na_{2n}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$2na_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

$$(2n+1)a_{2n+1}<(2n+1)a_{2n}=2na_{2n}+a_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即当 $n>n_0$ 时, 成立

$$na_n<\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}na_n=0, \quad \text{即} \quad a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

练习 13.2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 的敛散性

证明 对任意正整数 k,

$$\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}=\sum_{e^{4k}<n<e^{4k+\frac{1}{2}}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}>\frac{e^{4k+\frac{1}{2}}-e^{4k}-1}{\sqrt{2}e^{4k+\frac{1}{2}}}$$

从而

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{2k\pi<\frac{\pi}{2}\ln n<2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}\geqslant\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{2e}}$$

根据 Cauchy 收敛准则, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 发散

证明 取

$$m=\left[e^{4N}+1\right], n=\left[e^{4N+1}\right]$$

那么当 $x\in[m,n]$ 时, 函数 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}$ 递减, 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k}&\geq\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_m^n\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\log x\right)\Big|_m^n\end{aligned}\tag{13.3}$$

注意到

$$\log n>\log\left(e^{4N+1}-1\right), \log m<\log\left(e^{4N}+1\right)$$

带入 (13.3) 式得

$$\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\log k\right)}{k}\geq\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N+1}-1\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(e^{4N}+1\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\log\left(1-\frac{1}{e^{4N+1}}\right)\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{1}{e^{4N}}\right)\right)\right]$$
$$\to \frac{2}{\pi}, (N\to\infty)$$

由 Cauchy 收敛原理可得原级数发散.

13.3.2.2 莱布尼茨判别法

例13.42 应用莱布尼茨判别法证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证明 (徐森林 543) 将级数按照相同符号归组, 不改变先后顺序得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} &= -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\cdots-\frac{1}{15}\\ &\quad+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\cdots\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\right)\end{aligned}$$

级数变为交错级数, 其中 $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}>0$ 中有 $2n+1$ 项, 且

$$0<a_n<\frac{2n+1}{n^2}<\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}\to 0$$

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1} &= \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\\ &\quad-\frac{1}{(n+1)^2+2n}-\left[\frac{1}{(n+1)^2+2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)}\right]\\ &=(2n+1)\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}\right]\\ &\quad-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}\\ &>\frac{(2n+1)^2}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}-\frac{2}{n^2+4n+1}=\frac{2n^2+1}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}>0\end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ 单调减趋向于 0. 由 Leibniz 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛

证明 (谢惠明 p25) 将级数中相邻的同号项合并，从而组成一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2+1}\\ &=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]\\ &=\frac{1}{n^2}\left[(2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量，且至少当 n 充分大时单调减少

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

表明原级数加括号后得到的级数收敛。由于括号中的项符号相同，所以可推知原级数收敛

练习 13.3 [6] 设 $\alpha > 0, m$ 为正整数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha + \frac{1}{m} > 1$ 时收敛；当 $\alpha + \frac{1}{m} \leqslant 1$ 时发散。

例13.43 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{[n]}}$ 的敛散性，其中 $[x]$ 表示 x 的取整.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{[n]}} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n} - (-1)^{[\sqrt{n}]}\right)}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1}\end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法知，级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}$ 收敛. 当 $k \leqslant \sqrt{n} \leqslant k+1$，即 $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2$ 时，$[\sqrt{n}] = k$，则

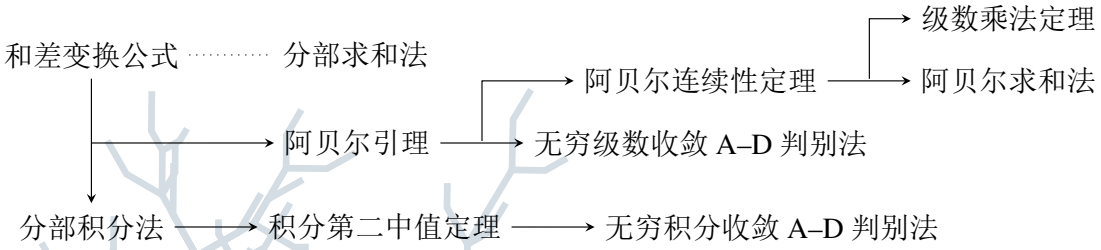
$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1} &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{(-1)^{n+k}}{n-1} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{(-1)^n}{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} (-1)^{k^2} \left[\left(\frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-1}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+2} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-1}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+2} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-2}\right)\right] \\ &\leqslant -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k^2-1} - \frac{k}{k^2+2k-2}\right) \\ &\leqslant -\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}a_n &= \left(\frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-1}\right) - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+2} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k-2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k^2-1} - \frac{1}{k^2}\right) + \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+2}\right) + \\ &\quad \cdots + \left(\frac{1}{k^2+2k-3} - \frac{1}{k^2+2k-2}\right) + \frac{1}{k^2+2k-1} \\ &\geqslant \frac{1}{k^2+2k-1} > 0\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n-1}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{[n]}}$ 亦收敛.

13.3.2.3 A-D 判别法



定理 13.8. 和差变换公式

设 $m<n$. 则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$$

♡

证明 直接计算即可。

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k&=\sum_{k=m}^{n}A_kb_k-\sum_{k=m}^{n}A_{k-1}b_k\\&=\sum_{k=m}^{n}A_kb_k-\sum_{m-1}^{n-1}A_kb_{k+1}\\&=(A_nb_n-A_{m-1}b_m)+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})\end{aligned}$$

例13.44 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\{d_n\}$ 单调地趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty}d_na_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}d_nA_n=0$.

证明 不妨设 $d_n>0$, $d_n\downarrow 0$. 对任意正整数 n, p,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}d_ka_k&=\sum_{k=n+1}^{n+p}d_k(A_k-A_{k-1})\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+2}^{n+p}d_kA_{k-1}\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_kA_k-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}d_{k+1}A_k\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_k\\&\geq d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(d_k-d_{k+1})A_{n+1}\\&=d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+1}A_n+(d_{n+1}-d_{n+p})A_{n+1}\\&\geq d_{n+p}A_{n+p}-d_{n+p}A_{n+1}.\end{aligned}$$

对任何固定的 n, 有 $\lim_{p\to\infty}d_{n+p}A_{n+1}=0$. 在上式中令 $p\to\infty$, 得到

$$\limsup_{m\to\infty}d_mA_m\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}d_ka_k.$$

令 $n\to\infty$, 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ 收敛, 得到 $\limsup\limits_{m\to\infty} d_m A_m \leqslant 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n A_n = 0$.

例13.45 (中科院,2016) 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足以下条件:

(a) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(b) 存在正数 M, 对任意的正整数 n, 均有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

解 记 $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, 由 Abel 变换有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i\right| &\xlongequal{\text{Abel 变换}} \left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n - a_{m+1}B_m\right| \\ &\leqslant M\sum_{i=m+1}^{n-1}|a_i - a_{i+1}| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M\left|\sum_{i=m+1}^{n-1} a_i - a_{i+1}\right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\ &\leqslant 2M(|a_n| + |a_{m+1}|) \leqslant 4M|a_{m+1}| \to 0|\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例13.46 若序列 $\{na_n\}$ 单调, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

解 (by 西西) 法 I. 若序列 $\{na_n\}$ 单调递增, 则

$$na_n \geqslant a_1 \Rightarrow a_n \geqslant \frac{a_1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾, 故 $\{na_n\}$ 单调递减.

由 Cauchy 收敛准则知对 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^+$, s.t. 当 $n>M>N$ 时 $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$

取 $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$, 当 n 充分大时, 则有

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \sum_{k=m}^{n-1} ka_k\cdot\frac{1}{k} \geqslant na_n\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k} \\ &\geqslant na_n\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = na_n\int_m^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x > na_n\ln\frac{n}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

由 ε 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n\ln n = 0$.

法 II. **引理** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, b_n 递减于, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_n = 0$

显然

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_n\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_n\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n}(a_k b_k)\frac{b_n}{b_k}\right|\end{aligned}$$

再利用 Abel 变换即可. 引理证毕.

依题意易知 na_n 递减趋于 0, 从而由引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot na_n=0$$

再由

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$$

即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n\ln n=0$.

定理 13.9. Abel 变换, 分部求和法

记 $S_k=a_1+\cdots+a_k,(k=1,2,\cdots)$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n$$

♡

证明 设 $S_0=0$, 则 $a_k=S_k-S_{k-1},k=1,2,\cdots$. 于是,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n}S_kb_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_{k+1}+S_nb_n=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n.\end{aligned}$$

例13.47 设 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\to s(n\to\infty)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=sb_1+(s_n-s)b_n-\sum_{k=1}^{n-1}(s_k-s)(b_{k+1}-b_k)$$

证明 由分布求和知

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n-\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_{k+1}-b_k)$$

而

$$s(b_n-b_1)=s\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$$

两式相减即得结论。

例13.48 (CMC,2019) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$$

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$ 收敛, 所以对任意给定 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N_1, 使得当 $n>N_1$ 时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_1}^{\infty}a_ku_k<\frac{\varepsilon}{2}\tag{13.4}$$

因为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列, 所以

$$0<\frac{1}{u_{N_1}}\leqslant\frac{1}{u_{N_1+1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{u_n}\tag{13.5}$$

注意到当 $m<n$ 时, 有

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k,$$

令 $A_0=0, A_k=\sum_{i=1}^{k}a_i\ (k=1,2,\cdots,n)$, 得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k$$

下面证明: 对任意自然数 n, 如果 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0,\quad m\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant M$$

则有

$$b_1m\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=b_1M$$

事实上, $m\leqslant A_k\leqslant M, b_k-b_{k+1}\geqslant 0$, 即得到

$$mb_1=mb_n+\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})m\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant Mb_n+\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})M=Mb_1$$

利用 (13.5), 令 $b_1=\dfrac{1}{u_n}, b_2=\dfrac{1}{u_{n-1}},\cdots$, 可以得到 $-\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}<\sum_{k=N_1}^{n}a_k<\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}$, 即

$$\left|\sum_{k=N_1}^{n}a_ku_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 知, 存在自然数 N_2, 使得 $n>N_2$

$$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1})u_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0$.

定理 13.10. 阿贝尔引理

若对一切 $n=1,2,3,\cdots$ 而言 $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0, m\leq a_1+a_2+\cdot+a_n\leq M$ 则有

$$b_1m\geq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leq b_1M$$ ♡

证明 设 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,(k=1,2,\cdots,n)$. 由于 $b_k\geq 0, b_k-b_{k+1}\geq 0$ 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})\leq b_nM+M\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=b_1M$$

左边不等式证明类似

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})\geq b_nm+m\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=b_1m$$

定理 13.11. Dirichlet 判别法

设

1. $\{b_n\}$ 单调趋于 0
2. $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $|S_k| \leqslant M, k = 1, 2, \cdots$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛 ♡

例13.49 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ 的敛散性

证明 因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n$ 是部分和有界的.

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ 收敛

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \geqslant \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{\cos(2n)}{2n} + \frac{1}{2n}$$

易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\cos n}{n}\right|$ 发散. 综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ 条件收敛

例13.50 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{n}$ 的敛散性

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n} \sin n \sin n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\cos(k(k-1)) - \cos(k(k+1))\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(n(n+1))\right]$$

故部分和 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin n \sin n^2\right| \leqslant 2$, 且 $\{\frac{1}{n}\}$ 是单调收敛于 0 的数列

根据 Dirichlet 判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{n}$ 收敛

例13.51 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(\sqrt{n})}{n}$ 的敛散性

解 注意到, 当 $\sin^2(\sqrt{n}) \geqslant \dfrac{1}{4}$ 时, 即当 $|\sin\sqrt{n}| \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 有

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi \Longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)^2 \leqslant n \leqslant \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right)^2$$

对固定的 k

$$\left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4\pi^2}{3}k > 6 + 13k$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\sqrt{n})}{n} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 + 13k}{4} \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right)^2}$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(\sqrt{n})}{n}$ 发散.

定理 13.12. Abel 判别法

设

1. $\{b_n\}$ 单调有界
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛 ♡

13.4 条件收敛与绝对收敛

例13.52 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛

证明 由泰勒公式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + o(x)$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

它是三个收敛级数的和, 从而该级数收敛.

又因 $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, 则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|$ 发散. 因此原级数条件收敛

证明 因 $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right| \sim \dfrac{1}{n}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散,

由比较判别法的极限形式知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right|$ 发散.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

前 $2n$ 项和 S_{2n}

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1+(-1)^{2n+1}}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\end{aligned}$$

且

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < S_{2n} \quad S_{2n} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调下降而且有下界, 从而 $\{S_{2n}\}$ 有极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在, 并记为 S.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right) = S$$

从而 $\{S_n\}$ 极限存在, 且为 S, 因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 收敛.

综上知, 原级数条件收敛

例13.53 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $f(0)=1$，$f''(0)=2$，试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛

解 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(-x)=-f'(x)$,

取 $x=0$, 得 $f'(0)=0$, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=1+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1),$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$, 得

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}$$

由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f''\left(\dfrac{\theta}{n}\right)=f''(0)=2$,

于是 $\forall\varepsilon>0$, 不妨取 $\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)-2\right|<\varepsilon=1\Longrightarrow\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|<3$$

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\frac{1}{n^2}<\frac{3}{2n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故由比较判别法得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛,

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 亦绝对收敛

例13.54 设 $a_n=\int_n^{n+1}\dfrac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$. 其中 p 为正的常数.

证明: 当 $p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

证明

$$\begin{aligned}|a_n|&=\left|\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x\right|=\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\left|\frac{1}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{6}}^{n+\frac{5}{6}}\frac{1}{(n+1)^p}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3(n+1)^p}\geqslant\frac{1}{3(n+1)}\end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散

由于 $\sin(\pi x)=(-1)^n\sin\pi(x-n)$ 在 $(n,n+1)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变.

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数.

$$|a_n|=\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\frac{\sin\pi(x+n)}{(x+n)^p+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x$$

因此

$$|a_{n+1}|=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n+1)^p+1}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\sin\pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x=|a_n|$$

由于 $|a_n|=\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{(x+n)^p+1}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^p}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

由莱布尼茨判别法, 当 $p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

例13.55 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性

证明 由于

$$\begin{aligned}|a_n|&=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\\&>\int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x>\int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi}\frac{\frac{1}{2}}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\int_{(n+\frac{1}{6})\pi}^{(n+\frac{5}{6})\pi}\frac{1}{(n+1)\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3(n+1)}\end{aligned}$$

因此, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 发散

$$|a_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\xlongequal{t=x-n\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t$$

由于 $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上的符号, 当 $n=1,2,\cdots$ 时交错改变.

