

中科院数学与系统科学学院研究院 分析与代数测试试题解答

向 禹

最近网上传的比较火的就是这套试卷了, 难度比起我当年考试的时候似乎大了不少. 在通过和群友的讨论以后, 总算解决了这套试卷的解答. 其中有的解答属于我, 有的属于群友, 还有一些参考书, 这里尤其感谢群友给出的第六题的解答. 现给出完整解答, 如有错漏, 请邮件戳我 [✉](mailto:xiangmath@163.com).

第一题

证明或反证: 存在一个 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 5I = O$ 的充要条件是 n 为偶数.

解 首先如果矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 5I = O$, 则 A 的特征值只能是 $-1 \pm 2i$, 那么根据虚根成对原理可知此矩阵只能是偶数阶. 且当 $n = 2k$ 时, 我们令

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_k = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

则显然有 $A_i^2 + 2A_i + 5I = O, i = 1, 2, \dots, k$. 令 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 即满足题意. 也就是存在一个 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2 + 2A + 5I = O$ 的充要条件是 n 为偶数.

第二题

设 f 为定义在 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 求证:

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy \geq \int_0^1 |f(x)| dx.$$

证明 本题证明方法颇多, 这里采用蒲和平大学生数学竞赛教程上的解答 (377 页第 10 题).

令 $I_1 = \{x \in [0, 1] | f(x) \geq 0\}$, 以及 $I_2 = \{x \in [0, 1] | f(x) < 0\}$. 记 $P = m(I_1), N = m(I_2)$ 分别表示 I_1 和 I_2 对应的区间长度⁴, 则 $P + N = 1$. 若 $P = 0$ 或 $N = 0$, 则不等式是显然的. 这里不妨设 $P > 0$, 且 $N > 0$. 考虑 $|f|$ 在 I_1 和 I_2 上的均值

$$\mu_p = \frac{1}{P} \int_{I_1} f(x) dx, \quad \mu_n = -\frac{1}{N} \int_{I_2} f(x) dx.$$

如果必要, 以 $-f(x)$ 代替 $f(x)$, 我们不妨假设 $\mu_p \geq \mu_n$. 显然

$$\iint_{I_1 \times I_1} |f(x) + f(y)| dx dy = 2P^2 \mu_p, \quad \iint_{I_2 \times I_2} |f(x) + f(y)| dx dy = 2N^2 \mu_n.$$

此外,

$$\begin{aligned} \iint_{I_1 \times I_2} |f(x) + f(y)| dx dy &\geq \left| \iint_{I_1 \times I_2} [f(x) + f(y)] dx dy \right| \\ &= |NP\mu_p - NP\mu_n| = NP(\mu_p - \mu_n). \end{aligned}$$

并且在 $I_2 \times I_1$ 上同样的积分不等式成立. 于是结合 $P + N = 1$ 可得,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy &\geq 2P^2\mu_p + 2NP(\mu_p - \mu_n) + 2N^2\mu_n \\ &= P(\mu_p - \mu_n) + (2N - 1)^2\mu_n + P\mu_p + N\mu_n \\ &\geq P\mu_p + N\mu_n = \int_0^1 |f(x)| dx. \end{aligned}$$

本题出自 [2003 年普特南数学竞赛](#). 我本人也给出一种基于概率论的方法 (虽然有些复杂): 设 X, Y 独立同分布于 $U[0, 1]$, 令 $T = f(X), W = f(Y)$, 则 T, W 也独立同分布, 且

$$\mathbb{E}|T + W| = \int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy, \quad \mathbb{E}|T| = \int_0^1 |f(x)| dx,$$

只需要证明 $\mathbb{E}|T + W| \geq \mathbb{E}|T|$ 即可. 根据我曾经发布的微信公众推文 [数学期望不等式](#), 我们有 $\mathbb{E}|T + W| \geq \mathbb{E}|T - W|$, 而 $\mathbb{E}|T + W| + \mathbb{E}|T - W| \geq \mathbb{E}|T + W + T - W| = 2\mathbb{E}|T|$, 得证.

[△]确切地说, 应该是测度.

第三题

设 A 和 B 分别为 2×2 矩阵, 其元为整数, 且 $A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也为整数. 证明 $A + 5B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也为整数.

证明 本题源自 [第十届大学生数学竞赛](#). 首先有如下引理:

引理 1. 如果矩阵 A 和 A^{-1} 的都是整数矩阵, 则 A 的行列式的绝对值为 1.

证明. 这只需要由 $AA^{-1} = I$ 得 $|A||A^{-1}| = 1$. 注意到 $|A|$ 和 $|A^{-1}|$ 均为整数, 故 A 的行列式的绝对值为 1. ☆

再考虑多项式 $p(x) = |A + xB|^2$, 根据题意知 $p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)$ 的值均为 1. 因此不超过四次的多项式 $q(x) = p(x) - 1$ 有五个零点, 这说明 $q(x) \equiv 0$, 即 $p(x) \equiv 1$. 特别地, $p(5) = |A + 5B|^2 = 1$, 于是 $|A + 5B| = 1$ 或 -1 , 则 $A + 5B$ 可逆, 且 $(A + 5B)^{-1} = (A + 5B)^* / |A + 5B|$ 的元均为整数.