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是交错级数.

$$|a_{n+1}|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(n+1)\pi}\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t=|a_n|$$

且 $|a_n|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t<\frac{1}{n\pi}\to 0,(n\to\infty)$ 由莱布尼茨判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛

综上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛

定理 13.13. 条件收敛级数的特性, Riemann

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则适当交换各项的次序可使其收敛到任一事先指定的实数; 也可以使其发散 (发散到 $+\infty$, 或发散到 $-\infty$, 或部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 无极限).

例13.56 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{j!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{i}{j!}}$

解 (by 西西)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{j!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\frac{i}{j!}}\xlongequal{\text{换序}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum\limits_{i=0}^{j-1}1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum\limits_{i=0}^{j-1}i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j(j-1)}{2j!}} = \frac{e}{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-2)!}} = 2$$

例13.57 求级数: $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\sum\limits_{j=i+1}^{\infty} \frac{C_i^k}{j!}$

解 (by 西西) 利用公式 $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = C_n^m$, 可得

$$\sum_{j=k}^{i-1} C_j^k = C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{j-1}^k$$

$$= C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k + \cdots + C_{j-1}^k = \cdots = C_j^{k+1}$$

因此,

$$\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{C_i^k}{j!} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}\sum_{i=k}^{j-1} C_i^k = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} C_j^{k+1}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j-k-1} = \frac{e}{(k+1)!}$$

第 14 章 函数项级数

14.1 函数项级数的一致收敛

定义 14.1. 点态收敛

设有 $S(x)$ 是定义在 I 上的函数，

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ x\in I,$$

对于每个 $x\in I$，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N(x,\varepsilon)>0$，当 $n>N(x,\varepsilon)$，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

则称 $S_n(x)$ 在 I 上点态收敛到 $S(x)$，记作

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)=S(x),x\in I.$$

♣

定义 14.2. 一致收敛

设有 $S(x)$ 是定义在 I 上的函数，

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ x\in I,$$

对于每个 $x\in I$，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)>0$，当 $n>N(\varepsilon)$，$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 则称 $S_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$，或称 $S(x)$ 为 $S_n(x)$ 在 I 上的一致极限. $S_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$，也称级数 $\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 一致收敛到 $S(x)$

♣

定理 14.1. 函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则

以下结论等价:

1. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $I\in\mathbb{R}$ 上一致收敛;
2. $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，当 $m>n>N$ 时，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon\ \forall x\in I$;
3. $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon\ \forall x\in I\ ,\ \exists p\in\mathbb{N};$$

♡

例14.1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 中的收敛性质.

解 法 1. 取 $x_n=\frac{\pi}{4n}$，则

$$\begin{aligned}|S_{2k}(x_n)-S_k(x_n)|&=\left|\frac{\sin[(n+1)\frac{\pi}{4n}]}{n+1}+\cdots+\frac{\sin[(2n)\frac{\pi}{4n}]}{2n}\right|\\&\geqslant n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的.

法 2. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n}$, 则,

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{x=\frac{1}{2n}}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{\sin(\frac{k}{2n})}{k}\geqslant\sin\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\to\sin\frac{1}{2}\ln 2\quad(n\to\infty)$$

由 Cauchy 准则知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 不一致收敛.

定理 14.2. M 判别法, Weierstrass 判别法

设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 在区间 I 上满足

$$|u_n(x)|\leqslant M_n\ (x\in I,n=1,2,\cdots)$$

且数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛 ♡

例14.2 证明级数

$$\frac{\sin x}{n^2}+\frac{\sin 2^2x}{n^2}+\cdots+\frac{\sin n^2x}{n^2}+\cdots$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

解 因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内

$$\left|\frac{\sin n^2x}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 所给级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

例14.3 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 内一致收敛.

解 由于当 $x\in[0,+\infty)$ 时,

$$e^{nx}=1+nx+\frac{1}{2!}(nx)^2+\frac{1}{3!}(nx)^3+\cdots>\frac{1}{2!}(nx)^2=\frac{n^2x^2}{2}$$

故 $\left|\dfrac{x^2}{e^{nx}}\right|<\dfrac{2}{n^2}$, 而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法, 原级数在 $[0,+\infty)$ 内一致收敛.

例14.4 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n!}$ 在 $(-10,10)$ 内一致收敛.

解 由于 $\forall x\in(-10,10)$,

$$\left|\frac{e^{-nx}}{n!}\right|<\frac{(e^{10})^n}{n!}$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 原级数在 $(-10,10)$ 内一致收敛.

定理 14.3. Dirichlet 判别法

如果函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 满足:

(1) $\{b_n(x)\}$ 对于每个固定的 $x\in I\in\mathbb{R}$ 关于 n 都是单调的, 且在 I 上一致收敛于 0;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M, \quad \forall x \in I,\ n = 1, 2, \cdots$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

♡

例14.5 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

解 令 $u_n(x) = \dfrac{n}{n^2+x^2}$. 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = \frac{n}{n^2+x^2} - \frac{n+1}{(n+1)^2+x^2} = \frac{n^2+n-x^2}{(n^2+x^2)[(n+1)^2+x^2]}.$$

当 n 足够大时, $u_n(x) - u_{n+1}(x) > 0$, $\{u_n(x)\}$ 单调减且

$$u_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2} < \frac{1}{n} \to 0$$

它一致地趋于 0. 而 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leqslant 1$ 一致有界, 由 Dirichlet 判别法得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

定理 14.4. Abel 判别法

如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足:

(1) $\{b_n(x)\}$ 对于每个固定的 $x \in I \in \mathbb{R}$ 都是单调的, 并且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant B, \quad \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N};$$

(2) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

♡

例14.6 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛性.

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$$

令 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当然在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

记 $b_n = \dfrac{nx^2}{(1+x^2)^n}$, 则对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n(1+x^2)}{n+1} = \frac{1+x^2}{1+\frac{1}{n}}.$$

当 $n>\dfrac{1}{x^2}$ 时, $\{b_n(x)\}$ 单调减, 且 $|b_n(x)|=\left|\dfrac{nx^2}{1+nx^2+\cdots}\right|\leqslant 1$, 故一致有界.

由 Abel 判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致收敛

例14.7 设 $b>0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 均为常数, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\dfrac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛蕴含着它在 $\forall x\in[0,b]$ 上一致收敛.

$$\begin{aligned}b_n(x)&=\frac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\left(\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\\&=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\Big|_0^x+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}+b_{n+1}(x)>b_{n+1}(x),\end{aligned}$$

$\{b_n(x)\}$ 单调减, 且对 $\forall x\in[0,b],t^ne^{-t}>0$, 故

$$b_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t<\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(n+1)}{n!}=1$$

即 $\{b_n(x)\}$ 在 $[0,b]$ 上一致有界.

根据 Abel 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\dfrac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n(x)$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

例14.8 定义数吧常数 $w=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\,(2^n-1)}$, 计算 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

解 事实上,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{nk}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nk}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(2^n-1)}=-w,\end{aligned}$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)=e^{-w}.$$

下面证明级数可以交换次序. 由于

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{kn}}\right|=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n2^{kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2^n}\right)^k\leq\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{n\,(2^n-1)},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,(2^n-1)}$ 收敛. 由 Fubini 定理可知级数可交换顺序.

14.1.1 极限函数与和函数的重要性质

定理 14.5. 逐项求极限 – 和号与极限号可交换

设 $u_n(x)$ 在集合 $I \subset \mathbb{R}$ 上有定义, 若 $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = c_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 又函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} u_n(x),$$

其中 a 可为 $a^+, a^-, +\infty, -\infty, \infty$ ♡

证明 先证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 根据函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛准则, $\exists n \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{6},\ \forall p \in \mathbb{N};$$

令 $p \to +\infty$ 得到 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$. 由 $x \to a$ 得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

再由数项级数的 Cauchy 收敛原理, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

对上述的 $\varepsilon > 0$ 及 $N \in \mathbb{N}, n > N$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| = \lim_{p\to+\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

设 $a \in \mathbb{R}$, 因为 $\lim\limits_{x\to a} u_k(x) = c_n$, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{N+1} u_k(x) - \sum_{k=1}^{N+1} c_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} u_n(x)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{n=1}^{N+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} c_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N+1} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| \\ &= \left|\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n(x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{N+1} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N+1} c_n\right| + \left|\sum_{n=N+2}^{\infty} c_n\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{n\to 1}\lim\limits_{x\to 1}u_n(x)$.

例14.9 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\dfrac{\pi^2}{12}$

解 对 $\forall x\in(0,1)=E$, 有

$$\begin{aligned}u_n(x)&=\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})}\\&\leqslant\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^n)}\leqslant\frac{x^n}{n\cdot nx^n}=\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 定理得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$ 在 $E=(0,1)$ 上一致收敛. 又

$$\lim_{x\to 1}u_n(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})}=\frac{1}{2n^2}=c_n,$$

因此,

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

例14.10 (AMM) 求 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}\,dy$.

解 令 $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-y)-\cos x}{y}$. 对 $x>0$, 我们有

$$\int_0^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{1}\frac{\cos(1-t)x-\cos x}{y}\,\mathrm{d}t=x\int_0^{1}\frac{1}{t}\int_{1-t}^{1}\sin ux\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

因而对 $R>0$,

$$\int_0^{R}\frac{1}{x}\int_0^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^{R}\int_0^{1}\frac{1}{t}\int_{1-t}^{1}\sin ux\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

而 $|\sin ux|\leqslant 1$, 该三重积分是绝对收敛的. 由 Fubini 定理可知积分能交换次序

$$\begin{aligned}\int_0^{R}\frac{1}{x}\int_0^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x&=\int_0^{1}\int_{1-t}^{1}\frac{1}{t}\int_0^{R}\sin ux\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{1}\frac{1-\cos Ru}{u}\int_{1-u}^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\&=-\int_0^{1}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^{1}\frac{\ln(1-u)}{u}\cos Ru\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

我们知 $|\ln(1-u)/u|\in L^1([0,1])$, 由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{1}\frac{\ln(1-u)}{u}\cos Ru\,du=0.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n}$ 一致收敛, 故可逐项积分. 因此我们有

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\frac{1}{x}\int_0^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x&=-\int_0^{1}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

定理 14.6. 狄尼 (Dini) 定理

1. $\forall x \in [a,b]$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$, 且 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,
3. $\forall x \in [a,b]$, $\{u_n(x)\}$ 同号,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

♡

例14.11 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$, 计算 $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$

解 在含 1 的区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数项级数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 根据 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, $S(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

例14.12

证明: (1) 函数列 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x;

(2) 函数列 $\dfrac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\dfrac{1}{1+e^x}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1+\ln\dfrac{2}{1+e}$

解

(1) 法 1. $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 非负连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=e^x$ 收敛, 根据 Dini 定理, $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x

法 2. 令 $u_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - e^x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^x < 0,$$

故 $\{u_n(x)\}$ 关于 $x \in [0,1]$ 单调减, 因而

$$0 \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x = u_n(x) \geqslant u_n(1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e \to 0$$

故在 $[0,1]$ 上, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows e^x$

(2) 对 $\forall x \in [0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{1+e^x}.$$

而即在 $[0,1]$ 上一致收敛于 1, $e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n > 1$, 所以

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\frac{1}{1+e^x}\right| &= \frac{\left|1+e^x-e^{\frac{x}{n}}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|}{(1+e^x)\left(e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \\ &< \left|e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| + \left|e^{\frac{x}{n}}-1\right| \leqslant e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n + e^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &\rightrightarrows 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

所以 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\dfrac{1}{1+e^x}$.

(3) 由于 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 (2) 的结论知可在积分号下求极限, 故有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} &= \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x = \Big[1-\ln(1+e^x)\Big]_0^1\\ &= 1+\ln\frac{2}{1+e}\end{aligned}$$

例14.13 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 考虑三角级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. 显然该级数在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛, 因而在 $(0,2\pi)$ 上, 确有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^x \frac{\pi-t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}x+\frac{x^2}{4},\ \forall x\in[0,2\pi]\end{aligned}\tag{14.1}$$

对 (14.1) 式在 $[0,2\pi]$ 上积分就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}$$

例14.14 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^2}{1+n^3x^3}$

解 (by ytdwdw) 对于 $n\geqslant 1, y>0, t\in[n-1,n]$ 成立

$$\left|\frac{ny}{n^3+y^3}-\frac{ty}{t^3+y^3}\right| = \left|\int_t^n \frac{y(y^3-2s^3)}{(s^3+y^3)^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{2y}{t^3+y^3}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny}{nt^3+y^3}-\int_0^{+\infty}\frac{ty}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\left|\frac{ny}{nt^3+y^3}-\frac{ty}{t^3+y^3}\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{2y}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^2}{1+n^3x^3} &= \lim_{y\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3ny}{n^3+n^3y^3}\\ &\geqslant \lim_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{3ty}{t^3+y^3}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 s^{-\frac{1}{3}}(1-s)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}s=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\end{aligned}$$

14.2 幂级数

例14.15 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数

证明 易得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

1. 当 $x=0$ 时, $S(0)=0$;
2. 当 $x=1$ 时, $S(1)=1$;
3. 当 $|x|<1$, 且 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)}{x}\end{aligned}$$

因此, 和函数为

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x=1\\ \dfrac{x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)}{x}. & -1\leqslant x<1, \text{且} x\neq 0\end{cases}$$

注意 和函数无定义的点需要讨论.

例14.16 将 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数

证明

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1},\quad x\in(-1,1)$$

例14.17 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}nx^n&=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\\&=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例14.18 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数

证明 方法 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\right)'$$
$$= x\left(x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'\right)'$$
$$= x\left(\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}\right) \quad x\in(-1,1)$$

方法 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$
$$= x^2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'' + x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$
$$= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'' + x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$
$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'$$

例14.19 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n$ 的和函数

证明 易得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}$$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}$ 注意到 $S(0)=0$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x t^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^n = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x\in[-1,1)$$

练习 14.1 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

解 注意到

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{n+1}} - \frac{1}{1-x} = \begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & |x|>1\\ \dfrac{x}{x-1}, & |x|<1\end{cases}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x-1)^2}, & |x|>1\\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2}, & |x|<1\end{cases}.$$

例14.20 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

解 在 $|x|<1$ 上对 $S(x)$ 逐项求导, 知

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$$

$$S''(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$$

由此可得

$$(1-x^2)S''(x)-xS'(x)=4$$

在两端乘以 $(1-x^2)^{-1/2}$, 我们有

$$\left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)'=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

故

$$S(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1.$$

例14.21 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数

证明 用 Wallis 公式容易确定收敛域为 $[-1,1)$。设和函数为 $S(x)$, 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导，得到

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x)$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x)$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$\left[\sqrt{1-x}S(x)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)\right]\equiv 0$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数，再利用 $S(0)=1$，就得到

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad -1<x<1 \tag{14.2}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续，而上式右边的表达式也是如此，因此 (14.2) 对 $x=-1$ 也成立

例14.22 级数 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 _____.

解 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

故

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3=\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=x^3(1-x)^{-3}$$

我们知道

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,x\in(-1,1)$$

故 $(1-x)^{-3}$ 中 x^{17} 的系数为

$$(-1)^{17}\frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-17+1)}{17!}=171$$

于是我们就得到 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数为 171

例14.23 (18 数学 3) 已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 求 $\{a_n\}$

解 (by 向禹) 首先 $\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{1+x}\right)'=\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}$. 而

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1},\quad\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

求导得

$$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

比较系数可得

$$a_n=\begin{cases}2k+2, & n=2k+1\\ \dfrac{(-4)^k}{(2k)!}-(2k+1), & n=2k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N})$$

例14.24 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和函数

解 因为

$$\begin{aligned}y&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{12}}{12!}+\cdots\\ y'&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{11}}{11!}+\cdots\\ y''&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^{10}}{10!}+\cdots\\ y'''&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots\end{aligned}$$

以上四式相加得:

$$y+y'+y''+y'''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

解此微分方程可求得通解

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3e^{-x}+\frac{e^x}{4}$$

故

$$y' = C_1\cos x - C_2\sin x - C_3e^{-x} + \frac{e^x}{4}$$

$$y'' = -C_1\sin x + C_2\sin x + C_3e^{-x} + \frac{e^x}{4}$$

易得 $y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0$ 带入以上式子解得

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = \frac{1}{4}$$

所求幂级数的和函数为

$$y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{e^x + e^{-x}}{4}$$

✍ **练习 14.2** 已知 $a_1 = 3, a_2 = 5$, 当 $n \geqslant 3$ 时 $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. 试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径与和函数

解 记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} S(1)$, 考虑比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}|x| < 1$$

法 1(夹逼准则) 令 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 则

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \Longleftrightarrow b_n b_{n-1} = b_{n-1} + 1$$

设 $\{b_n\}$ 极限存在并记 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, 则

$$A = 1 + \frac{1}{A} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 或 } A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(\text{舍去})$$

现证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\begin{aligned} 0 < \left|b_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| &= \left|1 + \frac{1}{b_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \frac{1}{2b_n}\left|2b_{n-1} - \sqrt{5}\right| \\ &< \frac{1}{2}\left|2b_{n-1} - \sqrt{5}\right| < \frac{1}{2^2}\left|2b_{n-2} - \sqrt{5}\right| \\ &< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left|2b_1 - \sqrt{5}\right| \to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

法 2(压缩映像原理) 令 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 则

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \Longleftrightarrow b_n b_{n-1} = b_{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &= \left|\left(1 + \frac{1}{b_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{b_{n-1}}\right)\right| = \frac{|b_n - b_{n-1}|}{b_n b_{n-1}} \\ &= \frac{|b_n - b_{n-1}|}{b_{n-1}+1} < \frac{1}{2}|b_n - b_{n-1}| \end{aligned}$$

因此, 由压缩映像原理知 $\{b_n\}$ 极限存在并记 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, 则

$$A = 1 + \frac{1}{A} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 或 } A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(\text{舍去})$$

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

法 3(级数收敛的必要条件) 为证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 收敛, 考察

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \left|\frac{a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}^2-(a_{n+1}+a_n)a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| \\ &= \left|\frac{a_n^2-a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \left|\frac{a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| \\ &= \cdots = \left|\frac{a_2^2-a_3a_1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| =\end{aligned}$$

由数列定义知, 当 $n\geqslant 1$ 时, $a_n\geqslant n-1$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 是收敛的,

从而级数 $\dfrac{a_1}{a_2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 绝对收敛, 而后者的前 n 项和恰好为 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

故无穷级数收敛定义知数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 收敛, 设其收敛于数 R,

则将关系式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 两边同除以 a_n 得

$$1=\frac{a_{n-2}}{a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

两边取极限 $(n\to\infty)$, 有 $1=R^2+R$. 解此方程 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负根舍去).

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

法 4(特征根) $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 特征方程为

$$\lambda^2-\lambda-1=0$$

有特征根 $\lambda_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

所求通解为

$$a_n=C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数, 由已知 $a_1=3,a_2=5$ 得

$$a_n=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是可得 $S(x)$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}\Longrightarrow\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^n+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

从而

$$\begin{aligned}&\left(S(x)-a_1x-a_2x^2\right)=\left(x^2S(x)\right)+\left(x(S(x)-a_1x)\right)\\ &\Longrightarrow(1-x-x^2)S(x)=a_1x+(a_2-a_1)x^2\end{aligned}$$

解得和函数

$$S(x)=\frac{a_1x+(a_2-a_1)x^2}{1-x-x^2}=\frac{3x+2x^2}{1-x-x^2},\quad |x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

例14.25 已知 u_n 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数), 且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$,

求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

解 先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right)$$

由条件 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{x^n e^x}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

故

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$

于是，当 $-1\leqslant x<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$

✍ **练习 14.3** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数，$x>0$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

解 首先，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\\=&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)}-\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]\\=&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right].\end{aligned}$$

当 n 足够大时，

$$1+\frac{x}{a_{n+1}}\sim e^{x/a_{n+1}}.$$

因此 $\left(1+\dfrac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{x}{a_{n+1}}\right)$ 与 $\exp\left\{x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 具有相同的收敛性，均发散，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)}=0.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1a_2}{x\,(a_2+x)}=\frac{a_1}{x}.$$

例14.26 求极限 $\lim\limits_{t\to1^-}(1-t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{1+t^n}$ 傲娇小魔王

解

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}&=\lim_{t\to1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^n(-1)^kt^{nk}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}(1-t)}{1-t^{k+1}}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}}{1+t+t^2+\cdots+t^k}\\&=\lim_{t\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}}{1+k}\\&=\lim_{t\to1^-}\ln(1+t)=\ln2\end{aligned}$$

例14.27 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0+}h\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(nh)$ 同时收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to0+}h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh).$$

解 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少, 有

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh)$$

和

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant h\sum_{n=0}^{\infty}f((n+1)h)\\&=h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh)-hf(0).\end{aligned}$$

于是,

$$h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh)-hf(0)\leqslant\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh)$$

显然, $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0+}h\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(nh)$ 同时收敛, 且

$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x-h\sum_{n=0}^{\infty}f(nh)\right|\leqslant hf(0)$$

上式中, 令 $h\to0^+$ 就得到所要证明的等式

练习 14.4 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$$

证明 我们知道 Gamma 函数有

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

$$\Longrightarrow\Gamma(x+n+1)=(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\Gamma(x+1)$$

这样

$$\frac{(n-1)!}{n(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n)}{n\Gamma(x+n+1)}=\frac{B(x+1,n)}{n}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(x+1,n)}{n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^x\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\right)(1-t)^x\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left[-\frac{\ln(1-t)}{t}\right](1-t)^x\,\mathrm{d}t\xlongequal{z=1-t}\int_0^1\left[-\frac{\ln z}{1-z}\right]z^x dz\\&=\int_0^1(-1)\sum_{k=1}^{\infty}z^{x+k-1}\ln z dz=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\int_0^1 z^{x+k-1}\ln z dz\\&\xlongequal{z=e^{-u}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}ue^{-u(x+k)}\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{y=u(x+k)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}ye^{-y}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\end{aligned}$$

定理 14.7. Tauber

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=A\in\mathbb{R}$.

如果 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot1^n=A$.

♡

证明 由假设 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 令 $\delta_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{|ka_n|\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\quad(0\leqslant x\leqslant1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}a_n-A&=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A\\&=\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n+S(x)-A\\&=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\end{aligned}$$

当 $x\in[0,1)$,

$$|I_1(x)|\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$I_2(x)\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}|na_n|\frac{1}{n}x^n\leqslant\frac{\delta_n}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\leqslant\frac{\delta_n}{N(1-x)}$$

$|I_3(x)|=|S(x)-A|$. $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 使得 $\sqrt{\delta_N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3(1+\delta_1)}$. 取 $x_N=1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$

$$I_1(x_N)\leqslant(1-x_N)N\delta_1=\delta_1\sqrt{\delta_N}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

$$I_2(x_N)\leqslant(1-x_N)N\delta_1=\frac{\delta_N}{N(1-x_N)}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}\right) = 1$$

从而存在 N_0, 当 $N > N_0$, $|I_3(x_N)| = |S(x_N) - A| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| = \left|I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$

14.2.1 函数展开成幂级数

例14.28 (Ramanujan) 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ x_1y_1 + x_2y_2 = -11, \\ x_1y_1^2 + x_2y_2^2 = 17, \\ x_1y_2^3 + x_2y_2^3 = -29. \end{cases}$$

解 设

$$f(t) = \frac{x_1}{1-ty_1} + \frac{x_2}{1-ty_2}$$

其中 t 为参数, 那么

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(x_1y_1^n + x_2y_2^n)t^n = 8 - 11t + 17t^2 - 29t^3 + \cdots$$

另一方面, $f(t)$ 可以表示为 $\dfrac{A_0 + A_1t}{1 + B_1t + B_2t^2}$ 的形式. 由

$$\frac{A_0 + A_1t}{1 + B_1t + B_2t^2} = 8 - 11t + 17t^2 - 29t^3 + \cdots$$

可知, $A_0 = 8, A_1 = 8B_1 - 11, -11B_1 + 8B_2 = -17, 17B_1 - 11B_2 = 29$, 解得

$$A_0 = 8,\ A_1 = 13,\ B_1 = 3,\ B_2 = 2,$$

因而

$$f(t) = \frac{8 + 13t}{1 + 3t + 2t^2} = \frac{5}{1+t} + \frac{3}{1+2t},$$

故原方程的解为

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (5, 3, -1, -2) \quad 或 \quad (x_1, x_2, y_1, y_2) = (3, 5, -2, -1).$$

定义 14.3. 二重对数函数

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

♣

例14.29 证明 Euler 公式

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x),\ x \in [0,1]$$

证明

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \mathrm{Li}_2(0) + \mathrm{Li}_2(1) + \int_0^x \big(\mathrm{Li}_2(t) + \mathrm{Li}_2(1-t)\big)'\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{n-1}}{n} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^x \left(-\frac{\ln(1-t)}{t} + \frac{\ln t}{1-t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \Big(\ln t \ln(1-t) \Big) \Big|_0^x = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)
\end{aligned}
$$

例14.30 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2$

解

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln x \ln(1-x) \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} \mathrm{d}x \\
&= -\ln^2 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} \mathrm{d}x = -\ln^2 2 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2 2
\end{aligned}
$$

练习 14.5 计算积分:

$$
\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x
$$

解 此题需用到

$$
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x &= -\int_0^1 \frac{\ln x}{2-x} \mathrm{d}x \\
&\xlongequal{2-x=t} \int_2^1 \frac{1}{t} \ln(2-t) \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_1^2 \frac{\ln 2}{t} \mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{\ln(1-\frac{t}{2})}{t} \mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\frac{t}{2})^n}{n} \cdot \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \int_1^2 \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^t \cdot n} \mathrm{d}t \\
&= -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n^2} \Big|_1^2 = -(\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \\
&= -(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}
\end{aligned}
$$

练习 **14.6** 计算积分:

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(1-x)\ln x\, d\mathrm{Li}_2(x)\\ &= \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{Li}_2(x)\frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= -\frac{\pi^4}{72} + \frac{\pi^4}{120} = -\frac{\pi^4}{180}\end{aligned}$$

14.2.1.1 欧拉数与伯努利数

定义 14.4. 欧拉数 E_n

定义: 由级数 $\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum\limits_{n\geq 0} E_n \dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 E_n 称为欧拉数. ♣

表 14.1: 常用的几个欧拉数

n	0	1	2	4	6	8	10	$\cdots$
E_n	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	$\cdots$

例**14.31** 计算 $\sec x$ 的 Maclaurin 展开式

解 由于 $\sec x$ 是偶函数，可以假定有

$$\sec x = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots + c_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1})\ (x\to 0)$$

现在令

$$c_{2n} = (-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!},\ n\in\mathbb{N}_+,$$

写出

$$\sec x = E_0 - \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})\ (x\to 0) \tag{14.3}$$

并将公式 (14.3) 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式一起代入恒等式 $\cos x\sec x = 1$ 中，就可以得到确定数列 $\{E_{2n}\}$ 的递推公式

$$E_0 = 1,\ E_2 + E_0 = 1,\ E_4 + \frac{4!}{2!2!}E_2 + E_0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$E_{2n} + \binom{2n}{2}E_{2n-2} + \binom{2n}{4}E_{2n-4} + \cdots + E_0 = 0$$

从而可以得出

$$E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ E_6 = -61,\ E_8 = 1385,\ E_{10} = -50521,\ \cdots$$

例如，这样就可以写出直到前 6 项系数的公式

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{50521}{362880}x^{10} + o(x^{11})$$

称 E_{2n} 为 Euler 数。当 n 为偶数时，E_{2n} 为正奇数，且除 E_0 外，其个位数字都是；当为奇数时，n 为负奇数，其个位数都是 1.