第四题

设 $f(x, y, z) = e^{-\pi(x^2+y^2+z^2)}$, 求 f 的 Fourier 变换, 其定义为:

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) e^{-2\pi i(x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3)} dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\pi[x^2+y^2+z^2+2i(\xi_1x+\xi_2y+\xi_3z)]} dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\pi[(x+i\xi_1)^2+(y+i\xi_2)^2+(z+i\xi_3)^2]-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)} dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi_1)^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+i\xi_2)^2} dy \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(z+i\xi_3)^2} dz \\
&= e^{-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} dz \\
&= e^{-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}.
\end{aligned}$$

其中, 通过考虑由 $x = \pm R, y = 0, y = \xi_1$ 所构成的矩形围道, 令 $R \rightarrow \infty$, 由留数定理可得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi_1)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx,$$

剩下的同理成立. 从这里我们还发现 f 其实是 Fourier 变换的不动点.

第五题

对任何方阵 A 可定义 $\sin A$ 如下:

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

证明或反证: 存在一个 2 阶方阵 A 使得 $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 首先注意到如果 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$, 于是

$$(\sin A)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \lambda^{2n+1}\alpha = (\sin \lambda)\alpha,$$

即如果 λ 是 A 的特征值, 对应的 $\sin \lambda$ 就是 $\sin A$ 的特征值. 现在假设存在矩阵 A 使得

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\sin A$ 的特征值均为 1, 那么 A 的任意特征值 λ 满足 $\sin \lambda = 1$. 设 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\sin a = \sin b = 1, c = 1$ 或 0 . 于是存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^{-1}JP$. 如果 $c = 0$, 则显然

$$\begin{aligned}
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} J^{2n+1} \right) P \\
&= P^{-1} \begin{pmatrix} \sin a & 0 \\ 0 & \sin b \end{pmatrix} P = P^{-1} I P = I \neq \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

如果 $c = 1$, 此时必有 $a = b$, 于是我们有

$$J^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} J^{2n+1} \right) P \\
&= P^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\begin{pmatrix} a^{(2n+1)} & 0 \\ 0 & a^{(2n+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (2n+1)a^{2n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] P \\
&= P^{-1} \left[\begin{pmatrix} \sin a & 0 \\ 0 & \sin a \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (2n+1)a^{2n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] P \\
&= I + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \cos a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = I \neq \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

因此不存在矩阵 A , 使得 $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

第六题

设 $x_0 = 1$, 当 $n \geq 0$, $x_{n+1} = 3x_n + [\sqrt{5}x_n]$, 其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, 求 x_n 的通项表达式.

解 方法一 首先给出两个引理:

引理 2. 若 $x \in \mathbb{N}_+$, 则 $[(3 + \sqrt{5})x] + [(3 - \sqrt{5})x] = 6x - 1$.

证明. LHS = $6x + [\sqrt{5}x] + [-\sqrt{5}x] = 6x + [\sqrt{5}x] - [\sqrt{5}x] - 1 = 6x - 1 = \text{RHS}$. ☆

引理 3. 若 $x \in \mathbb{N}_+$, 则 $[(3 - \sqrt{5})[(3 + \sqrt{5})x]] = 4x - 1$.

证明. 用 $\{x\}$ 表示 $x - [x]$, 则

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= [(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})x - (3 - \sqrt{5})\{(3 + \sqrt{5})x\}] \\
&= 4x + [-(3 - \sqrt{5})\{(3 + \sqrt{5})x\}] = 4x - 1 = \text{RHS}. \quad \star
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 3x_n + [\sqrt{5}x_n] = [(3 + \sqrt{5})x_n] \\
&= 6x_n - [(3 - \sqrt{5})x_n] - 1 \\
&= 6x_n + [(3 - \sqrt{5})[(3 + \sqrt{5})x_{n-1}]] - 1 \\
&= (6x_n - 1) - (4x_{n-1} - 1) = 6x_n - 4x_{n-1}.
\end{aligned}$$

结合 $x_0 = 1, x_1 = 5$, 由特征根方法可知

$$x_n = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10} (3 + \sqrt{5})^n + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} (3 - \sqrt{5})^n.$$

方法二 注意到

$$3a_n + \sqrt{5}a_n - 1 < a_{n+1} < 3a_n + \sqrt{5}a_n,$$

两边同乘 $\sqrt{5} - 3$ 得

$$\begin{aligned} -4a_n + (3 - \sqrt{5}) &> (\sqrt{5} - 3)a_{n+1} > -4a_n, \\ 3a_{n+1} - 4a_n + (3 - \sqrt{5}) &> \sqrt{5}a_{n+1} > 3a_{n+1} - 4a_n, \end{aligned}$$

得出 $[\sqrt{5}a_{n+1}] = 3a_{n+1} - 4a_n$. 因此

$$a_{n+1} = 3a_n + (3a_n - 4a_{n-1}) = 6a_n - 4a_{n-1},$$

同样得到了线性递推方程, 剩下用特征根方法即可.