定义 14.5. 伯努利数 B_n

定义：由级数 $\dfrac{t}{e^t-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ 所确定的系数 B_n 称为伯努利数，即 Bernoulli 数或 Bernoulli Numbers ♣

表 14.2: 常用的几个伯努利数

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	$\cdots$
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\cdots$

例14.32 计算 $x\cot x$ 的 Maclaurin 展开式。在 $x=0$ 处的函数值补充定义为 1

解 考虑 Euler 公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$\begin{aligned} x\cot x &= x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = ix\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = ix + \frac{2ix}{e^{2ix}-1} \\ &= ix + B_0 + \frac{B_1}{1!}2ix + \frac{B_2}{2!}(2ix)^2 + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} + o(x^{2n}) \\ &= \mathrm{Re}\left\{ix + B_0 + \frac{B_1}{1!}2ix + \frac{B_2}{2!}(2ix)^2 + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2ix)^{2n} + o(x^{2n})\right\} \\ &= 1 - \frac{\bar{B}_1 2^2}{2!}x^2 - \frac{\bar{B}_2 2^4}{4!}x^4 + \cdots - \frac{\bar{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})\ (x\to 0) \end{aligned}$$

写出其前 5 项的系数，即有

$$z\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \frac{1}{4725}x^8 + o(x^9)\ (x\to 0)$$

例14.33 计算 $\tan x$ 的 Maclaurin 展开式。

解 利用恒等式 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，当 $x\to 0$ 时将右边取其极限 0. 这样有

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{x\cot x - 2x\cot 2x}{x} \\ &= \frac{\bar{B}_1(2^2-1)2^2}{2!}x - \frac{\bar{B}_2(2^4-1)2^4}{4!}x^3 + \cdots - \frac{\bar{B}_n(2^{2n-1})2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})\ (x\to 0) \end{aligned}$$

写出前 5 项的系数，即有

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})\ (x\to 0)$$

例14.34 设 $P_0 = 1$, 且 $P_n + \dfrac{P_{n-1}}{1!} + \dfrac{P_{n-2}}{2!} + \cdots + \dfrac{P_0}{n!} = 1$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

解 (by 向禹) 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(P_n + \frac{P_{n-1}}{1!} + \frac{P_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{P_0}{n!}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$$

因此

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \to e^{-1}$$

例14.35 证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

证明 函数 $B(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ 为伯努力数 B_k 的生成函数，有 B 是亚纯，且只在 $2\pi i n$ 有极点，利用 Mittag-Leffler 定理可以展开为

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2\pi i n}{x-2\pi i n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2\pi i n}}\right).$$

而注意到后者又可以展开为几何级数相加：

$$\frac{x}{e^x-1} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{x}{2\pi i n}\right)^k = \sum_{k\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}x^{2n}$$

是由于在重排级数的同时，奇数项消去了而偶数项留下了，所以我们就得到如下式子：

$$B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}$$

也就是要求计算

$$B_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2}\right\} = \frac{1}{12}$$

那么 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 就能得到了。

推论 14.1. $\zeta(2k)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!},\ (k\geq 1)$$

♡

证明 ([18])

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \Longrightarrow x\coth x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n} \tag{14.4}$$

我们有

$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{x^2}{n^2x^2}+1\right),$$

上时两边求导, 得

$$\begin{aligned}
x\coth x &= 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2x^2}\\
&= 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n\pi)^2}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m}\\
&= 1 + 2x^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(n\pi)^{2m+2}}\\
&= 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}}x^{2m+2}
\end{aligned}$$

将上式与 (14.4) 对比, 可得

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!},\quad \forall k\geqslant 1$$

✍ 练习 14.7 求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x^x-1}\right)$$

解 Built around $x=1$, we have

$$\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma-\gamma_1(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

where appears the Stieltjes constant. On the other hand, starting from

$$x^x=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+O\left((x-1)^4\right)$$

$$\frac{1}{x^x-1}=\frac{1}{x-1}-1+\frac{x-1}{2}+O\left((x-1)^2\right)$$

So,

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^x-1}=(1+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{1}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

and then the result.

Edit

Making the problem more general, it is quite simple to show that

$$\zeta(x)-\frac{1}{x^{x^n}-1}=(n+\gamma)-\left(\gamma_1+\frac{n^2}{2}\right)(x-1)+O\left((x-1)^2\right)$$

定理 14.8. Faulhaber's formula

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^{l}B_{k+1-l}(n+1)^l$$

♡

证明 [18] 设 t 为实数, 考虑函数 $\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$ 关于 x 的幂级数展开

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n,$$

其系数 $B_n(t)$ 称为第 n 个 Bernoulli 多项式. 为了看出 $B_n(t)$ 的确是关于 t 的多项式, 我们要利用幂级数的乘积公式. 从等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}e^{tx}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n\right)$$

中比较两端 x^n 的系数, 得

$$B_n(t)=\sum_{k=1}^{n}C_n^kB_{n-k}t^k,\ n\geqslant 0. \tag{14.5}$$

因此 $B_n(t)$ 是关于 t 的 n 次多项式, 且 $B_n(0)=B_n$. 另一方面, 由定义

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n\qquad \frac{xe^{(t+1)x}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)}{n!}x^n$$

两式相减, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)-B_n(t)}{n!}x^n=xe^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^{n+1},$$

比较等式两边 x^{k+1} 的系数, 得

$$B_{k+1}(t+1)-B_{k+1}(t)=(k+1)t^k,\ \forall k\geqslant 1, \tag{14.6}$$

在上式中分别取 $t=1,2,\cdots,n$, 再把这些等式相加, 得

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

在 (14.6) 中取 $t=0$ 知 $B_{k+1}(1)=B_{k+1}(0)=B_{k+1}$, 再利用 (14.5), 上式可改写为

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^{l}B_{k+1-l}(n+1)^l$$

特别地, 当 $k=2$ 时可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(n+1)-\frac{3}{2}(n+1)^2+(n+1)^3\right]=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

当 $k=3$ 时可得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\left[(n+1)^2-2(n+1)^3+(n+1)^4\right]=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

14.2.2 欧拉公式

定理 14.9. 欧拉 (Euler) 公式

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x\Longleftrightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{x\mathrm{i}}+e^{-x\mathrm{i}}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{x\mathrm{i}}-e^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\end{cases}$$

♡

例14.36 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数

解 由欧拉公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 知: $\cos x=\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right]$$

因为

$$\begin{aligned}e^{(1+\mathrm{i})x}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+\mathrm{i})^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}e^x\cos x&=\mathrm{Re}\left[e^{(1+\mathrm{i})x}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

例14.37 求定积分

$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi$$

解 考虑欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 故

$$e^{e^{i\theta}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k!}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta&=\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}e^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right)=\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k!}\,\mathrm{d}\theta\\&=\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k}\sin(k\theta)\right]_0^{\pi}=\pi\end{aligned}$$

例14.38 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\ \forall x\in(0,2\pi)$

证明 [4] 只需要考虑 $x\in(0,2\pi)$ 的情况, 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^ne^{inx}}{n},\ t\in[0,1].$$

利用 Dirichlet 判别法, 不难看到, 对于任何 $x\in(0,2\pi)$ 上式作为 t 的幂级数, 在 $[0,1]$ 上都是收敛的. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}&=\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\mathrm{Im}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}e^{inx}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Im}\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\sin x}{(t-\cos x)^2+\sin^2x}\,\mathrm{d}t=\int_{-\cot x}^{\frac{1-\cos x}{\sin x}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=\arctan\frac{1-\cos x}{\sin x}-\arctan(-\cot x)\\&=\arctan\tan\frac{x}{2}-\arctan\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{\pi-x}{2},\quad\forall x\in(0,2\pi)\end{aligned}$$

例14.39 证明: $-\ln\sin x=\ln 2+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n},\ x\in(0,2\pi).$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2inx}+e^{-2inx}}{2n}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{2ix})^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-2ix})^n}{n}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-\ln(1-e^{2ix})-\ln(1-e^{-2ix})\right]\\&=-\frac{1}{2}\ln\left[(1-e^{2ix})(1-e^{2ix})\right]\\&=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos2x)=-\frac{1}{2}\ln(2-2(1-2\sin^2x))\\&=-\frac{1}{2}\ln(4\sin^2x)\\&=-\ln2-\ln\sin x\end{aligned}$$

练习 14.8 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2nx\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^n-1}{4n^2}\\ &= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\\ &= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\zeta(3)\right)+\frac{1}{4}\zeta(3)\\ &= -\frac{\ln 2}{8}\pi^2+\frac{7}{16}\zeta(3)\end{aligned}$$

✍ 练习 14.9 计算积分: $\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}\ln^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &\xlongequal{t=\tan\frac{\theta}{2}} \int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty}\frac{2\sqrt{1/t}}{1+t^2}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1/t}+\sqrt{1/t^3}}{t+1/t}\ln^2\left(\frac{2}{t+1/t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{x^2+2}\ln^2\left(\frac{2}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{x=\sqrt{2}\tan u} 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\left(\cos^2 u\right)\mathrm{d}u\\ &= 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\mathrm{d}u = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\right)^2\mathrm{d}u\\ &= 8\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2 2\mathrm{d}u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4kx}{2}\mathrm{d}x\right)\\ &= 4\sqrt{2}\pi\ln^2 2+2\sqrt{2}\pi\zeta(2) = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi^3+4\sqrt{2}\ln^2 2.\end{aligned}$$

✍ 练习 14.10 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\ln\cos x dx = \frac{(\pi\ln 2)^2}{8}-\frac{\pi^4}{192}$

解 首先，我们设 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\sin x\ln\cos x dx$, 很显然，

$$A=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x dx$$

所以，只需要求 $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\ln\cos x dx$ 由傅里叶级数不难得到

$$\ln(2\cos\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n},\quad -\pi<x<\pi$$

由 $2x$ 替换 x, 得到

$$\ln(2\cos x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{n},\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

而另一方面

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\ln\sin x dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x d\frac{\sin 2nx}{2n}\\&=\frac{1}{2n}\sin 2nx\cdot\ln\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot\sin 2nx}{\sin x}dx\\&=-\frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\sin x}dx\\&=-\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\cos x\cdot\ln\sin x dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{4n^2}=B+\ln 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

马上看到

$$B=\frac{\pi}{2}\ln^2 2-\frac{1}{48}\pi^3\quad A=\frac{(\pi\ln 2)^2}{8}-\frac{\pi^4}{192}$$

14.2.3 级数的乘法

定理 14.10. 柯西乘积

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径各为 R_a , R_b 则对 $|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$ 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n$$

♡

例14.40 证明: $f(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 的幂级数展开式为

$$f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

证明 已知 $\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 在 $[-1,1)$ 上收敛, 在 $(-1,1)$ 的任何区域内闭区间上绝对收敛, 因此应用级数乘法.

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}&=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)\\&\xlongequal{\text{柯西乘积}}x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}1^k\times\frac{1}{n+1-k}x^n\\&=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\end{aligned}$$

例14.41 求 $\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开式

证明 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(|x|<1)$ 是绝对收敛的级数.

由于两个绝对收敛的级数可以任意相乘, 记 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$, 则有

$$\ln^2(1+x)=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$$

其中

$$\begin{aligned}C_n&=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\\&=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)}\\&=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right\}=\frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\ln^2(1+x)&=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right\}x^n\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}x^{n+1},\quad x\in(-1,1)\end{aligned}$$

例14.42 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\ln^2 2$$

解 注意到 $H_n=H_{n+1}-\dfrac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}H_{n+1}&=\int_0^1(1+x+\cdots+x^n)dx=\int_0^1\frac{1-x^{n+1}}{1-x}dx\\&\xlongequal{t=1-x}\int_0^1\frac{1-(1-t)^{n+1}}{t}dt\\&=[1-(1-t)^{n+1}]\ln t\Big|_0^1-\int_0^1(n+1)(1-t)^n\ln t\,dt\\&=-(n+1)\int_0^1(1-t)^n\ln t\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}H_{n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}2\int_0^1(t-1)^n\ln t\,dt\\&=2\int_0^1\frac{t-1}{2-t}\ln t\,dt=-2\int_0^1\ln t\,dt+2\int_0^1\frac{1}{2-t}\ln t\,dt\\&\xlongequal{x=1-t}2+2\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{1+x}\\&\xlongequal{x=\frac{1-z}{1+z}}2+2\int_0^1\frac{1}{1+z}\cdot\ln\left(\frac{2z}{1+z}\right)dz\\&=2+\ln^2 2-2\int_0^1\frac{\ln(1+z)}{z}dz\end{aligned}$$

$$= 2 + \ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

于是

$$I = 2 + \ln^2 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \ln^2 2$$

例14.43 设 $a_0 = 1, a_1 = \frac{2}{3}$.

$$(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = \frac{2}{3}a_n$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}} a_n = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$

解 (by ytdwdw) 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 可得收敛域内 $[(1-x^2)S(x)]' = \frac{2}{3}S(x)$. 解得

$$S(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{4}{3}}.$$

利用 Cauchy 乘积并比较系数得到, 当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3n\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})} \sum_{\substack{k+j=n-1\\ k,j\geqslant 0}} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\frac{2}{3})\Gamma(j+\frac{4}{3})}{k!j!} \\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \sum_{\substack{k+j=n-1\\ k,j\geqslant 0}} (-1)^k n C_{n-1}^k \int_0^1 t^{k-\frac{1}{3}}(1-t)^{j+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 (1-2t)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+s}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&= F_n + G_n + H_n
\end{aligned}$$

接下来说明 nG_n, nH_n 有界, $n^{\frac{2}{3}} a_n \to \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$

14.2.4 利用幂级数求级数的和

例14.44 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

证明

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \frac{4}{3}\frac{(\arcsin 1)^2}{2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \int_0^1 x^{2n}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

练习 **14.11** 求

$$\frac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$$

解 考虑 $\sin x$ 的幂级数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

记

$$p = 1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots$$
$$q = \frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots$$

则

$$\pi p - \pi^3 q = \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}\pi^{2n-1} + \cdots = \sin\pi = 0$$

所以

$$\frac{p}{q} = \pi^2$$

例**14.45** 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$$

解 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x^2$$

所以原积分

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\,\mathrm{d}x^2$$
$$= \int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n!)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{2^n(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}$$
$$= e^{\frac{1}{2}}$$

例**14.46** 计算积分 $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^{n-1}}{(n-1)!} = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n)!!)^2} \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n)!!)^2} \cdot 2^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n)!!)^2} \cdot 2^n \Gamma(n+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{(n)!} = \sqrt{e}
\end{aligned}
$$

练习 14.12 设 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 确定系数 a_0, a_1, a_2 和 a_3, 并证明当 $n \geq 2$ 时, 有

$$
a_n > \frac{\mathrm{e}}{(\gamma \ln n)^n},
$$

其中 γ 是大于 e 的一个常数.

解 前面四个系数的确定是容易的

$$
a_1 = e, a_2 = e, a_3 = \frac{5}{6}e
$$

下面给出后面的证明, 利用幂级数展开式如下

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}\right),
$$

因此有

$$
a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} > \frac{k^n}{n!k!},
$$

这样对每一个 $k \geq 0$ 成立. 以下取 k 使得本题的不等式成立即可. 由于本题的 γ 可以放大, 因此只要在等价的意义下成立即可. 这时又可以将阶乘理解为 Γ 函数, 因此 k 用非整数代入是可以的. 以下证明, 取 $k = \dfrac{n}{\ln n}$ 代入已经可以得到所要的不等式. 这时就有

$$
\frac{k^n}{n!k!} = \frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{n!\left(\frac{n}{\ln n}\right)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{2\pi n}{\ln n}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}} = \frac{(\mathrm{e}\ln n)^{\frac{n}{\ln n}}\sqrt{\ln n}}{2\pi n(\ln n)^n}.
$$

由于最后一式中的分子为无穷大量, 大于 e 没有问题. 又由于 $a > 1$ 时, $\dfrac{2\pi n}{a^n} = o(1)$, 因此任取 $\gamma > \mathrm{e}$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $a_n > \dfrac{\mathrm{e}}{(\gamma \ln n)^n}$. 最后再放大 γ 使得不等式对一切 $n \geq 2$ 成立即可.

练习 14.13 设 $a > 1$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

解 事实上

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} &= \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\
&= \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a^2-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} = \frac{1}{a+1} - \frac{2^2}{a^{2^2}-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\
&= \frac{1}{a+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1} = \frac{1}{a+1}.
\end{aligned}
$$

练习 14.14 设 $x > 1$, 求 $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots$ 的和

解

$$\begin{aligned}I &= \left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\ &= 1+\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}\right)+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\ &= 1-\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\ &= 1-\frac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots\\ &= \cdots = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+1\right)} = 1.\end{aligned}$$

练习 14.15 求 $1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.

解 事实上,

$$\begin{aligned}b_k &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^k}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{k-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}\\ &= -b_{k-1}-C_{k-1}^1 b_{k-2}-\cdots-C_{k-1}^{k-2}b_1-b_0,\end{aligned}$$

其中 $b_0=1/e$. 因此 $b_1=-1/e, b_2=0, b_3=1/e$. 因此

$$\begin{aligned}1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{n!}\\ &= b_3+3b_2+3b_1+b_0 = -\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

练习 14.16 求 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots$ 的和.

解

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}-\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n-1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{8n-8}+x^{8n-6}-x^{8n-4}-x^{8n-2}\right)\\ &= \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{8n-8}+x^{8n-6}-x^{8n-4}-x^{8n-2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1+x^2-x^4-x^6}{1-x^8}\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

练习 14.17 求 $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\cdots$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-7}-\frac{1}{8n-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{8n-8}-x^{8n-2}\right)\\ &= \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{8n-8}-x^{8n-2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1-x^6}{1-x^8}\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{2\arctan x+\sqrt{2}\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{4}\right|_0^1\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{8}\pi.$$

✍ 练习 **14.18** 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left(x^{6n-6}-x^{6n-3}\right)\\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{6n-6}-x^{6n-3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1\\ &= \frac{\sqrt{3}\pi+3\ln 2}{9}.\end{aligned}$$

✍ 练习 **14.19** 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1}\right)\\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1-x^4}-\frac{x}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.\end{aligned}$$

✍ 练习 **14.20** 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\cdots$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left(x^{5n-5}-x^{5n-2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{5n-5}-x^{5n-2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^5}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)/10}{x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1}+\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)/10}{x^2+\frac{-\sqrt{5}+1}{2}x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\pi.\end{aligned}$$

例**14.47** (CMC,2019) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

解 级数通项 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2}$, 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2n+2},$$

则收敛区间为 $(-1,1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\right]$, $f'(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2g(x)$, 其中 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$. 因为

$$\begin{aligned}g'(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}\\&=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xg(x)\right],\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 满足 $g(0)=0$, $g'(x)-\frac{x}{1-x}g(x)=\frac{1}{1-x^2}$. 解这个一阶线性方程, 得

$$g(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{1-x^2}e^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

由 $g(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $f(x)=(\arcsin x)^2$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi^2}{16}$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{8}.$$

例14.48 求级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+2+2)}$ 之和.

解 (by 冬眠的小老鼠) 令 $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{m+n+2}}{mn(m+2+2)}$. 则

$$f'(x)=x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x\ln^2(1-x)$$

故

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+2+2)}=f(1)=\int_0^1 x\ln^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{4}$$

例14.49 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ 的和

证明 易得

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{2(3n+1)}-\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{6(n+1)}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(3n+1)}-\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{6(n+1)}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(\frac{x^{3n}}{2}-x^{3n+1}+\frac{x^n}{6}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{2}-x^{3n+1}+\frac{x^n}{6}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{2(1-x^3)}-\frac{x}{1-x^3}+\frac{1}{6(1-x)}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{4-x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\pi - 3\ln 3\right)$$

✍ 练习 **14.21** 级数求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}$$

证明 显然有

$$-n\int_0^1 (1-x)^{n-1}\ln x dx = -\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k} = H_n$$

考虑积分

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k (-1)^{k+1}}{k}$$

另外一方面

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}du = H_n$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\ln x dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n^2}\ln x dx$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2} = \frac{\mathrm{Li}_2(1-x)}{1-x}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(1-x)\ln x}{1-x}dx = \frac{1}{2}(\mathrm{Li}_2(1-x))^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

✍ 练习 **14.22** 求和: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - H_{2n}}{n(2n+1)}$.

解 首先不难得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - H_{2n}}{n(2n+1)} =& 2\sum_{n=1}^{\infty}(H_n - H_{2n})\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)\\ =& 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)\int_0^1 \frac{x^{2n}-x^n}{1-x}\mathrm{d}x\\ =& \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \ln\frac{1+x}{1-x} - \ln(1+x)}{1-x}\mathrm{d}x\\ &+ \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t = 4\ln 2.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2(-1) = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(\sqrt{x}-1)}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x =& -2\int_0^1 \frac{t}{1+t}\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t\\ =& 2\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} - \frac{\ln(1-t)}{1+t}\right]\mathrm{d}t - 2\int_0^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t\\ =& \ln^2 2 + 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\ln 2 = \frac{\pi^2}{6} - 4\ln 2.\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\ln\frac{1+x}{1-x}-\ln(1+x)}{1-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{1-x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x,$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{t}{1-t^2}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-t}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ln\frac{1+t}{2}\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln^2 2 = \ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)-\ln 2}{1-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{2n}}{n(2n+1)} &= 4\ln 2-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}-4\ln 2+2\left(\ln^2 2-\frac{\pi^2}{12}\right)-2\left(\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}\right)\\ &= \ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

✍ 练习 14.23 证明：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n} = \gamma\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2},$$

其中 γ 是 Euler 常数.

证明 法 1. 因为

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$$

所以

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{n^x}\\ &= \frac{\log 2}{2^{x-1}}\zeta(x)+\left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta'(x)\end{aligned}\tag{14.7}$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1}+\gamma+O(x-1)$$

带入 (14.7), 令 $x\to 1^+$ 可求得

$$f(1) = \gamma\log 2-\frac{1}{2}\log^2 2$$

法 2. 考虑部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= 2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\ln 2k}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\\ &= \ln 2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{k}-\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\frac{\ln k}{k}\end{aligned}$$

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 可知当 $x>e$ 时为单调递减且趋于 0 函数，有估计

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{k}^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}f(k)\leq\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算得

$$\sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n}f(k)-\frac{\ln 2}{2}\ln(\frac{n^2}{2})=o(1)$$

所以原式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\ln k}{k}&=\ln 2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{k}-\ln(n/2)-\frac{\ln 2}{2}\right)\\&=\ln 2(\gamma-\frac{1}{2}\ln 2)\end{aligned}$$

练习 **14.24** 求极限 (西西 2017 年新年祝福)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)$$

解 法 1(西西) 注意

$$\sqrt{x}-\sqrt{k}=\frac{x-k}{\sqrt{x}+\sqrt{k}}$$

则有

$$\left|\frac{e^x}{\sqrt{x}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}+\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{k}}{\sqrt{kx}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{|x-k|}{\sqrt{kx}}$$

由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{|x-k|}{\sqrt{k}}\leq\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

且

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k}\leq 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\leq\frac{2}{x}e^x$$

且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}(x-k)^2=xe^x$$

所以

$$\left|\frac{e^x}{\sqrt{x}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2}\frac{e^x}{x}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=1$$

法 2(那日蓝天) 引理: 设 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi(k)$ 收敛, 且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\varphi(k)}{\psi(k)}=1$ 则

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)x^k}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\psi(k)x^k}=1$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{n}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\overset{Stiring}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{-n-\frac{1}{2}}}=1$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$f(x)$ 满足方程

$$f'(x)=f(x)+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\qquad(f(0)=0)$$

解之得

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^x\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^x\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$$

法 3. 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kq^2}dq,$$

因此

$$\begin{aligned}\sqrt{x}e^{-x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\sqrt{k}}&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^{\infty}e^{-kq^2}dq\\&=\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq.\end{aligned}$$

因此所求极限等价于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq=1.$$

下面证明此式. (逆逆) 首先有 $t\geq x\geq 0$ 时, $xe^{-t^2}\leq xe^{-x^2}\leq 1$; $0\leq y\leq 1$ 时, $e^y-1\leq(e-1)y\leq 2y$.

(1) 因此

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leq\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}2xe^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2x\sqrt{x}}{e^x}\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\to 0,\quad x\to\infty$$

(2) 对任意 $\varepsilon>0$, 我们有

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_{\varepsilon}^{x}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t\leq\frac{\sqrt{x}}{e^x}\cdot x\cdot e^{xe^{-\varepsilon^2}}=x^{3/2}/e^{x\left(1-e^{-\varepsilon^2}\right)}\to 0,\quad x\to\infty$$

只需计算

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}\left(e^{xe^{-t^2}}-1\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

令

$$y=1-e^{-t^2},\quad t=\sqrt{-\ln(1-y)},\quad \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{-\ln(1-y)}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{1-y},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t&=\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{1-e^{-\varepsilon^2}}\frac{e^{x(1-y)}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{-\ln(1-y)}\,(1-y)}\,\mathrm{d}y,\quad \text{其中}\delta(\varepsilon)=1-e^{-\varepsilon^2}\end{aligned}$$

对 $\forall\alpha>0$, 取 ε 足够小, 当 $0\leqslant y\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时, 我们有 $-(1+\alpha)y\leqslant\ln(1-y)\leqslant-y$. 于是

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\alpha}}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sqrt{x}}{e^x}\int_0^{\varepsilon}e^{xe^{-t^2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sqrt{x}}{1-\delta(\varepsilon)}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)}}e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{\delta(\varepsilon)x}}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}&\leqslant\varliminf_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\\&\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(e^{xe^{-q^2}}-1\right)dq\leqslant\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}=e^{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

依次令 $\varepsilon\to0,\alpha\to0$ 便可得到结论.

例14.50 设 a_0 和 a_1 是实数，且满足 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$,

证明: 序列 $\left\{\dfrac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛，并求极限。

证明 设

$$S(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则

$$\begin{aligned}S(x)&=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\\&=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\\&=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nx^{n+1}+\frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}\right)\\&=a_0+a_1x+x(S(x)-a_0)+2\int_0^x tS(t)dt\end{aligned}$$

两边对 x 求导，得到微分方程

$$(x-1)S'(x)+(2x+1)S(x)+a_1-a_0=0$$

注意到初值 $S_0=a_0$, 解这个 ODE, 得到

$$S(x)=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(2x^2-6x+5)(a_0-a_1)+(5a_1-9a_0)e^{-2x}}{(x-1)^3}\right]$$

我们有展开式

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k\ ,\quad e^{-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}x^k$$

则

$$(2x^2-6x+5)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}=5+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n$$

$$e^{-2x}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}$$

于是

$$S(x)=\frac{1}{4}(a_1-a_0)\left(5+9x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(n+5)(n+2)x^n\right)+\left(\frac{9}{4}a_0-\frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$$

对比 x^n 项的系数，得到

$$a_n=\frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0)+\left(\frac{9}{4}a_0-\frac{5}{4}a_1\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(n-k+2)(n-k+1)}{2\cdot k!}\right)$$

下面来计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(n+5)(n+2)(a_1-a_0)}{n^2}=\frac{1}{8}(a_1-a_0)$$

又注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}(n-k+2)(n-k+1)&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}[n^2+3n-2kn+(k-2)(k-1)]\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{2\cdot k!}+o(1)\to\frac{e^{-2}}{2}\qquad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\left(\frac{9}{8}e^{-2}-\frac{1}{8}\right)a_0+\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{8}e^{-2}\right)a_1$$

14.3 函数项级数的进一步讨论

14.3.1 几个常数的近似计算

14.3.1.1 π 的近似计算

例14.51 (Machin,1706) 证明: $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$

解 利用等式

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}$$

当 $u=\arctan(1/5)$ 时, 有

$$\tan(2u)=\frac{2/5}{1-(1/5)^2}=\frac{5}{12}\,,\quad \tan(4u)=\frac{10/12}{1-(5/12)^2}=\frac{120}{119}.$$

因此

$$\tan(4u-\pi/4)=\frac{120/119-1}{1+120/119}=1/239$$

这就得到下面等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

注: 1706 年, Machin 用这个公式将 π 计算到了小数点后 100 位

例14.52 (Ramanujan,1914) 证明:

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4396^{4k}}=\frac{1}{\pi}.$$

解 Just to make this more intriguing, define the fundamental unit $U_{29}=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ and fundamental solutions to Pell equations,

$$\left(U_{29}\right)^3=70+13\sqrt{29},\quad \text{thus } 70^2-29\cdot 13^2=-1$$

$$\left(U_{29}\right)^6=9801+1820\sqrt{29},\quad \text{thus } 9801^2-29\cdot 1820^2=1$$

$$2^6\left(\left(U_{29}\right)^6+\left(U_{29}\right)^{-6}\right)^2=396^4$$

then we can see those integers all over the formula as,

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{k!^4}\frac{29\cdot 70\cdot 13k+1103}{(396^4)^k}=\frac{1}{\pi}$$

例14.53 (Bailey-Borwein-Plouffe, BBP formula) 证明:

$$\pi=\sum_{k\geqslant 0}\left[\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)\right]$$

证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geqslant 0}\left[\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)\right]\\
&=\int_0^1\sum_{k\geqslant 0}\frac{4x^8-2x^{8k+3}-x^{8k+4}-x^{8k+5}}{16^k}\,\mathrm{d}x\\
&=16\int_0^1\frac{1-x}{4-4x+2x^3-x^4}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{x\mapsto 1-x}16\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+2x-x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&=4\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-4\int_0^1\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=(\pi+\ln 4)-\ln 4=\pi
\end{aligned}$$

例14.54 (Brounckner) 证明:

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}}$$

.

证明 [1] 我们令 $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 则 $I_0=\frac{\pi}{4}$, $I_1=1-\frac{\pi}{4}$ 且

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1},$$

由此可知

$$\frac{I_n+I_{n+1}}{I_{n+1}+I_{n+2}}=\frac{2n+3}{2n+1}$$

令 $r_n=\frac{I_{n+1}}{I_n}$, 可得

$$\frac{1+1/r_n}{r_{n+1}+1}=\frac{2n+3}{2n+1},\quad r_n=\frac{2n+1}{2+(2n+3)r_{n+1}}$$

因此

$$r_0=\frac{1}{2+3r_1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+5r_2}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+7r_3}}}=\cdots$$

且注意到 $r_0=\frac{\pi}{4}-1$ 以及 $I_n=O\left((2n+1)^{-1}\right)$ 得证.

14.3.1.2 欧拉常数

例14.55 证明 $H_n=-n\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x\,\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}H_n&=\int_0^1(1+x+\cdots+x^{n-1})dx\overset{\text{等比数列求和}}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx\\&\overset{t=1-x}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t\\&\overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=}[1-(1-t)^n]\ln t\Big|_0^1-\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t\\&=-n\int_0^1(1-t)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例14.56 设

$$H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

记 $\varphi(n)$ 为满足 $H(k)\geqslant n$ 的最小自然数, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=e$

[1] 群文件《MSE2017》P165

解 由 $\varphi(n)$ 的定义知

$$n \leqslant H(\varphi(n)) \leqslant n + \frac{1}{\varphi(n)} \quad 及 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$$

另外, 由欧拉常数的定义

$$\lim_{n\to+\infty} \big(H(n) - \ln n\big) = \gamma \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \big(n - \ln \varphi(n)\big) = \gamma$$

故

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = e$$

例14.57 求极限: $I = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{[n\pi]} + \dfrac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \dfrac{1}{4n}\right)$

解 考虑欧拉常数的定义

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

故有

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[n\pi-1]} = \ln[n\pi - 1] + \gamma + \varepsilon_{[n\pi]-1} \tag{14.8}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n} = \ln(4n) + \gamma + \varepsilon_{4n} \tag{14.9}$$

由 (14.9)–(14.8) 得

$$\frac{1}{[n\pi]} + \frac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \frac{1}{4n} = \ln \frac{4n}{[n\pi-1]} + \varepsilon_{4n} - \varepsilon_{[n\pi]-1}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{[n\pi]} + \dfrac{1}{[n\pi+1]} + \cdots + \dfrac{1}{4n}\right) = \ln \dfrac{4}{\pi}$

例14.58 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$, 求极限: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}\right)^n$

解 注意到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}\right)^n}$$

而

$$\ln \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}\right)^n = -\ln n - n \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{n}{n+1}}{n}\right)$$

$$= -\ln n - n \ln \left(\frac{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n}\right) = -\ln n - n \ln \left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n}\right)$$

$$= -\ln n - n \left(-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}{n} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n^2} - o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n^2}\right)\right)$$

$$= -\ln n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n} + o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n - 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n} + o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n-1+\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)-1+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}+o\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right)^2}{2n}\right)\right)\\&=\gamma-1\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots\frac{n}{n+1}}\right)^n=e^{\gamma-1}$$

例14.59 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$$

其中 γ 是欧拉常数, 若现在我们知道

$$\lim_{n\to\infty}n\big(A-n(H_n-\ln n-\gamma)\big)=B$$

其中 A, B 是两个常数, 求 $\frac{A}{B}$

解 设

$$f(n)=H_n=\ln n+\gamma+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}+\frac{k}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

则有

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)=&\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-c\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-d\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&-k\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

且 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}$, 取 $x=\frac{1}{n}$, 那么简单计算有

$$\frac{x}{1+x}=\ln(1+x)-cx^2\cdot\frac{1}{1+x}-dx^3\cdot\frac{x+2}{(x+1)^2}-kx^4\cdot\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

利用泰勒公式有

$$x(1-x+x^2)+o(x^4)=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)-cx^2(1-x)-dx^3\cdot2+o(x^4)$$

比较系数得

$$c=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{12}$$

例14.60 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]$$

解 利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2kp^{2k}}+R(m,p)$$

其中 $-\dfrac{B_{2k}}{2k}$ 被 $\zeta(1-2k)$ 所代替，又对于所有正整数 m，有 $\zeta(-m)=0$ 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{\gamma+R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right\}$$

由

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}=\psi(m)+\gamma+\frac{1}{m}\,;\ \left|B(m,p)\right|\le\frac{\left|B_{2n+2}\right|}{(2p+2)m^{2p+2}}\cdots[1]$$

对于 $m>0$，$p\le 0$；由 $\left|B_{2p}\right|\sim 4\sqrt{\pi p}\left(\dfrac{p}{\pi e}\right)^{2p}$，$n\to\infty\cdots[2]$ 结合 [1], [2] 得出：

$$\left|R\left(m,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\right|\le(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\cdots[3]$$

由

$$\lim_{n\to\infty}(1+o(1))2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}e^{2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2-m}(2\pi e)^{-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}=0$$

即得所求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2m}+\ln\left(\frac{e}{m}\right)+\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{\zeta(1-n)}{m^n}\right)\right]=\gamma$$

例14.61 求极限

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma$$

解 For $s>1$, write

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}\right).$$

Assuming this, we have

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right).$$

The sum of the first N terms of the above is

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1).$$

So

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)\right)=\gamma$$

例14.62 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{3k+1}-\dfrac{1}{3}\ln n\right)$.

解 (by 挑灯) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma \tag{14.10}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)\overset{(14.10)}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}+\frac{\gamma}{3}\right)$$

$$\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+1)}+\frac{\gamma}{3}+1\right)$$

记

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k+1}}{3k(3k+1)}\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k}}{3k}\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{3k-1}=\frac{x^2}{1-x^3}\Rightarrow f'(x)=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$$

从而易得,

$$f(1)=f(1)-f(0)=-\frac{1}{3}\int_0^1\ln(1-x^3)\,\mathrm{d}x=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\ln 3}{2}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{\ln 3}{2}+\frac{\gamma}{3}$$

14.3.1.3 卡特兰常数

定义 14.6. Catalan 常数

$$G=\beta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

♣

例14.63 计算积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

解 我们知道卡特兰常数 G 有一个定义

$$\mathrm{G}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x\quad(\mathrm{a})$$

令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x\xrightarrow{x=2t}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{4}\ln 2]$$

$$=2(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x)+\frac{\pi}{2}\ln 2=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

得到 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2\quad(\mathrm{b})$

结合 a,b 得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\ln 2+G\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2+G\right)$$

14.3.2 Euler-maclaurin 公式

例14.64 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$.
证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

证明 将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份, 设分点 $x_k=\dfrac{k}{n}$, 则 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$, 且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right)\\
\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中}\ \xi_k\in(x_{k-1},x_k)\\
\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=\!=}&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right),\ \text{其中}\ \eta_k\in(\xi_k,x_k)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_k)^2\right]\right)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_{k-1}-x_k)\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例14.65 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

证明 由题, 可将 $f(x)$ 在 x_i $\left(x_i=a+\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}\right)$ 处进行如下泰勒展开

$$\begin{aligned}
f(x)=&f\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)+f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\\
&+\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

其中 $x\in\left[a+\dfrac{i-1}{n}(b-a),a+\dfrac{i}{n}(b-a)\right]$, ξ_i 介于 x 与 $a+\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}$ 之间. 设

$$B_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)$$

则

$$\begin{aligned}
n^2B_n &= n^2\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\mathrm{d}x\right]\\
&= n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\left[f(x)-f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]\mathrm{d}x\right\}\\
&= n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\left[f'\left(a+\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right\}\\
&\xlongequal{\text{奇偶性}} n^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^2\mathrm{d}x\right\}\\
&\leqslant \frac{n^2}{6}\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x-a-\frac{2i-1}{2}\frac{b-a}{n}\right)^3\Bigg|_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)}\\
&= \frac{(b-a)^2}{24}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i
\end{aligned}$$

$f'\left(a+\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}\right)\cdot\left(x-a-\dfrac{2i-1}{2}\dfrac{b-a}{n}\right)$ 是关于 $x_i=a+\dfrac{2i-1}{2n}(b-a)$ 对称的直线

同理可得

$$n^2B_n \geqslant \frac{(b-a)^2}{24}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

其中 M_i, m_i 分别是 $f''(x)$ 在 $\left[a+\dfrac{i-1}{n}(b-a), a+\dfrac{i}{n}(b-a)\right]$ 上的最大值, 最小值,

而 $f''(x)$ 可积, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}M_i = \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(b)-f'(a)$$

根据夹逼准则,

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right] = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

例14.66 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\big)$$

证明 考虑积分: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 应用分部积分法

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)B_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_1(x)\,\mathrm{d}x\\
&= f(x)B_1(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

继续应用此方法, 注意到在 $n>1$ 时都有关系:

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n \quad \text{以及} \quad B_{2n+1} = 0$$

因此, 便可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big)$$

例14.67 证明: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$

证明 [18] 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} + R - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(n) - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{2m+1}(n), \quad \theta_n \in (0,1).$$

其中, $R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$

$$R_n = -\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{2k-1}(1) + \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)\,\mathrm{d}t,$$

令 $f(x) = \ln x$, 我们有

$$n\ln n - n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n + C - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k+1)} \frac{1}{n^{2k-1}} - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad \theta_n \in (0,1). \tag{14.11}$$

由 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n} \tag{14.12}$$

代入 (14.11) 式并令 $n \to \infty$, 可知 $C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$, 且得到 δ_n 的如下展开式

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k+1)} \frac{1}{n^{2k-1}} + \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

取 $m = 1$ 得

$$\delta_n = \frac{B_2}{2}\frac{1}{n} + \theta_n \frac{B_4}{12}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{12n} - \frac{\theta_n}{360n^3}, \quad \theta_n \in (0,1);$$

再取 $m = 2$ 得

$$\delta_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\theta_n}{1260n^5}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

等等. (14.12) 也可以写成

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots$$

例14.68 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right] = \frac{\ln(2\pi)}{2e}$

解

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n!\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)$$

由 Euler-maclaurin 公式可得

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots$$

故

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n!} &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)\\ &= \exp\left(\ln n - 1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{1}{12n} + o(1/n)\right)\\ &= \frac{n}{e}\exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{1}{12n} + o(1/n)\right)\\ &= \frac{n}{e}\left(1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right]\\ =&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right) - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2en}\right]\\ =&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{1}{\ln n}\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2en} + \frac{\ln^2(2\pi n)}{4n^2} + o(\ln^2 n/n^2)\right) - \frac{1}{2en}\right]\\ =&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\left(\frac{\frac{\ln(2\pi)}{\ln n} + 1}{2en} + \frac{\ln n}{4n^2} + o(\ln n/n^2)\right)\right) - \frac{1}{2en}\right]\\ =&\lim_{n\to\infty} n\ln n\left[\frac{\ln(2\pi)}{2en\ln n} + \frac{\ln n}{4n^2} + o(\ln n/n^2)\right]\\ =&\frac{\ln(2\pi)}{2e} + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{4n} + + \lim_{n\to\infty} o(\ln^2 n/n) = \frac{\ln(2\pi)}{2e}\end{aligned}$$

例14.69 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

定理 14.11. Euler-maclaurin 公式

设 $f(t)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 的函数, $f^{(2k)}(t)$ 都具有相同的符号, 且当 $t\to\infty$ 时, 有 $f^{(2k+1)}(t)\to 0$.

$$\begin{aligned}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = &\sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} + R - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{2k-1}(n)\\ &- \theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{2m+1}(n),\quad \theta_n\in(0,1).\end{aligned}$$

其中, $R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$

$$\begin{aligned}R_n = &-\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{2k-1}(1)\\ &+ \frac{1}{(2m+2)!}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2})f^{(2m+2)}(i+t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

♡

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f^{2k-1}(n) = -\frac{(2k-1)!}{n^{2k}}$ $(k = 1,2,\cdots)$. 我们有

$$\ln n = -\frac{1}{2n} + C + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}(2k)}{n^{2k}} + \theta_n\frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)},\quad \theta_n\in(0,1). \tag{14.13}$$

再由 γ 常数的定义

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$$

代入 (14.13) 式并令 $n\to\infty$, 可知 $C=-\gamma$, 且得到 ε_n 的如下展开式

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{n^{2k}(2k)}-\theta_n\frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)},\quad \theta_n\in(0,1).$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{n^{2k}(2k)}-\theta_n\frac{B_{2m+2}}{n^{2k+1}(2k+2)},\quad \theta_n\in(0,1).$$

例14.70 Define

$$A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

Find

$$\lim_{n\to\infty}n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]$$

Proposed by Yong-xi Wang, China

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}f(n)&\sim\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)\\&=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\frac{1}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{720}\big(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\big)+R_k\end{aligned}$$

表 14.3: $f(x)$ 及其奇数阶导数在 $x=0$ 与 $x=n$ 的值

Start	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(3)}(x)$		$f^{(5)}(x)$		$\cdots$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\frac{n}{n^2+x^2}$	$-\frac{2nx}{(n^2+x^2)^2}$	$\frac{24xn}{(n^2+x^2)^3}$	$-\frac{48x^3n}{(n^2+x^2)^4}$	$-\frac{720nx}{(n^2+x^2)^4}$	$+\frac{3840x^3n}{(n^2+x^2)^5}-\frac{3840x^5n}{(n^2+x^2)^6}$	$\cdots$
$x=0$	$\frac{1}{n}$	0	0		0		$\cdots$
$x=n$	$\frac{1}{2n}$	$-\frac{1}{2n^2}$	0		$\frac{15}{n^6}$		$\cdots$

代入表 14.3 得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4n}-\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

即得

$$A_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4n}-\frac{1}{24n^2}+\frac{1}{2016n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$$

证明 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\sum_{n=a}^{b}f(n)\sim\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\sim n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{f(1)-f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\big)\frac{1}{n^{2k-1}}$$

$$= n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1)-f(0)}{2} + \frac{1}{12n}\left(f'(1)-f'(0)\right)$$
$$-\frac{1}{720n^3}\left(f^{(3)}(1)-f^{(3)}(0)\right) + \frac{1}{30240n^5}\left(f^{(5)}(1)-f^{(5)}(0)\right) + R_n$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = A_n\ ;$$

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$$
$$f'(1)-f'(0) = -\frac{1}{2}-0 = -\frac{1}{2}$$

故

$$\frac{\pi}{4} = A_n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{24}$$

练习 14.25 设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$. 求极限:

$$\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\frac{1}{24}-n\left(n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right)\right)$$

解 这里提供一个一般的方法.

定义 14.7. Euler-maclaurin 求和公式

设函数 $f\in C^{(2m+2)}[a,b], h=\dfrac{b-a}{n}, x_i = a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 则

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right] + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)$$

其中 $\xi\in[a,b], B_{2k}(k=1,2,\cdots,m+1)$ 是 Bernoulli 数 ♣

取 $a=0,b=1,f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $h=\dfrac{1}{n}, x_i=\dfrac{i}{n}, A_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, 则

$$A_n+\frac{1}{4n}-\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[\left(A_n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)+A_n\right]-\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{B_2}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}[f'(1)-f'(0)] + \frac{B_4}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}[f'''(1)-f'''(0)]$$
$$+\frac{B_6}{6!}\cdot\frac{1}{n^6}\left[f^{(5)}(1)-f^{(5)}(0)\right] + \frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)$$

其中, $\xi\in[0,1]$ 也即

$$n^4\left(\frac{1}{24}-n\left(n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2016}+\frac{B_8}{8!}\cdot\frac{1}{n^8}f^{(8)}(\xi)$$

注意到 $f^{(8)}(\xi)$ 有界, 因此 $n\to+\infty$ 时所求极限为 $\dfrac{1}{2016}$

例14.71 Define

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

Find

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{4}-n\left(\ln 2-S_n\right)\right]$$

解 考虑 Euler-maclaurin 公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} f(n) &\sim \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)\\ &=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\frac{1}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{720}\big(f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\big)+R_k\end{aligned}$$

表 14.4: $f(x)$ 及其奇数阶导数在 $x=0$ 与 $x=n$ 的值

Start	$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(7)}(x)$	$\cdots$
$\forall x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+x}$	$-\frac{1}{(n+x)^2}$	$-\frac{6}{(n+x)^4}$	$-\frac{120}{(n+x)^6}$	$-\frac{5040}{(n+x)^8}$	$\cdots$
$x=0$	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n^2}$	$-\frac{6}{n^4}$	$-\frac{120}{n^6}$	$-\frac{5040}{n^8}$	$\cdots$
$x=n$	$\frac{1}{2n}$	$-\frac{1}{4n^2}$	$-\frac{3}{8n^4}$	$-\frac{15}{8n^6}$	$-\frac{315}{16n^8}$	$\cdots$

代入表 14.4 得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2+\frac{3}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+\frac{1}{256n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

即得

$$S_n=\ln 2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{16n^2}-\frac{1}{128n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{4}-n\left(\ln 2-S_n\right)\right]=\frac{1}{16}$$

✍ 练习 **14.26** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right)$$

解 [19] 由 Euler-maclaurin 公式

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(j)=\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\big(f^{(k-1)}(m)-f^{(k-1)}(0)\big).$$

令 $f(x)=x^n$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n^n}\sum_{k=0}^{n-1}k^n\\ &=1+\frac{1}{n^n}\int_0^n x^n\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\big(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(0)\big)\\ &=1+\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(n)\\ &=1+\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{k!}n^{n-k+1}\big(n(n-1)\cdots(n-k+2)\big)\right]\\ &=1+\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{k!}n^{1-k}\big(n(n-1)\cdots(n-k+2)\big)\right]\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} O\left(\frac{1}{n}\right)$$

又

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!} = \frac{1}{e-1} - 1$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{e-1}$$

例14.72 证明: $\lim\limits_{s\to 0^+} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-sn^2} = \frac{1}{2}$.

解 令 $f_s(x) = e^{-sx^2}$, 利用 Euler-Maclaurin 公式, 我们有

$$\sum_{n=0}^{N} f_s(n) = \int_0^N f_s(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f_s(0) + f_s(N)}{2} + \frac{f_s'(0) + f_s'(N)}{12} - \frac{1}{2}\int_0^N B_2(x) f_s''(x)\,\mathrm{d}x$$

因为 $f_s'(x) = -2sxe^{-sx^2}$, $f_s''(x) = 2se^{-sx^2}(2sx^2 - 1)$, 我们可以得到

$$\int_0^N f_s(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} f_s(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-sx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$f_s(0) + f_s(N) = 1 + e^{-sN^2} \to 1$$

$$f_s'(0) + f_s'(N) = -2sNe^{-sN^2} \to 0$$

$$\int_0^N B_2(x) f_s''(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} B_2(x) f_s''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} B_2(x) 2se^{-sx^2}(2sx^2 - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{s}\int_0^{+\infty} B_2\left(\tfrac{x}{\sqrt{s}}\right) e^{-x^2}(2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$$

令 $N \to +\infty$, 因此, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{s}\int_0^{+\infty} B_2\left(\tfrac{x}{\sqrt{s}}\right) e^{-x^2}(2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $B_2(x)$ 有界, 我们可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2} + O(\sqrt{s})$$

令 $s \to 0^+$, 故

$$\lim_{s\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-sn^2} = \frac{1}{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-4sn^2} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn^2} = \frac{1}{2} + O(\sqrt{s}).$$

定理 14.12. Abel-Plana formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(0) + \mathrm{i}\int_0^{\infty} \frac{f(\mathrm{i}t) - f(-\mathrm{i}t)}{e^{2\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t$$

♡

14.3.2.1 变符号项的和式的估计

定理 14.13. 变符号项的和式的估计

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是正值函数，$f''(x)$ 在任意有限区间可积. 则

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f(k)=\frac{1}{2}\big(f(0)-f(2n+2)\big)+O\left(\int_0^{2n+2}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

♡

证明 [20] 由简单的计算，可以知道

$$f(2k+1)-f(2k)=f'(2k)+\int_{2k}^{2k+1}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

以及

$$\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x=f'(2k)+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.14}$$

因此，

$$\begin{aligned}f(2k+1)-f(2k)&=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{2k}^{2k+1}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}|x-2k-1|f''(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(1-|x-2k-1|)f''(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此得到

$$\sum_{k=0}^{n}\big(f(2k+1)-f(2k)\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}(1-|x-2k-1|)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

即是

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f(k)+\frac{1}{2}\int_0^{2n+2}f'(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}O\big(|f''(x)|\big)\,\mathrm{d}x\\&=O\left(\int_{2k}^{2k+2}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

定理证毕.

例14.73 估计和式

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sqrt{k+1}.$$

解 令 $f(x)=\sqrt{x+1}$，则

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

得到

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sqrt{k+1}=-\frac{1}{2}\sqrt{2n+2}+O(1)$$

定理 14.14. 变符号项的和式更精细的估计

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是正值函数，$f'''(x)$ 在任意有限区间可积. 则

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k+1}f(k)=\frac{1}{2}\big(f(0)-f(2n+2)\big)+\frac{1}{4}\big(f'(0)-f'(2n+2)\big)+O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

♡

证明 [20] 利用泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\int_a^{a+h}\frac{1}{2}(a+h-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x,$$

我们得到

$$f(2k+1)-f(2k)=f'(2k)+\frac{1}{2}f''(2k)+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.15}$$

由 (14.14) 式, 又有

$$f'(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$f''(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$

将此二式代入 (14.15) 式, 得到

$$f(2k+1)-f(2k) \tag{14.16}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.17}$$

$$-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2k}^{2k+2}\frac{1}{2}(2k+2-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x$$

由分部积分可以得到

$$\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(f''(2k+2)-f''(2k)-\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'''(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$

代入式(14.16), 得到

$$f(2k+1)-f(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)\,\mathrm{d}x+O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

因此,

$$\sum_{k=0}^{n}\big(f(2k+1)-f(2k)\big)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2(n+1)}f'(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{2(n+1)}f''(x)\,\mathrm{d}x+O\left(\int_{2k}^{2(n+1)}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\big(f(2n+2)-f(0)\big)+\frac{1}{4}\big(f'(2n+2)-f'(0)\big)+O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

定理证毕.

第 15 章 傅里叶级数

15.1 函数展开成傅里叶级数

定理 15.1. 傅里叶级数

设设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{15.1}$$

右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x & (n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{15.2}$$

如果公式 (15.2) 中的积分都存在, 这时他们定出的系数 $a_0,a_1,b_1,\cdots$ 叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶 (Fourier) 系数, 将这些系数带入到 (15.1) 式的右端, 所得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{15.3}$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数 ♡

例15.1 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的单调函数, 则

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

解 [1] 因 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的单调函数, 所有 $\exists M>0,\forall x\in[0,2\pi],|f(x)|\leqslant M$. 又根据第二积分中值定理, $\exists\xi\in(0,2\pi)$, 使

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi}f(0)\int_0^{\xi}\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{\sin n\xi}{n\pi}\big[f(0)-f(2\pi)\big] \end{aligned}$$

所以

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n\pi}|\sin n\xi|\big[|f(0)|+f(2\pi)\big]\leqslant\frac{2M}{\pi}\frac{1}{n}$$

于是 $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. 同理可证: $b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

例15.2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和

解 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x$, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$

当 $n\geqslant1$ 时, $a_{2n}=0$, $a_{2n-1}=\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$

[1] 数学分析选讲 P426

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时,

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos nx\right)$$

当 $x=0$ 时,

$$0=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right)\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}s+\frac{\pi^2}{8}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

15.2 正弦级数与余弦级数

定义 15.1. 正弦级数

对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases}a_n=0 & (n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}\tag{15.4}$$

即知奇函数的傅里叶级数只是含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\tag{15.5}$$

♣

例15.3 计算: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$

解 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数. 作

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi]\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓, 则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 处间断, 又在 $(0,\pi]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$, 因此 $\Psi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_0=0\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$$

故 $\displaystyle f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

例15.4 [21] 求: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

解 构造 $f(x)=x^2,(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 将 $f(x)$ 展开成正弦级数, 有

$$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin(nx),\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

令 $x=\frac{\pi}{2}\in(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4}&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin(n\tfrac{\pi}{2})\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\pi^2}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}4}{(2n+1)^3}\right]\\&=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}-\frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=-\left(\frac{\pi^3}{32}-\frac{\pi^2}{4}\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}-1$$

定义 15.2. 余弦级数

对周期为 2π 的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases}a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,3,\cdots)\\ b_n=0 & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}\tag{15.6}$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\tag{15.7}$$

例15.5 设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\ (-\pi,\pi)$, 则 $a_2=$____

解 根据余弦级数的定义, 有

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x=1$$

例15.6 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

证明 取 $f(x)=x^4$, 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^4}{5}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$
$$b_n = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

于是

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi^2n^2-48}{n^4}\cos n\pi\cos nx \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

令 $x=\pi$ 得

$$\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2\pi^2-48}{n^4}\cos^2 n\pi$$
$$= \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{48}\left(-1+\frac{1}{5}+\frac{8}{6}\right) = \frac{\pi^4}{48}\cdot\frac{8}{15} = \frac{1}{90}\pi^4.$$

例15.7 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

证明 取 $f(x)=x^3$. 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成余弦级数

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4} \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

因此,

$$x^3 = \frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(nx), \quad x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=\pi$, 得

$$\pi^3 = \frac{\pi^3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(\pi^2n^2-2)(-1)^n+12}{\pi n^4}\cos(n\pi)$$
$$\frac{3\pi^3}{4} = 6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} = -\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

例15.8 设 a 不为整数, 将 $f(x)=\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数

证明 将 $f(x)$ 延拓为正规数轴上的以 2π 为周期的函数, 记延拓后的函数为 $\hat{f}(x)$, 则 $\hat{f}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 2π 的连续偶函数. 因此,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}, \ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nx\,\mathrm{d}x \overset{\text{奇函数}}{=\!=} 0, \ n=1,2,\cdots.$$

故 $\hat{f}(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\hat{f}(x)=\frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in(-\infty,+\infty).$$

限制在 $[-\pi,\pi]$ 上就有

$$\cos ax=\frac{\sin ax}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi].$$

上式令 $x=0$, 就可得

$$\frac{\pi}{\sin ax}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2},\ a\notin\mathbb{Z}.$$

例15.9 证明: $\cot x=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$

证明 令 $\alpha\in(0,1)$, 利用 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos\alpha x=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],\ x\in[-\pi,\pi]$$

令 $x=\pi$ 得

$$\cos\alpha\pi=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos n\pi\right]$$

再令 $a\pi=t$, 即得

$$\cot t=\frac{1}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\frac{t}{\pi}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2-n^2}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2},\quad t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$$

练习 15.1 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$

证明

$$\pi x\cot\pi x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2}=1-2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2x^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}-\cdots \tag{15.8}$$

$$\pi x^{1/2}\cot\pi x^{1/2}=1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}-\cdots$$

For $z\sim 0$:

$$z\cot z=\frac{z}{\tan z}\sim\frac{z}{z+z^3/3+2z^5/15}=\frac{1}{1+z^2/3+2z^4/15} \tag{15.9}$$

$$\sim 1-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}+\frac{z^2}{3}+\frac{2z^4}{15}{}^2\sim 1-\frac{z^2}{3}-\frac{2z^4}{15}+\frac{z^4}{9}=1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45} \tag{15.10}$$

$$\pi x^{1/2}\cot\pi x^{1/2}\sim 1-\frac{\pi^2}{3}x-\frac{\pi^4}{45}x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=--\frac{\pi^4}{45}=\frac{\pi^4}{90}$$

例15.10 证明: $\dfrac{1}{\sin t}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2},\quad t\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots.$

证明 令 $\alpha \in (0,1)$, 利用 $\cos \alpha x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha x}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos nx\right], \ x \in [-\pi, \pi]$$

令 $x = 0$ 得

$$1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right],$$

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

再令 $\alpha\pi = t$, 即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\frac{t}{\pi}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 - n^2} \\ &= \frac{1}{t} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}, \quad t \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots.\end{aligned}$$

例15.11 证明: $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \ x \in (0, \pi)$

证明 令 $\alpha \in (0,1)$, 利用 $\cos \alpha x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos \alpha x = \frac{\sin a x}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos nx\right], \ x \in [-\pi, \pi]$$

令 $x = \pi$ 得

$$\cot \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2}, \ \alpha \in (-1, 1) \tag{15.11}$$

(15.11) 式对 α 从 0 到 t 上积分,

$$\ln \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right), \ t \in (0, 1)$$

最后, 令 $x = \pi t$, 得

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right), \ x \in (0, \pi)$$

例15.12 求极限: $I = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

证明 收敛是没有问题的. 考虑 $\sin x$ 的无穷乘积公式

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

取 $x = \mathrm{i}\pi$ 然后利用复变函数中 $\sin z$ 的展开式 $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 得

$$\sin(\mathrm{i}\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\mathrm{i}\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{\pi})$$

15.3 一般周期函数的傅里叶级数

定理 15.2. 狄利克雷 (Dirichlet) 收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数, 如果在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足:

1. 连续或只有有限个第一类间断点;
2. 只有有限个极值点;

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 记其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{15.12}$$

且 $S(x)=\begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x \text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x \text{ 为端点} \end{cases}$ ♡

例15.13 假设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x-1, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$ 的周期为 2 傅里叶级数 $S(x)$, 则在 $x=-\frac{1}{2}, x=0, x=1, x=\frac{3}{2}$ 处 $S(x)$ 分别收敛于 ____, ____, ____, ____

解

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x \text{ 为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x \text{ 为端点} \end{cases}$$

画图可知, $x=-\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的连续点, 故

$$S(-\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点, 故

$$S(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

$x=1$ 为 $f(x)$ 的端点, 故

$$S(1)=S(-1)=\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

根据周期性 $S(\frac{3}{2})=S(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

定理 15.3. $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 的傅里叶展开

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad (x\in C) \tag{15.13}$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{15.14}$$

♡

例15.14 设函数 $f(x)$ 是以为 2π 周期的周期函数, 且 $f(x)=e^{\alpha x}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, 其中 $\alpha\neq 0$, 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和.

解 先求出系数:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a\pi}(e^{2\pi\alpha}-1)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\alpha x}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\cdot\frac{n}{\alpha^2+n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

由狄利克雷收敛定理知

$$e^{\alpha x}=\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cos nx-n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\right],\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

令 $\alpha=1, x=0$, 由狄利克雷收敛定理知

$$\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right]=\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=\frac{e^{2\pi}+1}{2}$$

故,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}$$

例15.15 计算 $\arctan\left(\dfrac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$ 的 Fourier series.

解 考虑 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z}&=\frac{1+\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})}=\frac{1}{1+r\cos\theta+ir\sin\theta}\\&=\frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}-i\cdot\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

于是, 记

$$a=\frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2},b=-\frac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

我们得到 $\dfrac{1}{1+z}=a+ib$, 那么它的辐角

$$\varphi=\arctan\frac{b}{a}=-\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}a+ib&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}e^{i\varphi}\end{aligned}$$

又注意到

$$\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi|=\frac{1}{|1+z|}=\frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\overline{z})}}$$

所以

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{\sqrt{(1+z)(1+\overline{z})}}e^{i\varphi}$$

就是

$$-i\varphi=i\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+z)-\ln(1+\overline{z})\right)$$

这时，利用 $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ 及 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$, 得到

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta)$$

$$\ln(1+\overline{z})=\overline{\ln(1+z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(r^n\cos n\theta-ir^n\sin n\theta)$$

于是，自然就得到

$$\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}r^n\sin n\theta$$

这个不是别的，就是它的 Fourier Series. 另外，若令 $r=-1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

例15.16 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$
用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

证明 由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知, f 为以 2, $\sqrt{3}$ 为周期的周期函数，
所以它的 Fourier 系数为:

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$, 所以

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$; 同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$.
联立, 有

$$\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$$

得 $a_n=b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$.

而 f 可导, 其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$, 所以有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常数

例15.17 设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $f(x)+f(x+\frac{1}{2})=f(2x)$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明 (by ytdwdw) 设 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2k\pi x+b_k\sin 2k\pi x)$$

则 $f(x)+f(x+\frac{1}{2})$ 的 Fourier 展开式为

$$\begin{aligned}&a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+(-1)^k)a_k\cos 2k\pi x+(1+(1+(-1)^k))b_k\sin 2k\pi x\right]\\=&a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(2a_{2k}\cos 4k\pi x+2b_{2k}\sin 4k\pi x)\end{aligned}$$

而 $f(2x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 4k\pi x+b_k\sin 4k\pi x)$$

比较系数得到 $a_0=0$,

$$a_k=2a_{2k},\quad b_k=2b_{2k},\quad k\geqslant 1.$$

从而

$$a_k=2^n a_{2^n k},\quad b_k=2^n b_{2^n k},\quad \forall k\geqslant 1, n\geqslant 1.$$

注意到 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}nb_n=0$$

所以

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}2^n k n a_{2^n k}=0,\quad b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}2^n k n b_{2^n k}=0,\quad \forall k\geqslant 1.$$

这样 $f(x)$ 的 Fourier 系数均为零, 所以 $f(x)\equiv 0$.

注意 关于 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 的条件可以减弱为: 设 $g(x)$ 以 1 为周期, 可积且绝对可积, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$, $f(x)=f(0)+\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

定理 15.4. $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是奇函数的傅里叶展开

当 $f(x)$ 是奇函数时

$$f(x)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}}_{\text{正弦级数}}\quad(x\in C)\tag{15.15}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)\tag{15.16}$$

定理 15.5. $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 是偶函数的傅里叶展开

当 $f(x)$ 是偶函数时

$$f(x)=\overbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}}^{\text{余弦级数}}\quad(x\in C)\tag{15.17}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)\tag{15.18}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$[0,l]$上$f(x)$展开成正弦或余弦级数
- $\xrightarrow[f(x)\to\text{奇函数}]{\text{作奇延拓}}$ 正弦级数
- $\xrightarrow[f(x)\to\text{偶函数}]{\text{作偶延拓}}$ 余弦级数

例15.18 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$, $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则求 $S(-\frac{9}{4})$

解 作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, & x\in[0,1]\\ -f(-x)=-\left|x+\frac{1}{2}\right|, & x\in[-1,0]\end{cases}$$

画图知 $x=-\frac{1}{4}$ 为 $F(x)$ 的连续点，根据周期性

$$S(-\tfrac{9}{4})=S(-\tfrac{1}{4})=-\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{4}$$

定理 15.6. Parseval 等式

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数，且有 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例15.19 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可微，若 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则

$$\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

证明 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上作偶延拓，从而可展开成 Fourier 余弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\quad(a_0=0)$$

此时，易知有 $f(-\pi)=f(\pi)$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n)\sin nx$$

从而由 $a_n^2 \leqslant (-na_n)^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 根据 Parseval 等式，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$$

例15.20 (Wirtinger 不等式) 设 $f(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$. 如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x) = a\cos x + b\sin x$

证明 [2] 将 f 延拓为 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 周期为 2π. 则 f 有 Fourier 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$f'(x)$ 的 Fourier 展开为

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx).$$

根据 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\\ &\leqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2 + n^2b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_n = b_n = 0, \forall n \geqslant 2$.

例15.21 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

证明 考虑函数 $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$, 将其傅立叶展开

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

利用 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$$

其中 a_n 为 e^{inx} 的系数，即 $\dfrac{(-1)^n}{n}i$,$a_0 = 0$ 那么有

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \frac{\pi^2}{3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

例15.22 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

[2]梅加强《数学分析》P380

证明 取 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成余弦级数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2},\quad \forall\, n=1,2,\cdots$$

因此,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

根据 Parseval 等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2$$

即

$$\frac{\pi^4}{5}=\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

例15.23 记 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha\\ 0, & \alpha\leqslant|x|<\pi\end{cases}$ 的 Fourier 系数为 $\{a_0,a_n,b_n\}$, 试求级数的和:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\quad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

证明 依题设知 $b_n=0\,(n\in\mathbb{N})$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},\quad n\in\mathbb{N}$$

根据 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

我们有

$$\frac{2\alpha}{\pi}=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{(\pi-\alpha)\alpha}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{(\pi-\alpha)\alpha}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}$$

例15.24 计算 $I=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$

解 (by 西西) 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$$

由于

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{3}=\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$I=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$$

再利用熟悉的 (傅里叶或者 $\mathrm{Li}_2(z)$) 性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$$

将 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 带入即可得到 $I=\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{72}$.

15.4 傅里叶级数的微分与积分

定理 15.7. 逐项微分

设 $f(x)\in C^{(1)}([-\pi,\pi])$, 且是以 2π 为周期的函数, 若在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外 $f''(x)$ 存在, 且 $f''\in\mathbb{R}([-\pi,\pi])$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可在 $[-\pi,\pi]$ 上进行逐项微分

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

且上式中级数一致收敛 ♡

定理 15.8. 逐项积分 (Du Bois Reymond)

设 $f(x)\in\mathbb{R}([-\pi,\pi])$, 且是以 2π 为周期的函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 可进行逐项积分

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right),$$

且右端级数一致收敛 ♡

15.4.0.1 傅里叶级数的复数形式

定理 15.9. 傅里叶级数的复数形式

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}$.

其中 $c_n=\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ ♡

例15.25 设 $f(x)\in C((-\infty,+\infty))$. 若有 $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$ $(x\in\mathbb{R})$, 则 $f(x)\equiv C$(常数)

证明 考察 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 依题设知

$$C_n=\int_0^1 f(x)e^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x+\sqrt{2})e^{-2n\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$$

令 $t=x+\sqrt{2}$, 可得

$$C_n=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}f(t)e^{-2n\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\int_0^1 f(t)e^{-2n\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\cdot C_n.$$

由于 $n\neq 0$ 时, $e^{2n\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}\neq 1$, 故知 $C_n=0\,(n\neq 0)$.

15.5 傅里叶积分与傅里叶变换

例15.26 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

证明 (Richard Troll) 由泊松求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)$$

可知, 其中 $\hat{f}(\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ 为傅立叶变换。那么有 $f(x)=e^{-a|x|}$, f 的傅立叶变换为

$$\hat{f}(\xi)=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$$

也就是说

$$\frac{1}{2a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-a|n|}-\frac{1}{a^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{a^2+4\pi^2k^2}$$

则

$$\lim_{a\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{a^2+4\pi^2k^2}=\lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right)-\frac{1}{a^2}\right\}=\frac{1}{12}$$

从而就有 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$

例15.27 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和

解 (by 向禹)

定理 15.10

若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除有限个非整数的极点外处处解析，且存在常数 $R>0$ 和 $M>0$，使当 $|z|>R$ 时，有 $|zf(z)|\leqslant M$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n)=-\sum_{f(z)\text{的极点}}\operatorname{res}(\pi\cot\pi z f(z))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sum\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=\pm\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}$$

其中

$$\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=\mathrm{i}\right)=\operatorname{res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{1+z^2},z=-\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}\pi\coth\pi$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}\coth\pi-\frac{1}{2}$$

例15.28 计算: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2+1}$

解 (by 向禹) 法 1. 令 $\omega=e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$, 则

$$n^4+n^2+1=(n^2-\omega)(n^2-\omega^2)$$

于是

$$\frac{1}{n^4+n^2+1}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(\frac{1}{n^2-\omega}-\frac{1}{n^2-\omega^2}\right).$$

利用傅里叶级数, 我们可以得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a}=\frac{-1+\pi\sqrt{a}\coth(\pi\sqrt{a})}{2a}$$

故可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+k^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega}\right)=\frac{1}{6}\left(-3+\pi\sqrt{3}\tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

法 2(留数).

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^4+z^2+1},z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}},e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}},e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}},e^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}\right)-\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{2}\cdot 2\left[\frac{\cos\left(e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\pi\right)}{2+\left(-2+e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)}+\frac{\cos\left(e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\pi\right)}{2+\left(-2+e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\right)}\right]-\frac{1}{2}\\&=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

参考文献

[1] YTDWDW. 数学分析高等数学例题选解 V6[EB/OL]. 2016. http://wenku.baidu.com/view/d252c01ccf84b9d528ea7aa4.html.

[2] 徐森林, 薛春华. 数学分析第一册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[3] 周明强. 数学分析习题演练[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[4] 楼红卫. 微积分进阶[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[5] 朱尧辰. 数学分析范例选解[M]. 安徽: 中国科技大学出版社, 2015.

[6] 徐森林, 薛春华. 数学分析精选习题全解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[7] 国防科学技术大学数学竞赛指导组. 大学生数学竞赛指导[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[8] MAORENFENG88. 一类数列问题的做法。[EB/OL]. 2018. http://www.math.org.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=38220&extra=page%3D1.

[9] 同济大学数学系. 高等数学习题全解指南[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[10] 同济大学数学系. 高等数学 第七版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[11] 谢惠民. 数学分析习题课讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[12] FURDUI O. Limits, series, and fractional part integrals[M]. [S.l.]: Springer New York, 2013.

[13] 徐森林, 薛春华. 数学分析第三册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[14] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[15] FIN3574. 这道题到底有多少种做法？[EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4331366750.

[16] 陈兆斗, 郑连存, 王辉, 等. 大学生数学竞赛习题精讲[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.

[17] FIN3574. 【微分方程】二阶线性微分方程の Wronskian 法[J/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4501477872.

[18] 梅加强. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[19] SPIVEY M Z. The euler-maclaurin formula and sums of powers[J]. Mathematics Magazine, 2006, 79(1):61-65.

[20] 潘承洞于秀源. 阶的估计[M]. 山东: 山东科学技术出版社, 1983.

[21] ARIS. 发个题，想看看大家的解法。[EB/OL]. 2016. http://tieba.baidu.com/p/4428450841#870161052531.